

**THE TEXT IS  
LIGHT IN  
THE BOOK**

**OLD AND BROWN  
BOOK**















**TRAITÉ**  
**DE**  
**BALISTIQUE EXTÉRIEURE**

---

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET C<sup>ie</sup>,

Quai des Grands-Augustins, 55.

64246-21

---

# TRAITÉ

DE

# BALISTIQUE EXTÉRIEURE

PAR

L'Ingénieur général P. CHARBONNIER

INSPECTEUR GÉNÉRAL DE L'ARTILLERIE NAVALE

TOME I

BALISTIQUE EXTÉRIEURE RATIONNELLE

LES THÉORÈMES GÉNÉRAUX DE LA BALISTIQUE



PARIS

GASTON DOIN, ÉDITEUR

8, Place de l'Odéon

GAUTHIER-VILLARS ET C<sup>ie</sup>, ÉDITEURS

55, Quai des Grands-Augustins

1921

**Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction réservés pour tous pays.**

---

## PRÉFACE.

---

I. En 1669, Blondel, Maître de camp aux armées du Roi, publiait un *Traité de Balistique Extérieure* sous le titre : *L'art de jeter les bombes* ; la dédicace de cet Ouvrage débutait ainsi :

« Au Roy. — Sire, peut-être que je viens un peu hors de saison offrir à Votre Majesté ce *Traité de l'art de jeter les bombes* dans un temps où elle vient de donner la paix à l'Europe et où il semble que la science de l'Artillerie ne doive plus être employée qu'à faire des feux de joie.

« J'espère néanmoins que mon Ouvrage ne lui sera pas tout à fait désagréable et qu'elle y verra avec quelque plaisir les règles d'un art dont elle s'est si utilement servi dans ses conquêtes et qui n'a pas été un des moindres instruments de ses victoires. J'ose me flatter qu'elle approuvera le dessein que j'ai d'empêcher un art si noble de périr en le réduisant aux règles certaines des mathématiques et donnant moyen aux élèves de s'y perfectionner. D'ailleurs, Sire, c'est dans le temps de la paix, à bien parler, que l'on doit étudier le métier de la guerre et il ne faut pas attendre à en acquérir la connaissance qu'on soit obligé de la mettre en pratique. »

Un *Traité de Balistique*, qui paraît en 1921, ne saurait, semble-t-il, s'ouvrir sur un texte plus heureux.

II. Nous avons publié antérieurement des ouvrages assez étendus sur la *Balistique Extérieure* : en 1904, un volume (Béranger, éditeur) sous le titre de *Traité de Balistique Extérieure* ; en 1907, deux volumes de l'Encyclopédie scientifique (O. Doin, éditeur), sous le titre de *Balistique Extérieure rationnelle*.

Mais ces ouvrages, conçus surtout en vue de nécessités professionnelles et destinés à un cercle restreint de spécialistes, n'embrassaient qu'une partie de la science balistique. Ils ne constituaient pas le *Traité*



complet qu'il était permis de concevoir, embrassant tout l'ensemble des travaux consacrés à la Balistique, les classant avec méthode, et les exposant avec détail, traité digne, si possible, de l'intérêt théorique de la science balistique, de l'importance de ses applications pratiques et du rôle éminent de l'Artillerie dans l'art de la guerre.

III. Il y a, dans une science donnée, des travaux d'inventaire et de synthèse qu'il est nécessaire, à certains moments, d'entreprendre : lorsqu'il devient évident qu'une étape est sur le point de s'achever, il importe, en utilisant tous les documents rassemblés et toutes les découvertes faites, de marquer la physionomie générale du pays parcouru et de préparer l'étape nouvelle.

Il n'y a nul doute que la Balistique soit aujourd'hui arrivée à ce point : cultivée presque exclusivement jusqu'ici par quelques artilleurs techniciens, considérée comme une science de luxe par les artilleurs combattants, conservée cependant avec foi et appliquée avec méthode par la seule Commission de Gâvre en France, presque totalement ignorée des professeurs de Mécanique et des savants, n'ayant nulle part de chaire d'enseignement, la Balistique est soudain devenue, pendant la guerre, par le rôle qu'elle a rempli et les services qu'elle a rendus, une science de premier plan. Ses méthodes théoriques, lentement et patiemment élaborées, presque dans l'ombre, puis généralisées et étendues, ont permis de résoudre tous les problèmes, de plus en plus complexes, qui, durant la guerre, ont été posés aux techniciens par la puissance croissante des armes, l'emploi de genres de tir nouveaux, les exigences de la préparation et du réglage, la précision accrue des moyens d'observation. A cette renaissance de la Balistique ont déjà contribué brillamment, en émulation ardente avec les artilleurs, de nombreux savants, que la mobilisation avait groupés autour des services techniques de l'Artillerie; de là résulte un changement de domaine intellectuel, qui est une évidente source de progrès, et qui fera passer, peut-être, la Balistique du rang de science appliquée très spéciale, au rang, qu'elle paraît mériter, à maints égards, de science d'enseignement général, à côté de l'Astronomie, dont elle est la branche terrestre.

IV. Les progrès d'une science sont en liaison directe, non pas tant avec l'organisation collective des savants sous forme de « séminaires » (solution à laquelle l'individualisme français se plie mal, et qui, d'ailleurs, ne vaut que pour certaines disciplines et dans certains cas particuliers), mais avec l'organisation libre du travail volontaire de chaque savant isolé. Chacun, chez nous, a sa propre méthode de travail qu'il se crée suivant ses goûts, ses aptitudes, ses besoins : ce qu'on doit fournir au savant, c'est un jeu complet de bons et sûrs *outils*, qu'il maniera ensuite à sa guise.

*a.* Dans une science déterminée, le premier de ces *outils* de travail est un *classement logique* des faits et des théories de la science, formant le tableau complet des résultats acquis, à une époque donnée, et coordonnant les recherches des savants antérieurs.

C'est dans l'ordonnance, la clarté et l'universalité de cette classification logique que réside la mesure du degré d'avancement d'une science ; il faut que toutes les théories qui ont été publiées trouvent, dans ce tableau, leur place naturelle et soient rattachées par des liens logiques aux idées directrices qui président à l'exposé général de la science.

Dans notre *Traité*, cet exposé général de la science balistique, suivant le plan qui nous a déjà guidé dans tous nos travaux antérieurs, constituera la partie dite de la *Balistique rationnelle*, qui comprend :

TOME I. — Problème balistique principal. — *Les théorèmes généraux de la Balistique.*

TOME II. — Problème balistique principal. — *Les théories balistiques.*

TOME III. — Problèmes balistiques secondaires.

Peut-être cet exposé, dont nous avons défini l'esprit, risquera-t-il parfois d'être d'un intérêt inégal ; d'être, en apparence, trop loin des applications, si c'est un praticien qui le consulte ; trop élémentaire et trop timide dans la théorie, si c'est un savant qui le juge. L'écueil, pour l'auteur, est de n'avoir écrit qu'une lourde et lente compilation au lieu d'une œuvre de logique et d'harmonie, bien dessinée et bien équilibrée.

En tout cas, ces théories, qui sont la base nécessaire des applications pratiques, pourront être le point de départ des études du balisticien, qui cherchera à faire progresser la science, ou du professeur, qui désirera la posséder, ou de l'artilleur, qui voudra pénétrer l'esprit des méthodes de tir dont il use. Nulle science peut-être, d'autre part, n'offre comme applications immédiates et naturelles des cours classiques d'Analyse et de Mécanique rationnelle, tant de problèmes, d'aspects si divers et si intéressants qu'on peut dire que, parcourir un traité de Balistique Extérieure, c'est passer comme une revue, sous une forme concrète, de toutes les théories de ces deux sciences.

b. Le second *outil* est celui qui tendra constamment à resserrer les liens nécessaires entre la théorie, qui marche toujours vers l'abstraction, et l'expérience, où la science trouve ses lois naturelles et ses vérifications.

Le Tome IV, sous le titre de *Balistique Extérieure expérimentale*, fait connaître la nature et le maniement de tout l'outillage nécessaire au balisticien pour établir les lois expérimentales de la Balistique, et obtenir les données et caractéristiques des tirs : *appareils balistiques* en usage dans les polygones d'expériences, d'une part ; *méthodes pratiques de calcul*, de l'autre.

c. Le Tome V renferme un *Historique de la Balistique Extérieure*. C'est là le troisième *outil* nécessaire. Un historique est le complément indispensable de tout traité d'une science quelconque : la théorie, qui n'est qu'une classification sur un plan logique, n'est plus, en effet, qu'un développement qui apparaît comme factice et froid, si l'on n'évoque pas sa vie permanente à travers les temps.

Cet historique doit être comme la contre-épreuve de la théorie, car on doit voir s'y classer aisément, et en recevoir une lumière nouvelle, tous les travaux que les savants passés ont consacré à la science.

Et lorsqu'une science peut, comme la Balistique, faire figurer dans son développement les noms de Galilée, de Newton, de Bernoulli, d'Euler, de Legendre, etc., son histoire présente certainement un intérêt général plus grand que celle d'une simple science d'application pratique.

d. Ensuite, vient, tout naturellement, le quatrième *outil* indispensable, une *Bibliographie* aussi complète que possible, qui terminera le cinquième volume.

e. Enfin, et comme dernier *outil* de travail, le Tome VI renferme toutes les *Tables numériques* nécessaires à l'application des théories balistiques et les modèles de calcul utiles dans la pratique.

V. La guerre a naturellement retardé beaucoup la publication de ce *Traité*, dont le manuscrit a été déposé, dès janvier 1918, à l'Institut. L'Académie des Sciences nous a fait le très grand honneur de décerner à cet Ouvrage le prix Poncelet, pour l'année 1919.





# TRAITÉ

DE

# BALISTIQUE EXTÉRIEURE

---

## INTRODUCTION.

LA BALISTIQUE EXTÉRIEURE RATIONNELLE.

---

**1. Objet de la Balistique Extérieure.** — L'étude du mouvement d'un corps pesant, de forme quelconque, lancé dans un milieu résistant, est un problème inabordable, dans l'état actuel de la Physique, de la Mécanique et de l'Analyse.

La *Balistique Extérieure* étudie le mouvement, dans l'air, de certains corps solides — les projectiles de l'Artillerie — qui jouissent de propriétés mécaniques spéciales, grâce auxquelles le problème se simplifie notablement et devient accessible au calcul. Les simplifications qu'on apporte ainsi à l'énoncé du problème général constituent les hypothèses qui permettent de ramener l'étude d'un phénomène naturel très complexe à une question de Mécanique pure et d'établir, sur des bases logiques, la *Balistique Extérieure rationnelle*.

Nous devons donc, tout d'abord, énumérer les hypothèses nécessaires au développement de cette science, qui met en présence : la *Terre*, l'*Atmosphère* et le *Projectile*.

**2. La Terre.** — 1° On suppose d'abord, dans l'étude du mouvement des projectiles sur les trajectoires usuelles, limitées, dans les deux sens, à la surface de la Terre, que celle-ci est *plane* et *immobile*.

La première hypothèse, forme *plane* de la Terre, peut être admise, parce que la longueur des trajectoires (portée 150<sup>km</sup>, au plus, pour les plus longues exceptionnellement réalisables jusqu'à ce jour) est très petite relativement au rayon du globe terrestre (6370<sup>km</sup>). L'erreur produite sur la portée par cette très faible courbure ne pouvant être que

très petite, relativement à la portée elle-même, on est conduit à la négliger, en première approximation, tout au moins, quitte à donner le moyen de l'évaluer en deuxième approximation.

L'*immobilité* de la Terre est la deuxième hypothèse. La rotation de la Terre influe sur les trajectoires des projectiles; mais, cette influence, quand on la traduit en nombres, apparaît comme très faible. On pourra donc, encore, admettre tout d'abord l'hypothèse de l'*immobilité* de la Terre, et, plus tard, dans une deuxième approximation, on donnera le calcul de l'erreur ainsi consentie.

2° La Terre, par son attraction, donne naissance à l'une des deux forces principales qui agissent sur le projectile, le *poids*. Dans l'étude du mouvement des projectiles, on suppose d'abord que la *gravité est constante en grandeur et en direction*.

On sait que ces deux hypothèses ne s'appliquent légitimement, et à la limite, qu'à une petite étendue autour d'un point du globe; en réalité, la gravité varie, en grandeur, suivant l'*altitude* et sa direction passe, à peu près, par le centre de la Terre. Elle varie aussi avec la *latitude* du lieu où se fait le tir.

La petitesse de nos trajectoires actuelles, relativement aux dimensions du globe, autorise à admettre, en première approximation, la constance de la gravité, en *grandeur* et en *direction*. Une seconde approximation permettra d'évaluer l'importance de l'erreur introduite par ces hypothèses.

3. L'*Atmosphère*. — La Balistique traitera tout d'abord le cas le plus simple, ce qui conduit évidemment à supposer que l'air où se meut le projectile est un milieu *homogène, et immobile*.

En réalité, la *densité* de l'air et la *résistance*, qui en est une fonction, varient avec l'*altitude*. Or, à cause du peu d'étendue en hauteur, de beaucoup des trajectoires utilisées par l'Artillerie, la variation de la densité est très souvent assez faible, de l'origine au sommet. Il en résulte qu'en première approximation, l'hypothèse de la *densité constante* pourra être admise, et qu'on pourra calculer, comme deuxième approximation, le terme correctif en général petit, dû à la variation de la densité de l'air avec l'*altitude*.

Pour les trajectoires tirées sous de très grands angles de projection, avec une grande vitesse initiale, cette méthode d'approximation successive pourra être insuffisante et le problème balistique devra être résolu

dans toute sa généralité, en introduisant la loi réelle de la résistance de l'air en fonction de la vitesse et de l'altitude.

L'hypothèse de l'immobilité de l'air représentera le cas normal pour lequel la trajectoire doit être calculée : le *vent atmosphérique* est un phénomène accidentel dont les effets seront, en général, très faibles relativement aux dimensions de la trajectoire en air calme, à cause de la petitesse ordinaire de la vitesse du vent, comparée à la vitesse dont est animé le boulet. L'effet du vent sera donc calculé comme une seconde approximation.

**4. Le projectile.** - Un projectile qui se meut dans un milieu résistant est sollicité par deux systèmes de forces : par la *pesanteur*, qui agit sur toutes ses particules, et par la *résistance*, qui s'exerce sur tous les points de sa surface.

La Mécanique rationnelle énonce, dans ce cas, le théorème suivant : *Le centre de gravité d'un corps solide se meut comme si toute la masse était concentrée en ce point, et comme si toutes les forces extérieures y étaient transportées parallèlement à elles-mêmes.*

La Balistique devra donc considérer un point matériel de masse égale à celle du projectile, auquel serait appliquée la résultante, à chaque instant, des deux forces extérieures, la *pesanteur* et la *résistance de l'air*.

Si l'on considère des *projectiles sphériques*, lancés sans rotation, dont le centre de gravité coïncide avec le centre de figure, ou des *projectiles oblongs* qui, par quelque moyen de stabilisation, seraient assujettis à se mouvoir rigoureusement dans la direction de leur axe, la résistance de l'air, par une raison évidente de symétrie, se réduit à une force unique, dirigée en sens inverse du mouvement de translation. L'expérience montre que, dans ce cas, la résistance ne dépend, pour une valeur donnée de la densité du milieu, que de la vitesse de translation.

On dit alors que la résistance est *tangentielle*.

Dans le cas général du mouvement d'un mobile de forme quelconque, lancé arbitrairement dans l'air, la résistance varie à chaque instant, d'abord avec la vitesse du mobile, puis avec la façon dont il présente sa surface à l'air. La résistance est donc fonction (en grandeur et en direction) de la position même du mobile sur sa trajectoire et de la vitesse : elle n'est plus tangentielle.

Les *projectiles oblongs*, lancés par les canons de l'artillerie moderne,



prennent, sous l'action des rayures, un mouvement rapide de rotation autour de leur axe. Dans ces conditions, nécessaires pour assurer la stabilité du projectile sur sa trajectoire, l'hypothèse d'une résistance tangentielle n'est pas absolument exacte. L'axe de figure n'est pas l'axe de rotation, et ni l'un ni l'autre ne peuvent rester, rigoureusement, dirigés suivant la tangente à la trajectoire.

La résistance de l'air ne se réduit donc pas à une force unique, mais à une force et à un couple; elle ne peut être rigoureusement tangentielle.

Le phénomène de la *dérivation* des projectiles oblongs résulte, justement, de la non-coïncidence de l'axe de figure et de la tangente à la trajectoire. Or l'expérience montre que la dérivation n'éloigne le point de chute du plan de projection que d'une quantité qui est toujours très faible par rapport à la portée; d'autre part, l'étude théorique du phénomène, d'accord avec l'expérience, indique que, dans le cas d'un projectile animé d'une grande vitesse de rotation, l'écart entre l'axe de figure et la tangente reste, en général, très petit. Lorsqu'il n'en est pas ainsi, c'est que le projectile est défectueux ou que le canon présente quelque imperfection : la tenue balistique du projectile sur sa trajectoire n'est plus assurée. On doit chercher à améliorer les propriétés balistiques de l'arme. Les projectiles de tenue défectueuse restent donc en dehors de ceux que la Balistique peut espérer atteindre dans ses théories.

Elle peut cependant éclairer assez les principales circonstances du mouvement de ces projectiles pour servir de guide, dans la pratique, aux recherches d'amélioration de leur tenue dans l'air.

Pour tous les projectiles susceptibles d'un bon service balistique, la force déviatrice qui est appliquée aux projectiles, et qui produit la dérivation, est donc toujours très faible par rapport à la force principale qui est la résistance tangentielle. On peut, par suite, négliger cette force déviatrice en première approximation, tout au moins, et considérer, indépendamment l'un de l'autre, le mouvement principal dû à la seule résistance tangentielle, et le mouvement *perturbateur* dû à la force déviatrice.

**5. Problèmes balistiques principal et secondaires.** -- Les considérations qui viennent d'être développées conduisent à une simplification très importante dans l'étude de la Balistique Extérieure rationnelle. Elles autorisent, en effet, la division du problème général en deux autres problèmes de caractères bien différents : l'étude du mouvement

*principal*, dû à l'action simultanée de deux forces prépondérantes, et l'étude des *perturbations*, dues à un grand nombre de causes de faible action.

Le *problème balistique principal* s'énonce alors ainsi :

*Étudier le mouvement d'un point matériel pesant dans un milieu en repos, de densité constante, qui lui oppose une résistance tangentielle, fonction de la vitesse. La Terre est supposée plane et immobile; la gravité est constante en grandeur et en direction.*

Le mouvement du projectile étant supposé connu par la solution du problème balistique principal, il y aura lieu d'étudier ensuite les modifications que les hypothèses simplificatives, qui ont été faites précédemment, apportent à la trajectoire véritable.

Les termes correctifs qui s'introduiront ainsi seront, en général, très petits; d'après un principe connu, on pourra les calculer séparément, et leur somme donnera la correction totale à apporter à la trajectoire principale.

On aura ainsi une série de *problèmes balistiques secondaires*, qui seront classés et étudiés d'après les causes qui leur donnent naissance, en distinguant l'influence de l'*Atmosphère*, de la *Terre* et du *Projectile*.





---

# I.

## PROBLÈME BALISTIQUE PRINCIPAL.

---

### CHAPITRE PRÉLIMINAIRE.

#### LES BASES DE LA BALISTIQUE EXTÉRIEURE RATIONNELLE.

---

##### I. — LOIS DE LA RÉSISTANCE DE L'AIR.

6. **Lois expérimentales.** — La *résistance de l'air* est la seule force inconnue qui figure dans l'énoncé du problème balistique principal (§). L'étude théorique des lois de cette résistance est encore peu avancée et la partie de la Physique mathématique qui s'en occupe est encore loin de pouvoir rendre compte des faits expérimentaux. Aussi est-ce presque à l'expérience seule que les artilleurs sont encore obligés de demander la détermination des lois de la résistance et les valeurs numériques nécessaires pour l'application pratique des théories de la Balistique.

Cette recherche constitue alors un problème de Balistique expérimentale dont il ne sera pas question ici.

Faisons simplement connaître les trois lois principales que l'expérience a permis d'établir :

*La résistance de l'air est : 1° proportionnelle à la densité de l'air ; 2° proportionnelle à la section droite du projectile ; 3° pour des projectiles peu différents de figure, elle est susceptible d'être exprimée par la formule  $iF(v)$ , où  $i$  est un coefficient indépendant de la vitesse, dépendant de la forme du projectile, et  $F(v)$  une même fonction de la vitesse pour tous ces projectiles.*

7. **Expression des lois de la résistance.** — La *résistance de l'air*, c'est-à-dire la force  $R$ , en *kilogrammes*, qui s'oppose au mouvement

du projectile, s'écrira, d'après les trois lois précédentes :

$$\mathcal{R} = i\Delta \frac{\pi a^2}{4} F_1(v),$$

formule où  $\Delta$  est le *poids du mètre cube d'air*, en kilogrammes (nombre proportionnel à la densité de l'air),  $a$  le *diamètre du projectile* (calibre), en mètres,  $i$  l'*indice de forme* du projectile.

L'accélération  $\mathfrak{A}$ , que cette force  $\mathcal{R}$  imprime à un projectile de masse  $m$ , a pour expression

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathcal{R}}{m} = \frac{g}{p} \mathcal{R}$$

( $p$  étant le *poids* du projectile, en kilogrammes, et  $g$  l'*accélération de la pesanteur*).

On a donc

$$\mathfrak{A} = i\Delta \frac{a^2}{p} \left[ \frac{\pi}{4} g F_1(v) \right].$$

On suppose, pour l'établissement des tables, que le facteur constant  $\frac{\pi}{4} g$  est incorporé à la fonction de résistance, qu'on désigne alors par la notation  $F(v)$ . On a donc

$$\mathfrak{A} = c F(v),$$

en posant

$$c = i\Delta \frac{a^2}{p}.$$

Le nombre  $c$  est le *coefficient balistique* du projectile; le produit  $cF(v)$ , ou souvent, par abréviation,  $cF$ , est une *accélération*, immédiatement comparable à la *gravité*  $g$ , et exprimée en mètres-seconde.

*Remarques.* — 1° On dénomme souvent l'accélération  $\mathfrak{A}$  la *contre-accélération* de la résistance de l'air, et, parfois, par traduction littérale des auteurs italiens, *retardation* ;

2° Siacci et, à son exemple, beaucoup de balisticiens emploient, au lieu de  $c$ , un paramètre

$$C = \frac{1}{1000c},$$

qui est dit le *coefficient balistique réduit* du projectile;

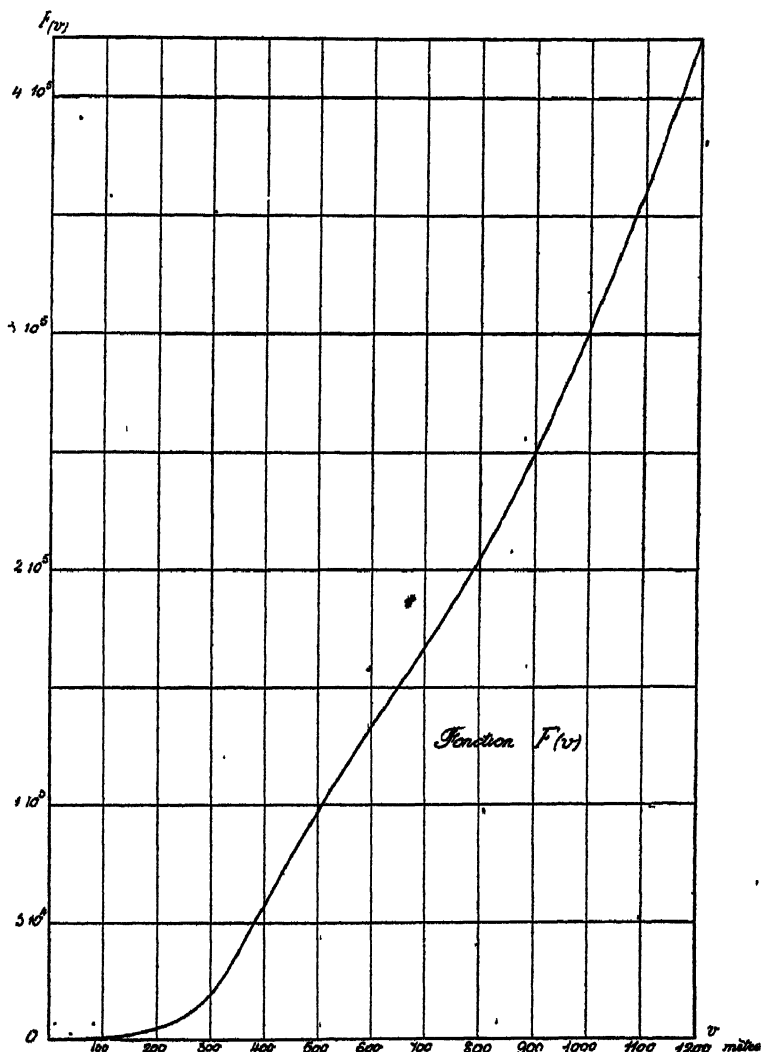
3° Le coefficient balistique  $c$  peut varier, dans les applications balistiques, depuis 0,010 (balle sphérique de revolver,  $i=1$ ,  $a=0^m,008$ ,  $p=0^{kg},008$ ) jusqu'à 0,00007 (canon de bord,  $i=0,30$ ,  $a=0^m,52$ ,  $p=1500^{kg}$ ) :

$$10^6 c = 10000, \quad 10^6 c = 70.$$

On a :  $c = 0$ , dans le vide ;  $c = \infty$ , pour un grain de poussière en suspension dans l'air.

8. **Fonctions  $F(v)$  et  $f(v)$ .** — La fonction  $F(v)$  augmentant très vite avec  $v$ , sa représentation graphique ne fait pas saisir aisément les lois de

Fig. 1.



sa variation (fig. 1). Aussi compare-t-on souvent la fonction  $F(v)$  à des fonctions monomes,  $v$ ,  $v^2$ ,  $v^3$ , ou  $v^4$ . En général, on considère la fonc-

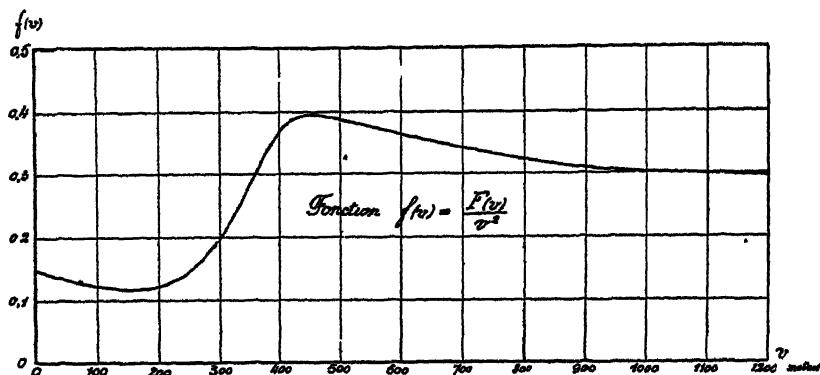
tion  $f(v)$  telle que

$$f(v) = \frac{F(v)}{v^2}.$$

Les expériences entreprises au polygone de l'Artillerie navale, à Gâvre, poursuivies pendant de très nombreuses années et utilisant plusieurs milliers de coups de canon, ont permis de déterminer la forme de la courbe  $f(v)$  pour les projectiles ogivaux de la Marine française. Elle est figurée ci-dessous (*fig. 2*) (*voir t. IV, 4<sup>e</sup> Partie*).

✱

Fig. 2.



Il y a, d'ailleurs, un accord très satisfaisant non seulement de la forme générale, mais même des valeurs numériques des diverses courbes expérimentales de la fonction  $f(v)$  qui ont été établies par les artilleries des différents pays militaires.

## II. — RÔLE DE LA LOI DE RÉSISTANCE DANS LA SOLUTION DU PROBLÈME BALISTIQUE.

9. **Les lois partielles de résistance.** — En considérant la forme de la courbe des  $f(v)$  (*fig. 2*), on peut se rendre compte des interprétations successives qui, à mesure que les vitesses initiales des canons augmentaient, ont dû être données des lois de la résistance de l'air, de la progression des essais tentés pour résoudre le problème balistique en spécifiant la forme de la fonction  $F(v)$ , des raisons de leur succès momentané et des causes de leur insuffisance finale. Cet examen résume, dans un certain sens, toute une face de l'histoire de la Balistique Extérieure.

Il s'agissait, pour les balisticiens, de trouver, pour représenter la fonction  $F(v)$ , une forme assez simple pour permettre la résolution analytique du problème balistique, tout en ne s'écartant pas trop de la loi de résistance véritable.

1° Tant qu'il ne s'est agi que des vitesses très faibles, que, dans l'ancienne artillerie, on imprimait aux bombes, vitesses variant entre 75<sup>m</sup> et 250<sup>m</sup> environ, la *loi du carré* (ou quadratique)  $F(v) = B_1 v^2$ , que, d'ailleurs, depuis Newton, beaucoup de balisticiens regardaient comme rigoureuse, a pu paraître bien suffisamment exacte. C'est sur cette loi qu'Euler, Borda, Français, etc., ont établi les premières théories balistiques. La courbe des  $f(v)$  présentant un minimum dans la région des vitesses utilisées, la loi quadratique peut être considérée comme satisfaisante.

2° Pour les vitesses plus grandes, celles des canons lisses, allant jusqu'à 450<sup>m</sup> environ, le général Didion, mettant à profit quelques déterminations de la résistance de l'air au moyen du pendule balistique, remarquait une augmentation plus rapide de la résistance avec la vitesse que celle qu'indiquait la loi quadratique.

A la courbe des  $f(v)$ , le général Didion substitua une droite inclinée sur l'axe des  $v$ , en posant

$$f(v) = B_1 + B_2 v,$$

c'est-à-dire

$$F(v) = B_1 v^2 + B_2 v^3.$$

3° L'interprétation d'expériences du même genre conduisit le colonel de Saint-Robert et le général Mayewski à prendre pour  $f(v)$  la parabole

$$f(v) = B_1 + B_2 v^2,$$

c'est-à-dire

$$F(v) = B_1 v^2 + B_2 v^4.$$

4° Bashforth, qui utilisa un chronographe électrique, prit, plus simplement, une droite passant par l'origine, adoptant ainsi la loi *cubique*

$$F(v) = B_1 v^3.$$

5° Le capitaine Piton-Bressant remplaça la courbe des  $f(v)$ , dont l'ascension est si rapide entre 250<sup>m</sup> et 500<sup>m</sup>, par une parabole du second degré à axe vertical, ayant son sommet à l'origine. Cette représentation revient à adopter la loi *biquadratique*

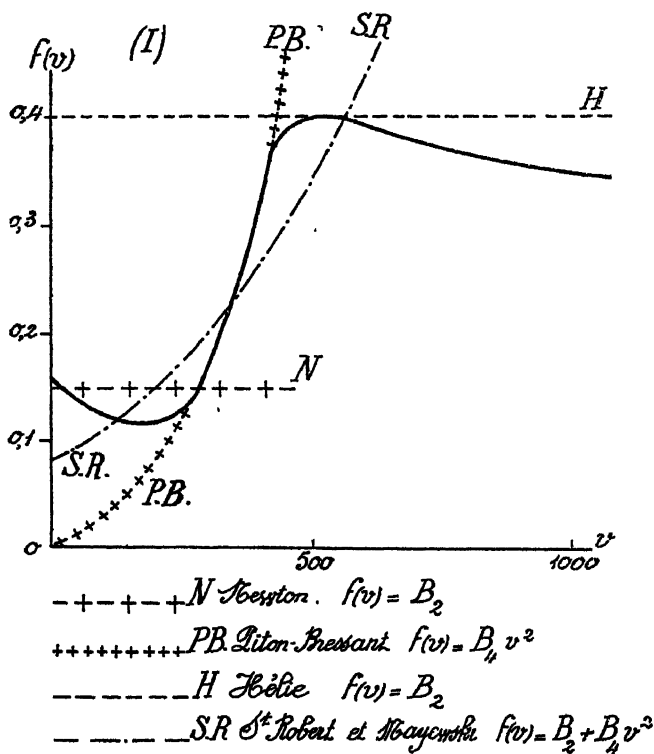
$$F(v) = B_1 v^4.$$

Par une heureuse fortune, il arrive que la loi biquadratique, portée



dans les équations différentielles du mouvement, permet de les intégrer, à l'aide de quelques approximations, sous une forme qui présente le maximum de simplicité. Toute une théorie balistique et de considé-

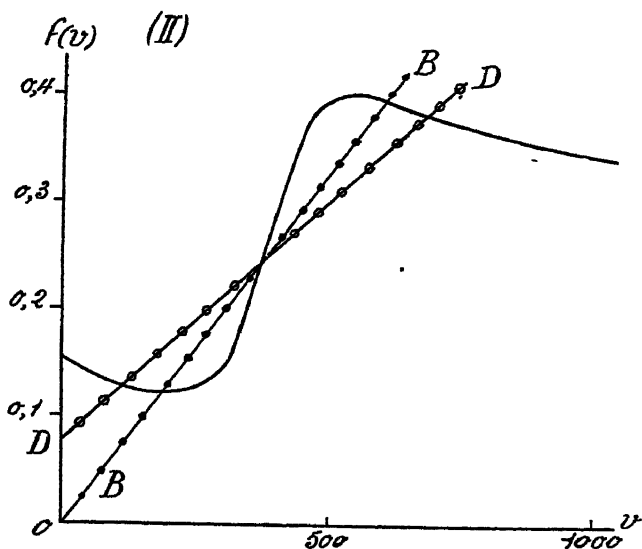
Fig 3.



rables travaux d'application pratique ont pris cette loi de Piton-Bressant comme base (Hélie, général Zaboudski, etc.). Mais l'application de cette loi au delà de 500<sup>m</sup> cesse d'être logique et perd toute signification physique.

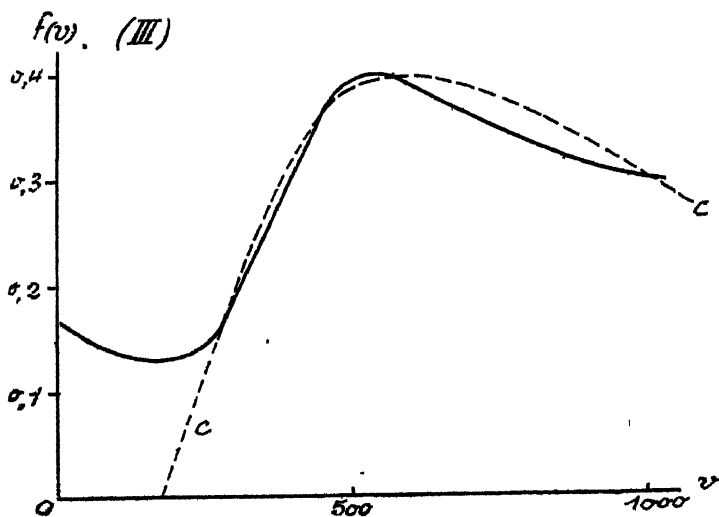
6° Si, au contraire, on recherche une représentation simple de la courbe  $f(v)$  pour les hautes vitesses en sacrifiant les petites, on est conduit avec le commandant Chapel et d'autres balisticiens (Hojel, colonel Vallier) à prendre, pour  $F(v)$ , la forme linéaire  $(B_0 + B_1 v)$  et, par suite, pour  $f(v)$ , l'hyperbole cubique  $f(v) = \frac{B_0 + B_1 v}{v^2}$  ( $B_0$  est négatif dans la formule de Chapel). On peut encore, avec le commandant Batailler, prendre, dans les mêmes régions de vitesse,

$$F(v) = \sqrt{M v^{\frac{4}{3}} (v^{\frac{4}{3}} - N)}.$$



..... B Bashforth  $f(v) = B_3 v$

..... D. Didion  $f(v) = B_2 + B_3 v$



----- C Chapel  $f(v) = \frac{B_0 + B_1 v}{v^2}$

**10. Bases réelles du problème balistique.** — Cette façon d'envisager la solution du problème balistique en s'imposant la représentation, sous une forme simple, d'une loi très compliquée, ne peut évidemment conduire à une théorie présentant quelque généralité. En décomposant ainsi, en tranches, la loi de résistance, on n'obtiendra évidemment que des solutions partielles, ne s'appliquant qu'entre des limites déterminées.

Il n'y aura aucune unité de méthodes ni de formules dans ces problèmes particuliers, et l'application en sera même des plus délicates, dans la pratique, où les tirs qu'on veut étudier sortiront souvent des limites que l'on a tracées d'avance à l'emploi de la théorie.

Si ces modes de représentation ont eu leur utilité à leur heure, la manière dont on envisage, actuellement, la solution du problème balistique leur a fait perdre une partie de leur intérêt, en les rangeant tous comme des cas particuliers de la solution générale.

Les équations différentielles du mouvement du projectile s'établissent, évidemment, en laissant à la résistance la forme générale et implicite  $F(v)$ . La solution vraiment rationnelle et générale du problème balistique, qui consiste dans l'intégration de ces équations différentielles, devrait donc conserver cette indétermination de la fonction  $F(v)$  jusque dans les formules d'application. Le problème devrait être résolu, en lui-même, par des procédés généraux, et non à l'aide des artifices analytiques que peut permettre le choix d'une forme explicite de la fonction  $F(v)$ .

La solution devrait pouvoir s'appliquer identiquement, non seulement à la loi particulière de résistance qui convient aux projectiles en usage à une certaine époque, dans une certaine Artillerie, mais à une fonction quelconque exprimant la résistance. On aurait alors une solution générale du problème mécanique posé, solution dans laquelle il suffirait d'introduire, pour les applications numériques, comme cas particulier, pour ainsi dire, telle loi de résistance de l'air que l'on voudra.

On peut dire que cette manière d'envisager, par une vue d'ensemble, le problème balistique, jointe à la solution approchée qui a pu être donnée dans certains cas, très intéressants d'ailleurs pour la pratique, constitue un des progrès les plus considérables qui aient été faits en Balistique. Le mérite en revient, pour la plus grande partie, à deux savants artilleurs italiens, le colonel de Saint-Robert et le colonel Siacci, qui ont su généraliser heureusement des méthodes déjà utilisées dans des cas particuliers par les balisticiens français : Borda, le capitaine Piton-Bressant et le général Didion.

A l'heure actuelle, il est possible d'élargir la même idée et de la développer sur des bases rigoureuses, de manière à lui faire embrasser la Balistique Extérieure rationnelle tout entière.

**11. Sur la généralité de la Balistique Extérieure rationnelle.** — Il importe beaucoup de remarquer que la science de la Balistique Extérieure, si l'on peut l'édifier, ainsi qu'il vient d'être exposé, sur le principe de la conservation de la fonction  $F(v)$ , devient, en fait, *indépendante des lois de la résistance de l'air*, énoncées précédemment (6). Elle suppose, simplement, que cette résistance est *tangentielle et fonction de la vitesse  $v$* .

Les lois expérimentales montrent alors seulement comment on pourra passer, pratiquement, d'un projectile à un autre différant de formes et de dimensions pour l'étude de la trajectoire du second quand on connaîtra celle du premier, et comment on utilisera, par suite, pour un grand nombre de projectiles, les mêmes tables numériques, calculées une fois pour toutes et issues d'une même fonction  $F(v)$ .

On est donc en droit de dire que les lois expérimentales de la résistance de l'air pourraient être complètement bouleversées, sans que les théories de la Balistique Extérieure fussent, en quoi que ce soit, modifiées.

Rien ne serait changé, par exemple, aux théories balistiques, si l'expérience montrait que la résistance est une fonction quelconque du diamètre du projectile, une fonction quelconque de la densité de l'air ou de la température, ou que l'indice de forme  $i$  est variable avec la vitesse. Ces lois obligeraient seulement à calculer des tables numériques plus nombreuses. Si les lois expérimentales énoncées (6) pouvaient cependant être prises comme première approximation, les mêmes tables serviraient pour tous les projectiles; il s'introduirait alors un certain nombre de termes secondaires, qui permettraient d'obtenir la solution complète du problème.

C'est cette généralité et cette indépendance quasi complète de la théorie et des lois expérimentales qui font que la Balistique Extérieure mérite, au plus haut point, le nom de *rationnelle*, que nous lui avons donné dans cet Ouvrage.

**12. Intérêt de l'étude des lois simples.** — Il n'est pas inutile cependant d'étudier, avec soin et détail, les problèmes particuliers définis par une loi simple de résistance. Ils présentent d'abord une importance historique considérable; leur connaissance est nécessaire pour lire les travaux

des balisticiens et pour comprendre les rapports des Commissions d'expériences. D'autre part, certaines questions, inabordables par une théorie générale, admettent, dans des cas particuliers, une solution complète qui peut déjà donner des résultats approchés, d'une application assez étendue et d'une généralisation possible. Ils sont, enfin, très propres à faire pénétrer intimement dans la connaissance des propriétés, souvent délicates, du mouvement du projectile dans l'air.

Parmi les lois simples, les plus importantes à considérer sont les lois dites *monomes*, de la forme  $F(v) = B_n v^n$ . On peut imaginer la courbe des  $F(v)$  partagée en zones telles que, sur chacune, l'exposant  $n$  n'ait que de faibles variations. Le problème balistique étant supposé résolu pour une valeur quelconque de  $n$  pourra, évidemment, être étendu, pour le calcul pratique d'une trajectoire quelconque, à une fonction  $F(v)$  quelconque, à condition de diviser la trajectoire en arcs d'amplitude convenable.

**13. Degré de la résistance.** — Dans toute l'étude du problème balistique, on est naturellement amené à prendre, comme référence de la fonction  $F(v)$ , la fonction monome  $B_n v^n$ , qu'on peut soit lui substituer en un point, soit assigner comme limite de ses variations.

La fonction  $F(v)$  et la parabole  $B_n v^n$  sont tangentes au point  $v$ , et l'on a, pour déterminer  $B_n$  et  $n$ , les deux relations

$$F(v) = B_n v^n, \quad F'(v) = n B_n v^{n-1};$$

d'où

$$n = \frac{v F'(v)}{F(v)}.$$

L'exposant  $n$  est dit le *degré de la résistance au point  $v$* .

Sur l'ensemble de la courbe  $F(v)$ , le degré de la résistance varie, en général, en chaque point. Si l'on représente, sur le plan, une courbe quelconque  $F(v)$ , en fonction de  $v$ , la valeur  $n = 1$  correspond au point dont la tangente passe par l'origine. Quand la tangente coupe l'axe des  $v$  dans la région positive,  $n$  est  $> 1$ ; dans la région négative, on a  $n < 1$ .

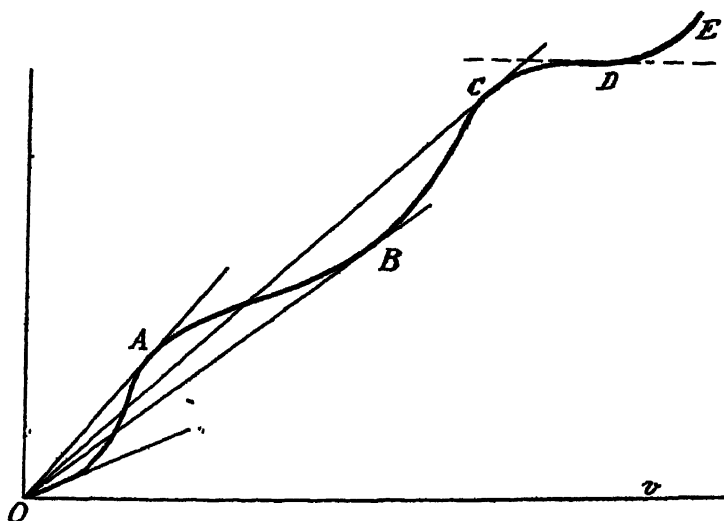
Ainsi, sur la figure 4, on a :

Arcs.....	OA.	A.	AB.	B.	BC.	C.	CD.	D.	DE.
$n$ .....	$> 1$	$= 1$	$< 1$	$= 1$	$> 1$	$= 1$	$< 1$	$= 0$	$> 1$

En Balistique, on ne considère que le cas de  $n \geq 0$ . Le cas de  $n < 0$

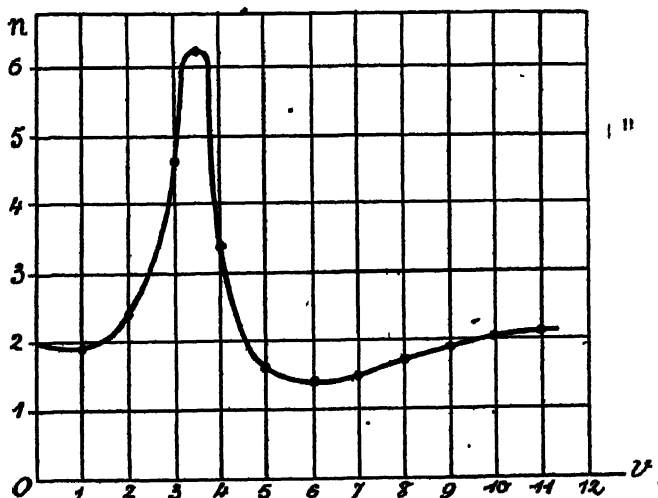
correspond, en effet, à l'hypothèse d'une résistance décroissant quand la vitesse croît. Ainsi donc, on aura toujours  $F(v) \geq 0$ .

Fig. 4.



D'après les lois expérimentales de la résistance, le degré  $n$  de la résis-

Fig. 5.



tance varie entre  $n=1,5$  (pour  $v=700^m$ ) et  $n=6,2$  (pour  $v=330^m$ ) (fig. 5).

Dans les discussions générales des propriétés des trajectoires, on désignera toujours par  $n$  le degré de la résistance en un point courant de la courbe  $F(v)$ , par  $n_\infty$  le degré correspondant à  $v = \infty$ , et par  $n_0$  le degré correspondant à  $v = 0$ .

Quand on emploie la loi  $F(v) = B_n v^n$ , soit localisée à une courte région, soit étendue à toute une trajectoire, on caractérise souvent cette loi, au lieu de résistance monome, du nom de *résistance ennième*.

### III. — DIVISIONS DU PROBLÈME BALISTIQUE PRINCIPAL.

**14. Les trois parties du problème principal.** — La solution rigoureuse et générale du problème balistique principal étant impossible, des théories partielles, embrassant tel ou tel cas pratique et répondant à telle ou telle simplification analytique, doivent être établies. Mais, avant ces théories et les dominant pour ainsi dire, doit se trouver une discussion d'ensemble, contenant tout ce qu'on peut démontrer de général sur le problème balistique, pris dans toute sa rigueur et étudié d'après les équations différentielles du mouvement.

Le problème balistique principal fait intervenir, en un point de la trajectoire, deux forces [la *gravité*  $g$  et l'*accélération de la résistance de l'air*  $\delta = cF(v)$ ] et une direction (l'*inclinaison*  $\tau$  de la tangente à la trajectoire).

La considération de ces trois éléments suffit, évidemment, pour établir les équations différentielles du mouvement. Or, le problème balistique se simplifiera notablement quand l'influence de l'un ou de l'autre de ces éléments disparaîtra.

La première Partie du problème balistique principal sera donc intitulée : *Les cas-limites du problème balistique*; ils sont au nombre de trois :

- 1°  $cF(v) = 0$ . — *Mouvement dans le vide*;
- 2°  $g = 0$ . — *Mouvement rectiligne dans un milieu résistant*;
- 3°  $\tau = \pm \frac{\pi}{2}$ . — *Mouvement vertical dans un milieu résistant*.

Ce dernier problème admettra deux subdivisions correspondant l'une au mouvement *ascendant* ( $\tau = +\frac{\pi}{2}$ ), et l'autre au mouvement *descendant* ( $\tau = -\frac{\pi}{2}$ ).

Les deux *Livres* dont se compose cette première Partie traiteront donc :

le Livre I, de la *Balistique du vide*;  
le Livre II, de la *Balistique rectiligne*.

La deuxième Partie du problème balistique principal est intitulée *Les Théorèmes généraux de la Balistique*, et divisée en deux Livres :

Le Livre III, sous le titre de *Les propriétés générales des trajectoires atmosphériques*, traite des théorèmes que l'on peut établir par la seule discussion des équations différentielles ;

Le Livre IV indique la position du problème balistique vis-à-vis de l'Analyse, montre les difficultés auxquelles on doit s'attendre si l'on en recherche la solution rigoureuse, et fait connaître les résultats acquis.

La troisième Partie traite des *théories balistiques*. Elle est divisée en quatre Livres :

Le Livre V est consacré à l'étude des solutions qui, dans le cas d'une *résistance monome*,  $F(v) = B_n v^n$ , ont été proposées pour résoudre le problème balistique ;

Le Livre VI traite du *tir de plein fouet* et donne la solution complète de ce problème, extrêmement important pour les applications pratiques ;

Le Livre VII étudie les autres *théories partielles*, que la Balistique permet d'établir, suivant la région de la trajectoire qu'on se propose d'étudier ;

Le Livre VIII expose les méthodes de *calcul des trajectoires par arcs successifs*, dont l'emploi s'impose dans un très grand nombre de questions pratiques.

**13. Division générale du Traité.** -- En résumé, la partie du Traité actuel consacré à la *Balistique Extérieure rationnelle*, se divise ainsi qu'il suit :

#### 1. PROBLÈME BALISTIQUE PRINCIPAL.

**PREMIÈRE PARTIE. — Les cas limites du problème balistique :**

LIVRE I : *La Balistique parabolique* ;

LIVRE II : *La Balistique rectiligne*.

**DEUXIÈME PARTIE. — Les théorèmes généraux de la Balistique :**

LIVRE III : *Les propriétés générales des trajectoires atmosphériques* ;

LIVRE IV : *Le Problème balistique et l'Analyse*.



**TROISIÈME PARTIE. — Les théories balistiques :**

LIVRE V : *La Résistance monome ;*

LIVRE VI : *Le Tir de Plein Fouet ;*

LIVRE VII : *Les Séries balistiques ;*

LIVRE VIII : *Le Calcul des trajectoires par arcs successifs.*

**2. — PROBLÈMES BALISTIQUES SECONDAIRES.**

LIVRE IX : *La Théorie générale des perturbations balistiques ;*

LIVRE X : *L'Atmosphère ;*

LIVRE XI : *La Terre ;*

LIVRE XII : *Le Projectile.*



---

# PREMIÈRE PARTIE.

## LES CAS-LIMITES DU PROBLÈME BALISTIQUE.

---

### LIVRE I.

#### LA BALISTIQUE PARABOLIQUE.

---

### CHAPITRE I.

#### MOUVEMENT DES PROJECTILES DANS LE VIDE.

---

##### I. — ÉQUATIONS DU MOUVEMENT PARABOLIQUE.

16. Sur la théorie du mouvement parabolique. — La théorie balistique de *Galilée*, qui donna aux artilleurs les premières règles logiques pour la conduite du tir, resta très longtemps en usage. Grâce à la perfection à laquelle cette théorie a pu être amenée, les procédés et les formules auxquels elle conduit, pour la solution pratique des problèmes de tir, ont servi de modèles dans toutes les recherches ultérieures sur la Balistique dans l'air.

Aussi, les théories les plus récentes, par la forme analytique qu'elles affectent, par les variables qu'elles considèrent, par les notations et la terminologie qu'elles emploient, conservent-elles l'empreinte profonde que la théorie du vide a imprimée à toute la Balistique.

Le problème du mouvement des projectiles dans le vide est, actuellement, dans ses parties principales, du domaine de l'enseignement élémentaire de la Mécanique. Il constitue, pour l'artilleur moderne, un cas-limite, dont les formules donnent déjà une certaine approximation pour le tir des mortiers, et fournissent, en tous cas, le premier terme de la série qui représente ce genre de tir. Elles donnent également le premier terme de la série développée autour d'un point quelconque, pour tout petit arc de trajectoire, quelle que soit la résistance de l'air.

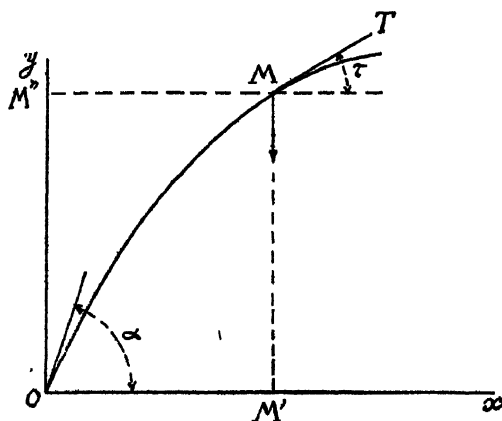
Elles sont, d'autre part, susceptibles, encore aujourd'hui, de très nombreuses applications pratiques.

Il importe donc de donner l'exposé balistique complet de la théorie du mouvement des projectiles dans le vide; on a cherché, ici, à coordonner, sous une forme systématique, les très nombreux travaux qui ont été faits sur ce chapitre de la Balistique.

**17. Équations différentielles du second ordre.** — Dans le vide, une seule force agit sur le projectile, le *poids* qui est appliqué au centre de gravité. Le problème balistique principal suppose cette force constante en grandeur et en direction ( $\delta$ ). Le centre de gravité ne sortira donc jamais du plan qui contient, à un instant quelconque, la direction de la pesanteur et celle de la vitesse acquise. La *trajectoire* est, par suite, une courbe plane contenue dans le plan vertical du premier élément de la trajectoire. Ce plan est le *plan de projection*.

Soit  $O$  la bouche du canon, que nous prendrons comme *origine de la*

Fig. 6.



*trajectoire*. Le mouvement du centre de gravité  $M$  du projectile sera rapporté à deux axes rectangulaires situés dans le plan de projection,  $Ox$  horizontal et  $Oy$  vertical. Le *temps*  $t$  est compté à partir de l'origine  $O$  de la trajectoire.

Puisque la seule force appliquée au centre de gravité agit suivant la verticale, la projection de l'accélération  $g$  de la pesanteur suivant l'axe des  $x$  est nulle, et, suivant l'axe des  $y$ , elle est égale à  $(-g)$ . On a donc les deux équations différentielles du mouvement suivantes :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g.$$

Ces équations s'intègrent facilement sous cette forme.

Ainsi une première intégration donne :

$$\frac{dx}{dt} = k, \quad \frac{dy}{dt} = -gt + k'.$$

On voit que les deux mouvements suivant les axes des  $x$  et des  $y$  sont indépendants l'un de l'autre : le premier, suivant l'axe des  $x$ , est uniforme et de vitesse constamment égale à  $k$  ; le second, suivant l'axe des  $y$ , est uniformément retardé : ce mouvement est celui d'un projectile lancé verticalement avec la vitesse  $k'$ .

On a d'ailleurs, en faisant  $t = 0$ ,

$$k = V_0 \cos \alpha, \quad k' = V_0 \sin \alpha;$$

$V_0$  est la *vitesse initiale* et  $\alpha$  est l'*angle de projection*.

Puis une seconde intégration donnera :

$$x = V_0 t \cos \alpha, \quad y = V_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2.$$

C'est l'équation de la *trajectoire* exprimée à l'aide du paramètre  $t$ , le *temps*.

**18. Les quatre équations différentielles du premier ordre.** -- Afin de rapprocher la forme des expressions des éléments de la trajectoire dans le vide de celle qu'on adoptera pour la solution du problème balistique dans l'air, on transformera les deux équations différentielles du second ordre en quatre équations du premier ordre, de la manière suivante :

Soient, au point M,  $v$  la *vitesse* du projectile et  $\tau$  l'*inclinaison*, sur l'horizontale, de la tangente à la trajectoire.

On a les deux relations

$$\frac{dx}{dt} = v \cos \tau, \quad \frac{dy}{dt} = v \sin \tau$$

Les deux équations différentielles du second ordre deviennent alors

$$\frac{d(v \cos \tau)}{dt} = 0, \quad \frac{d(v \sin \tau)}{dt} = -g,$$

ou, en développant les numérateurs,

$$\cos \tau \frac{dv}{dt} - v \sin \tau \frac{d\tau}{dt} = 0,$$

$$\sin \tau \frac{dv}{dt} + v \cos \tau \frac{d\tau}{dt} = -g.$$

Multipliant la première par  $\sin \tau$ , la seconde par  $\cos \tau$ , et retranchant, il viendra

$$dt = -\frac{v}{g} \frac{d\tau}{\cos \tau}.$$

Dans les expressions de  $dx$  et  $dy$ , remplaçant alors  $dt$  par la valeur ci-dessus et posant  $u = v \cos \tau$ , on obtiendra le système des quatre équations différentielles suivantes, qui sont celles qu'on se proposait d'établir :

$$\begin{aligned} du &= 0, & dx &= -\frac{u^2}{g} \frac{d\tau}{\cos^2 \tau}, \\ dt &= -\frac{u}{g} \frac{d\tau}{\cos^2 \tau}, & dy &= -\frac{u^2}{g} \tan \tau \frac{d\tau}{\cos^2 \tau}. \end{aligned}$$

19. **Formules des éléments d'un point de la trajectoire.** — La première équation :  $du = 0$ , donne  $u = \text{const.}$

Comme, à l'origine, on a  $u_0 = V_0 \cos \alpha$ , la constante est égale à  $V_0 \cos \alpha$ , d'où ce théorème : *La vitesse horizontale se conserve constante dans le vide.*

Remplaçant, alors, dans les trois autres équations différentielles  $u$  par  $u_0$ , et intégrant, il viendra le système suivant, qui résout le problème du mouvement dans le vide, avec la variable  $\tan \tau$  :

$$\begin{aligned} u &= u_0, & x &= \frac{u_0^2}{g} (\tan \alpha - \tan \tau), \\ t &= \frac{u_0}{g} (\tan \alpha - \tan \tau), & y &= \frac{u_0^2}{2g} (\tan^2 \alpha - \tan^2 \tau). \end{aligned}$$

Les variables qui, dans l'étude du mouvement dans le vide, sont susceptibles d'être prises, le plus ordinairement, comme indépendantes pour définir l'extrémité de l'arc, sont  $(\tan \tau, t, x, y)$  et les deux *vitesse*s, *totale*  $v$  et *verticale*  $v = v \sin \tau$ . Les données à l'origine sont prises sous la forme

$$u_0 = V_0 \cos \alpha, \quad w_0 = V_0 \sin \alpha \quad \text{et} \quad \tan \alpha.$$

Des transformations aisées permettent de passer des équations en  $\tan \tau$  ci-dessus à un autre système, ayant, pour variable indépendante, tel ou tel des éléments ci-dessus énumérés. Il existera donc six systèmes de formules, qui sont donnés dans le Tableau qui suit :

TABLEAU DES SIX SYSTÈMES DE FORMULES DE LA TRAJECTOIRE DU VIDE.

I. Variable  $\tan \tau$  :

$$\begin{aligned}\tan \tau &= \quad \quad \quad , \\ t &= \frac{u_0}{g} (\tan \alpha - \tan \tau), \\ x &= \frac{u_0^2}{g} (\tan \alpha - \tan \tau), \\ y &= \frac{u_0^2}{2g} (\tan^2 \alpha - \tan^2 \tau), \\ v &= u_0 \sqrt{1 + \tan^2 \tau}, \\ w &= u_0 \tan \tau.\end{aligned}$$

II. Variable  $t$  :

$$\begin{aligned}\tan \tau &= \tan \alpha - \frac{gt}{u_0}, \\ t &= \quad \quad \quad , \\ x &= u_0 t, \\ y &= u_0 t - \frac{gt^2}{2}, \\ v &= u_0 \sqrt{1 + \left(\tan \alpha - \frac{gt}{u_0}\right)^2}, \\ w &= u_0 - gt.\end{aligned}$$

III. Variable  $x$  :

$$\begin{aligned}\tan \tau &= \tan \alpha - \frac{gx}{u_0^2}, \\ t &= \frac{x}{u_0}, \\ x &= \quad \quad \quad , \\ y &= x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2u_0^2}, \\ v &= u_0 \sqrt{1 + \left(\tan \alpha - \frac{gx}{u_0^2}\right)^2}, \\ w &= u_0 - \frac{gx}{u_0}.\end{aligned}$$

IV. Variable  $y$  :

$$\begin{aligned}\tan \tau &= \pm \frac{1}{u_0} \sqrt{w_0^2 - 2gy}, \\ t &= \frac{1}{g} [w_0 \pm \sqrt{w_0^2 - 2gy}], \\ x &= \frac{u_0}{g} [w_0 \pm \sqrt{w_0^2 - 2gy}], \\ y &= \quad \quad \quad , \\ v &= \sqrt{V_0^2 - 2gy}, \\ w &= \sqrt{w_0^2 - 2gy},\end{aligned}$$

V. Variable  $v$  :

$$\begin{aligned}\tan \tau &= \pm \frac{1}{u_0} \sqrt{v^2 - u_0^2}, \\ t &= \frac{1}{g} [w_0 \pm \sqrt{v^2 - u_0^2}], \\ x &= \frac{u_0}{g} [w_0 \pm \sqrt{v^2 - u_0^2}], \\ y &= \frac{1}{2g} [V_0^2 - v^2], \\ v &= \quad \quad \quad , \\ w &= \sqrt{v^2 - u_0^2}.\end{aligned}$$

VI. Variable  $w$  :

$$\begin{aligned}\tan \tau &= \frac{w}{u_0}, \\ t &= \frac{1}{g} (w_0 - w), \\ x &= \frac{u_0}{g} (w_0 - w), \\ y &= \frac{1}{2g} (w_0^2 - w^2), \\ v &= \sqrt{(u_0^2 + w^2)}, \\ w &= \quad \quad \quad .\end{aligned}$$

On voit que les variables  $y$  et  $v$  introduisent des expressions compli-

quées de radicaux. On aura, au contraire, des formules simples en prenant, par analogie avec  $(\tan \alpha - \tan \tau)$  (système I), comme variable  $(\tan \alpha - \frac{y}{x})$ , ce qui donne le système suivant :

$$(VII) \quad \begin{cases} \tan \tau = \frac{2y}{x} - \tan \alpha, \\ t = \frac{2u_0}{g} \left( \tan \alpha - \frac{y}{x} \right), \\ x = \frac{2u_0^2}{g} \left( \tan \alpha - \frac{y}{x} \right), \end{cases} \quad \begin{cases} v = u_0 \sqrt{1 + \left( \frac{2y}{x} - \tan \alpha \right)^2}, \\ w = u_0 \left( \frac{2y}{x} - \tan \alpha \right). \end{cases}$$

**20. Équations intrinsèques.** — Si l'on projette les forces qui agissent en un point de la trajectoire sur la tangente et la normale en ce point, on sait qu'on obtient les équations différentielles, dites *intrinsèques*, du mouvement.

On aura, sur la tangente,

$$\frac{dv}{dt} = -g \sin \tau,$$

et, sur la normale,

$$\frac{v^2}{r} = -g \cos \tau,$$

$r$  étant le *rayon de courbure* au point considéré.

D'après ces équations, on voit :

1° que  $\frac{dv}{dt}$  s'annule pour  $\tau = 0$  (sommet de la trajectoire); la vitesse  $v$  passe par un minimum, car on a

$$\frac{d^2v}{dt^2} = -g \cos \tau \frac{d\tau}{dt} = g^2 \frac{\cos^3 \tau}{v},$$

c'est-à-dire une quantité positive;

2° que le rayon de courbure

$$r = -\frac{v^2}{g \cos \tau} = -\frac{v^3}{g u_0}$$

est minimum au même point (sommet). On a, pour ce minimum,

$$r_s = -\frac{u_0^2}{g}.$$

**21. Longueur de l'arc  $s$ .** — Donnons, enfin, l'expression de la longueur de l'arc  $s$  de la trajectoire en fonction de l'inclinaison  $\tau$ .

On a

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = -\frac{u^2}{g} \frac{d\tau}{\cos^3 \tau},$$

équation équivalente à  $\frac{v^2}{r} = -g \cos \tau$ , puisque, par définition,  $ds = r d\tau$ .

Cette équation s'intégrera par la formule

$$s = \frac{u_0^2}{g} [\xi_2 \tau - \xi_3 \tau],$$

en posant

$$\xi_2 \tau = \int_0^\tau \frac{d\tau}{\cos^3 \tau} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin \tau}{\cos^2 \tau} + \log \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2} \right) \right].$$

Cette intégrale s'obtient facilement par une intégration par parties, développée ainsi qu'il suit :

$$\begin{aligned} \xi_2 \tau &= \int_0^\tau \frac{d\tau}{\cos^3 \tau} = \frac{1}{\cos \tau} \tan \tau - \int_0^\tau \tan \tau \frac{\sin \tau}{\cos^2 \tau} d\tau = \frac{\sin \tau}{\cos^2 \tau} - \int_0^\tau \frac{\sin^2 \tau}{\cos^3 \tau} d\tau \\ &= \frac{\sin \tau}{\cos^2 \tau} - \int_0^\tau \frac{1 - \cos^2 \tau}{\cos^3 \tau} d\tau = \frac{\sin \tau}{\cos^2 \tau} - \xi_2 \tau + \int_0^\tau \frac{d\tau}{\cos \tau}, \end{aligned}$$

d'où

$$\xi_2 \tau = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin \tau}{\cos^2 \tau} + \int_0^\tau \frac{d\tau}{\cos \tau} \right].$$

Or, on a

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \frac{d\tau}{\cos \tau} &= \int_0^\tau \frac{d\tau}{\sin \left( \frac{\pi}{2} + \tau \right)} = \int_0^\tau \frac{d\tau}{2 \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2} \right) \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2} \right)} \\ &= \int_0^\tau \frac{1}{\tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2} \right)} \frac{d \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2} \right)}{\cos^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2} \right)}. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^\tau \frac{d\tau}{\cos \tau} = \log \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2} \right). \quad \text{C. Q. F. D.}$$

**22. Mouvement vertical.** -- Comme cas particulier des formules du n° 19, supposons que l'angle de projection  $\alpha$  soit égal à  $\left( \pm \frac{\pi}{2} \right)$ .

L'abscisse  $x$  sera constamment nulle. Car on a (II, 3) :  $x = V_0 t \cos \alpha$ , et, si  $\cos \alpha = 0$ , on a :  $x = 0$ , quel que soit  $t$ .

L'inclinaison  $\tau$  sera égale à  $\left( \pm \frac{\pi}{2} \right)$ . Car la relation (I, 3), qui s'écrit  $\cos \tau = \frac{V_0 \cos \alpha}{v}$ , exige que  $\tau = \pm \frac{\pi}{2}$ , si  $\cos \alpha = 0$ .

Il reste donc, comme variables, dans les formules du n° 19,  $y$ ,  $t$ ,  $v$  (ou  $\alpha$ ), les données à l'origine étant 0, 0,  $V_0$  (ou  $v_0$ ).

Les formules qui subsistent dans le Tableau sont alors les suivantes :



Variable  $t$  :

$$y = V_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2, \quad w = V_0 \sin \alpha - g t;$$

Variable  $y$  :

$$t = \frac{1}{g} [V_0 \sin \alpha \pm \sqrt{V_0^2 \sin^2 \alpha - 2gy}], \quad w = \sqrt{V_0^2 \sin^2 \alpha - 2gy}$$

Variable  $w$  :

$$t = \frac{V_0 \sin \alpha - w}{g}, \quad y = \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha - w^2}{2g},$$

Dans ces formules figurent les vitesses verticales  $V_0 \sin \alpha$  et  $w$  qu'il faudra faire égales à  $(+V_0)$  et  $(+v)$  pour le mouvement ascendant ( $\alpha = \tau = +\frac{\pi}{2}$ ) et égales à  $(-V_0)$  et à  $(-v)$  pour le mouvement descendant ( $\alpha = \tau = -\frac{\pi}{2}$ ).

I. — *Mouvement ascendant.*

$$\begin{aligned} y &= V_0 t - \frac{1}{2} g t^2, & w &= V_0 - g t; \\ t &= \frac{1}{g} [V_0 - \sqrt{V_0^2 - 2gy}], & v^2 &= V_0^2 - 2gy; \\ t &= \frac{V_0 - v}{g}, & y &= \frac{V_0^2 - v^2}{2g}, \end{aligned}$$

Le *sommet* ou point culminant de l'ascension correspond à  $w = 0$ , et l'on a

$$T_s = \frac{V_0}{g}, \quad Y_s = \frac{V_0^2}{2g}.$$

La hauteur  $Y_s = \frac{V_0^2}{2g}$  est dite *hauteur due à la vitesse*  $V_0$ , et est désignée par la lettre  $h$ ; on a donc

$$h = \frac{V_0^2}{2g}.$$

II. — *Mouvement descendant.*

$$\begin{aligned} y &= -\left(V_0 t + \frac{1}{2} g t^2\right), & v &= V_0 + g t; \\ t &= -\frac{1}{g} [V_0 - \sqrt{V_0^2 - 2gy}], & v^2 &= V_0^2 - 2gy; \\ t &= \frac{v - V_0}{g}, & y &= \frac{V_0^2 - v^2}{2g}, \end{aligned}$$

Remarquons, dans les deux cas, la formule  $y = \frac{V_0 + v}{2} t$ .

Si la vitesse initiale de chute est nulle, on a

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}gt^2, & t &= \frac{1}{g}\sqrt{-2gy}, & t &= \frac{v}{g}, \\ v &= gt, & v^2 &= -2gy, & y &= -\frac{v^2}{g}. \end{aligned}$$

Dans toutes ces formules, aussi bien pour le mouvement ascendant que pour le mouvement descendant, l'ordonnée  $y$  est comptée positivement de bas en haut.

Lancé avec une vitesse verticale  $V_0$ , de bas et haut, le projectile retombe sur le plan de l'origine au bout d'un temps  $T = \frac{2V_0}{g}$ , et avec une vitesse  $(-V_0)$ .

1<sup>o</sup> PROBLÈMES. — *a. Poussière d'eau.* — Deux points matériels 1 et 2 partent sans vitesse du même point, d'altitude  $H$ , et tombent suivant la loi de la chute dans le vide. Leur écart initial étant  $\zeta_0$ , quel sera leur écart  $\zeta$  à l'altitude 0?

La différence des temps de départ est

$$t_0 = \sqrt{\frac{2\zeta_0}{g}}.$$

Lorsque le premier sera à l'altitude zéro, telle que  $H = \frac{1}{2}gt^2$ , le second sera à l'altitude

$$H_2 = \frac{1}{2}g(t - t_0)^2.$$

Donc

$$\zeta = H - H_2 = \frac{1}{2}g[t^2 - (t - t_0)^2],$$

d'où

$$\zeta = 2\sqrt{H\zeta_0} - \zeta_0.$$

Pour

$$H = 400^m \quad \text{et} \quad \zeta_0 = 0^m, 001,$$

on a

$$\zeta = 0^m, 04.$$

*b. Deux billes parfaitement élastiques* sont placées à des hauteurs différentes sur une même verticale; au même instant, on les abandonne à leur poids; elles tombent sur un plan incliné de  $45^\circ$  à l'horizon, et continuent aussitôt leur route sur un plan horizontal parfaitement poli qui fait suite au plan incliné. Déterminer la distance que les deux billes doivent parcourir sur le plan horizontal avant de se rencontrer (P. Jullien).

Si l'on nomme  $H_1$  et  $H_2$  les hauteurs initiales des deux billes au-dessus du plan horizontal, la distance cherchée sera  $2\sqrt{H_1 H_2}$ . La rencontre a lieu au bout d'un temps  $T_1 = \sqrt{\frac{2H_1}{g}}$ , après la chute de la bille  $H_2$  sur le plan incliné.

c. Deux points pesants sont situés à des hauteurs différentes sur la même verticale ; au même instant, on abandonne le point supérieur à son poids et on lance le point inférieur de bas en haut, avec une vitesse donnée  $V_0$ . Déterminer l'époque et le lieu de rencontre des deux points (P. Jullien).

Soient  $a$  la distance initiale des deux mobiles,  $x$  la distance de leur point de rencontre à la position initiale du mobile supérieur, et  $t$  l'époque de la rencontre comptée à partir de l'instant où le mouvement commence :

On trouve

$$x = \frac{g a^2}{2 V_0^2}, \quad t = \frac{a}{V_0}.$$

d. D'une manière générale, trouver le point de rencontre de deux mobiles pesants lancés verticalement, de deux positions  $A_1$  et  $A_2$ , avec des vitesses initiales  $V_1$  et  $V_2$ , et avec un retard relatif 0. C'est l'intersection de deux paraboles égales.

2° FORMULES DIFFÉRENTIELLES. — Si l'on tire verticalement à une vitesse initiale  $V_0 + \partial V_0$ , on obtient, en différentiant les équations du mouvement ascendant, les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \partial y &= V_0 \partial t + t \partial V_0 - g t \partial t, \\ \partial v &= \partial V_0 - g \partial t; \end{aligned}$$

A vitesse constante ( $\partial v = 0$ ) :

$$\partial t = \frac{\partial V_0}{g}, \quad \partial y = \frac{V_0}{g} \partial V_0; -$$

A temps constant ( $\partial t = 0$ ) :

$$\partial y = t \partial V_0, \quad \partial v = \partial V_0;$$

A altitude constante ( $\partial y = 0$ ) :

$$\partial t = -\frac{t \partial V_0}{V_0 - g t}, \quad \partial v = \frac{V_0}{V_0 - g t} \partial V_0.$$

Au point de chute,  $T = \frac{2V_0}{g}$ , on a

$$\partial T = \frac{2 \partial V_0}{g}, \quad \partial v = -\partial V_0.$$

On remarquera que les deux formules, pour  $\partial y = 0$ , ne sont pas valables pour le *sommet*, leur dénominateur devenant nul.

Il faut, partant de

$$y = V_0 t - \frac{1}{2} g t^2,$$

écrire

$$y + \partial y = (V_0 + \partial V_0)(t + \partial t) - \frac{1}{2} g (t + \partial t)^2$$

ou, pour  $\partial y = 0$ ,

$$\partial t (V_0 - g t) - \frac{1}{2} g \partial t^2 = -(t + \partial t) \partial V_0.$$

Donc, au sommet :

$$\partial T_s = \sqrt{\frac{2T_s}{g}} \partial V_0 = \frac{1}{g} \sqrt{2V_0 \partial V_0}.$$

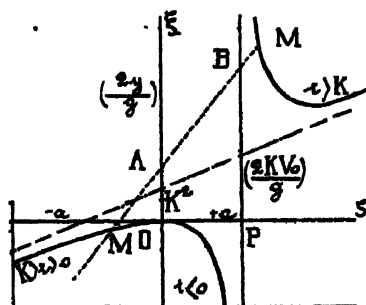
De même, on a

$$\partial V_s = \sqrt{2V_0 \partial V_0}.$$

3° ABAQUE. -- On pourra représenter le mouvement vertical par un abaque en prenant pour coordonnées  $y$  et  $V_0$ . Les courbes isochrones sont des droites tangentes à la parabole  $y = \frac{V_0^2}{2g}$ . Les courbes d'égale vitesse sont des paraboles égales à cette même parabole.

4° NOMOGRAMME A POINTS ALIGNÉS. -- Perpendiculairement à un axe  $O\zeta$ , on porte deux échelles métriques  $\left(\frac{2y}{g}\right)$  et  $\left(\frac{2KV_0}{g}\right)$  parallèles, distantes de  $OP = a$ .

Fig 7.



Démontrer que l'échelle des *temps* est portée par une hyperbole tangente en O à  $O\zeta$  et ayant la droite  $\zeta = a$  pour asymptote. L'alignement AMB résoud le problème.

L'équation de l'hyperbole est

$$a\xi(\zeta - a) = K^2\zeta^2,$$

et l'on a

$$\xi = \frac{Kt^2}{t-K}, \quad \zeta = \frac{at}{t-K}.$$

## II. — TRAJECTOIRE DU VIDE.

**23. Équation de la trajectoire.** — Dans le Tableau des formules générales (19), l'expression de  $y$  en fonction de  $x$  (III, 4) représentera la *trajectoire*. C'est l'équation suivante :

$$y = x \operatorname{tang} \alpha - \frac{g x^2}{2 u_0^2}.$$

La trajectoire est une parabole à axe vertical; la tangente à l'origine a l'inclinaison  $\alpha$ .

Écrivant

$$- \frac{2 u_0^2}{g} y = x^2 - 2 x \frac{u_0^2}{g} \operatorname{tang} \alpha,$$

et ajoutant, de part et d'autre,

$$\left( \frac{u_0^2}{g} \operatorname{tang} \alpha \right)^2,$$

on aura

$$\frac{u_0^2}{g} \left( \frac{u_0^2}{g} \operatorname{tang}^2 \alpha - 2 y \right) = \left( x - \frac{u_0^2}{g} \operatorname{tang} \alpha \right)^2.$$

Donc, par un déplacement parallèle des axes de coordonnées, il est aisé de mettre cette parabole sous la forme réduite. Il suffit, en effet, de poser

$$x = \frac{u_0^2}{g} \operatorname{tang} \alpha + x_1 \quad \text{et} \quad y = \frac{u_0^2}{2g} \operatorname{tang}^2 \alpha - y_1.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation de la trajectoire, on obtient la relation

$$x_1^2 = \frac{2 u_0^2}{g} y_1.$$

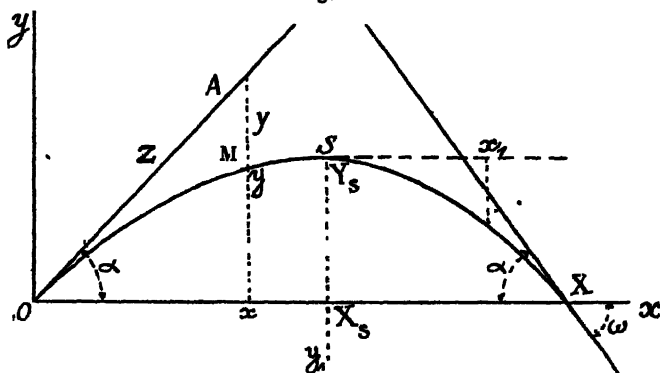
La parabole se trouve ainsi rapportée à son sommet S et aux axes ( $\S x_1, S y_1$ ).

Ce point est aussi le *sommet* de la trajectoire qui se compose de deux branches symétriques : la branche *ascendante*, allant de l'origine au sommet, et la branche *descendante*, située au delà du sommet.

S'il n'y avait pas de pesanteur, le projectile suivrait constamment la *ligne de projection*, c'est-à-dire la droite

$$y = x \tan \alpha.$$

Fig. 8.



On appelle *éloignement*  $z$  la distance OA de l'origine au point de rencontre A de la verticale d'un point M de la trajectoire avec la tangente à l'origine. On a

$$z = V_0 t.$$

L'*abaissement*  $y$  est la distance verticale AM du projectile au-dessous de la tangente initiale; il a pour expression

$$y = \frac{g x^2}{2 u_0^2},$$

ou encore

$$y = \frac{1}{2} g t^2,$$

d'après l'expression de  $t$  en fonction de  $x$  (19, III).

On peut mettre l'équation de la trajectoire sous la forme

$$y = x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2 V_0^2} (1 + \tan^2 \alpha),$$

avec les deux seuls paramètres  $V_0$  et  $\tan \alpha$ .

La tangente en un point  $x$  est donnée par la formule

$$\tan \tau = \tan \alpha - \frac{g x}{u_0^2}.$$

C'est une fonction linéaire de l'abscisse.

**24. Directrice et foyer.** — On sait que, lorsqu'une parabole est mise

sous la forme réduite

$$x^2 = \left( \frac{2u_0^2}{g} \right) y,$$

la *directrice* se trouve à une distance du sommet égale à  $\frac{u_0^2}{2g}$ .

Mais le sommet lui-même, d'après le changement de coordonnées qui a été fait, se trouve à une hauteur  $\frac{u_0^2}{2g} \tan^2 \alpha$  au-dessus de l'origine de la trajectoire.

Par suite, la directrice est à une hauteur, au-dessus de l'origine, égale à

$$\frac{u_0^2}{2g} (1 + \tan^2 \alpha) = \frac{V_0^2}{2g}.$$

C'est la hauteur due à la vitesse  $h = \frac{V_0^2}{2g}$  définie plus haut (22).

Le *foyer* de la parabole se trouve à une hauteur  $\frac{u_0^2}{2g}$  au-dessous du sommet, et, par suite, à une altitude

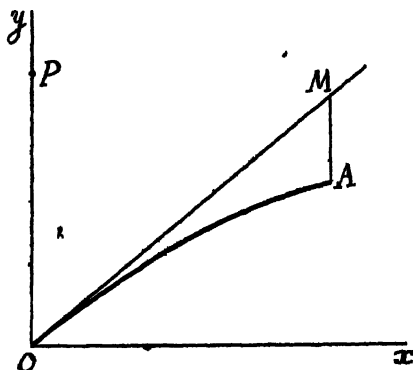
$$Y_f = \frac{u_0^2}{2g} (\tan^2 \alpha - 1) = -\frac{V_0^2}{2g} \cos 2\alpha.$$

En introduisant le paramètre  $h$ , l'équation de la trajectoire est

$$y = x \tan \alpha - \frac{x^2}{4h} (1 + \tan^2 \alpha).$$

THÉORÈME DE CASSINI. — *L'éloignement OM (ligne d'impulsion) est*

Fig. 9.



*moyenne proportionnelle entre l'abaissement MA (ligne de chute) et la ligne d'égalité.*

Cassini appelle *ligne d'égalité* une longueur verticale OP égale à quatre fois la hauteur de la directrice.

On a donc

$$OP = \frac{2V_0^2}{g} = 4h.$$

Comme, d'autre part, on a

$$\overline{OM}^2 = V_0^2 t^2 \quad \text{et} \quad AM = \frac{1}{2} g t^2,$$

il viendra

$$\overline{OM}^2 = \frac{2V_0^2}{g} AM = OP \cdot AM. \quad \text{c. q. f. d.}$$

**25. Vitesse du projectile en un point. Hodographe.** — Puisque, sur toute la trajectoire, la vitesse *horizontale*  $u$  est constante, on a, en un point d'inclinaison  $\tau$ , la relation

$$v = \frac{u_0}{\cos \tau}.$$

La vitesse, qui est infinie pour  $\tau = \frac{\pi}{2}$  extrémité de la branche ascendante en amont de l'origine, décroît jusqu'au sommet, où

$$\tau = 0 \quad \text{et} \quad V_s = u_0.$$

Sur la branche descendante,  $\tau$  devient négatif et la vitesse  $v$  croît jusqu'à l'infini, pour  $\tau = -\frac{\pi}{2}$ , en repassant par les mêmes valeurs que sur la branche ascendante, pour des ordonnées égales.

En appliquant le théorème des forces vives, on peut écrire immédiatement l'équation

$$v^2 = V_0^2 - 2gy.$$

*La vitesse du projectile, au point  $y$ , est la même que s'il était tombé de la directrice, c'est-à-dire d'une hauteur  $\left(\frac{V_0^2}{2g} - y\right)$  ou  $(h - y)$ , en partant de cette directrice avec une vitesse nulle.*

**Hodographe.** — On appelle *hodographe*, dans un mouvement quelconque, la courbe décrite par l'extrémité d'un vecteur mené d'un point fixe parallèlement à la vitesse en chaque point de la trajectoire et proportionnel à cette vitesse. C'est donc la relation entre  $v$  et  $\tau$  qui donnera l'équation polaire de l'hodographe.

Dans le cas actuel, on a

$$v \cos \tau = u_0.$$

*L'hodographe du vide est une droite verticale.*

**26. Formules du sommet.** — Le *sommet* est défini par la condition  $\tau = 0$ .



Les six quantités qui subsistent dans les équations du Tableau du n° 19 sont alors :

Données :

$u_0$ , vitesse initiale horizontale ;  
 $\tan \alpha$ , tangente de l'angle de projection.

Inconnues :

$X_s$ , abscisse du sommet ;  
 $Y_s$ , flèche de la trajectoire ;  
 $T_s$ , durée du trajet de l'origine au sommet ;  
 $V_s$ , vitesse du projectile au sommet.

Comme on a  $V_s = u_0$ , il n'y a pas lieu de considérer  $V_s$  comme inconnue ; de même, la vitesse verticale au sommet  $v_s$  est nulle.

Il reste donc trois inconnues. Chacune des cinq quantités ( $u_0$ ,  $\tan \alpha$ ,  $X_s$ ,  $Y_s$ ,  $T_s$ ) est déterminée en fonction de deux des autres, de sorte que le nombre des formules possibles est le nombre de combinaisons de 5 objets pris 3 à 3, c'est-à-dire  $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$ .

Mais, comme il se trouve que, dans  $T_s$  et  $Y_s$ , les deux quantités  $u_0$  et  $\tan \alpha$  sont engagées seulement sous la forme du produit  $u_0 \tan \alpha$ , on n'aura point  $T_s = f_1(Y_s, u_0)$  et  $T_s = f_2(Y_s, \tan \alpha)$ , mais seulement  $T_s = f_3(Y_s)$ . De plus, il n'existera pas de relation  $f_4(X_s, Y_s, T_s)$ , à cause de la dépendance mutuelle de  $Y_s$  et de  $T_s$ . Donc, au lieu de 10 combinaisons, il n'existera, en réalité, que 8 formes distinctes.

Les huit formules du sommet sont les suivantes :

$$\begin{array}{lll}
 (1) \quad X_s = \frac{u_0^2}{g} \tan \alpha; & (2) \quad T_s = \frac{u_0}{g} \tan \alpha, & (5) \quad Y_s = \frac{u_0^2}{2g} \tan^2 \alpha, \\
 & (3) \quad T_s = \frac{X_s}{u_0}, & (6) \quad Y_s = \frac{g X_s^2}{2 u_0^2}, \\
 & (4) \quad T_s = \sqrt{\frac{X_s \tan \alpha}{g}}; & (7) \quad Y_s = \frac{X_s}{2} \tan \alpha, \\
 & & (8) \quad Y_s = \frac{1}{2} g T_s^2.
 \end{array}$$

On peut remarquer que l'abaissement  $y_s$  du sommet est égal à la flèche  $Y_s$ . Si l'on introduit la hauteur  $h = \frac{V_s^2}{2g}$  due à la vitesse initiale  $V_0$ , on a

$$X_s = h \sin 2\alpha, \quad Y_s = h \sin^2 \alpha.$$

27. Formules du point de chute. — 1° Le point de chute est l'intersection de la trajectoire et d'une horizontale passant par la bouche du

canon. Il est défini en faisant  $y = 0$  dans les équations du Tableau du n° 19.

Appelant  $\omega$  l'angle de chute, l'équation

$$y = \frac{u_0^2}{g} (\tan^2 \alpha - \tan^2 \tau),$$

pour  $y = 0$ , donnera

$$\tan^2 \alpha = \tan^2 \omega;$$

d'où

$$\tan \omega = \pm \tan \alpha.$$

La trajectoire rencontre l'horizontale de la bouche aux deux points correspondant à  $\omega = \pm \alpha$ . Le premier,  $\omega = + \alpha$ , est l'origine; le second,  $\omega = - \alpha$ , est le point de chute.

Remarquant que les vitesses restantes, soit totale  $V_\omega$ , soit verticale  $v_\omega$ , sont connues et égales respectivement à  $V_0$  et  $v_0$ , on doit dire que, dans le problème de la recherche du point de chute, ne figurent que quatre quantités susceptibles de se combiner en formules :

Données :

$u_0$ , vitesse initiale horizontale;

$\tan \alpha$ , tangente de l'angle de projection.

Inconnues :

$X$ , portée;

$T$ , durée du trajet.

Ces quatre variables, combinées 3 par 3, donnent les  $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4$  formules qui suivent :

$$(1) \quad X = \frac{2u_0^2}{g} \tan \alpha;$$

$$(2) \quad T = \frac{2u_0}{g} \tan \alpha,$$

$$(3) \quad T = \frac{X}{u_0},$$

$$(4) \quad T = \sqrt{\frac{2X \tan \alpha}{g}}.$$

On a, en plus,

$$\omega = - \alpha, \quad V_\omega = V_0, \quad v_\omega = v_0.$$

2° Il est possible, évidemment, de combiner autrement ces formules, en n'employant plus alors, comme variables, les quantités composées  $u_0$  et  $\tan \alpha$ , mais les variables équivalentes,  $V_0$  et  $\alpha$ . On peut alors se proposer le problème suivant :

*Connaissant deux des quatre quantités ( $V_0$ ,  $\alpha$ ,  $X$ ,  $T$ ), déterminer les deux autres.* Les formules sont données dans le Tableau ci-après :

Données.	Solutions.	
$\alpha, V_0 \dots$	$X = \frac{V_0^2}{g} \sin 2\alpha$	$T = \frac{2 V_0}{g} \sin \alpha$
$\alpha, \lambda \dots$	$V_0 = \sqrt{\frac{g \lambda}{\sin \alpha}}$	$T = \sqrt{\frac{2 \lambda \tan \alpha}{g}}$
$\alpha, T \dots$	$V_0 = \frac{g T}{2} \sin \alpha$	$X = \frac{g T^2}{2 \tan \alpha}$
$V_0, X \dots$	$\sin 2\alpha = \frac{g X}{V_0^2}$	$T = \frac{1}{g} (\sqrt{V_0^2 + g X} \pm \sqrt{V_0^2 - g X})$
$V_0, T \dots$	$\sin \alpha = \frac{g T}{V_0}$	$X = \sqrt{V_0^2 T^2 - \frac{1}{4} g^2 T^4}$
$X, T \dots$	$\tan \alpha = \frac{g T^2}{2 X}$	$V_0 = \sqrt{\frac{1}{4} g^2 T^2 + \frac{X^2}{T^2}}$

La formule  $X = \frac{V_0^2}{g} \sin 2\alpha$ , ou  $x = 2 h \sin 2\alpha$ , qui indique que la portée est proportionnelle au sinus du double de l'angle de projection, est due à Torricelli.

3° On exprimera les éléments du sommet ( $X_s, Y_s, T_s$ ), en fonction des éléments du point de chute, par les formules

$$X_s = \frac{X}{2}, \quad T_s = \frac{T}{2}, \quad Y_s = \frac{1}{8} g T^2.$$

L'abaissement  $y_w$  au point de chute, qui est  $\frac{1}{2} g T^2$ , est égal à quatre fois la flèche de la trajectoire.

4° *Problèmes.* — I. Sous quel angle doit-on tirer pour que la portée vaille  $m$  fois la flèche?

On aura

$$2 h \sin 2\alpha = m h \sin^2 \alpha,$$

d'où

$$\tan \alpha = \frac{4}{m}.$$

II. Sous quel angle doit-on tirer pour que la portée soit égale à la hauteur due à la vitesse?

On a

$$\sin 2\alpha = \frac{1}{2}.$$

Donc

$$\alpha = 15^\circ.$$

III. Établir un nomogramme à droites parallèles ayant pour charnière ( $V_0$ ) et donnant  $X, Y_s, T$  en fonction de  $\alpha$ .

IV. La hauteur moyenne  $y_m$  où se tient le projectile est donnée par les formules

$$y_m = \frac{1}{T} \int_0^T y \, dt \quad \text{ou} \quad y_m = \frac{1}{X} \int_0^X y \, dx.$$

Démontrer qu'on a

$$y_m = \frac{2}{3} Y_s.$$

**28. Formules différentielles.** — Les formules différentielles ont pour objet de répondre à la question suivante : *Les conditions initiales  $\alpha$  et  $V_0$  du tir sont un peu changées,  $\alpha$  devenant  $(\alpha + d\alpha)$  et  $V_0$  devenant  $(V_0 + dV_0)$  : quelles modifications très petites ( $\partial X, \partial T, \partial X_s, \partial Y_s, \partial T_s$ ) subissent corrélativement les éléments du point de chute et du sommet ?*

Prenons, par exemple, la portée  $X$ , dont l'expression développée est

$$X = \frac{2 V_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha.$$

Différentiant logarithmiquement, il viendra

$$\frac{\partial X}{X} = \frac{2 \partial V_0}{V_0} + \left( \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) \partial \alpha,$$

et la parenthèse se réduit à

$$\frac{2}{\tan 2\alpha}.$$

En opérant un calcul analogue pour les autres éléments, on arrivera au Tableau suivant :

1° *Formules différentielles du point de chute :*

$$\frac{\partial X}{X} = \frac{2 \partial V_0}{V_0} + \frac{2}{\tan 2\alpha} \partial \alpha; \quad \frac{\partial T}{T} = \frac{\partial V_0}{V_0} + \frac{1}{\tan \alpha} \partial \alpha.$$

On peut mettre aussi ces formules sous la forme suivante :

$$\partial X = \frac{2 V_0^2}{g} \left( \sin 2\alpha \frac{\partial V_0}{V_0} + \cos 2\alpha \partial \alpha \right); \quad \partial T = \frac{2 V_0}{g} \left( \sin \alpha \frac{\partial V_0}{V_0} + \cos \alpha \partial \alpha \right)$$

On a, de plus :

$$\partial \omega = -\partial \alpha, \quad \partial V_\omega = \partial V_0.$$

2° *Formules différentielles du sommet :*

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{\partial X_s}{X_s} = \frac{2 \partial V_0}{V_0} + \frac{2}{\tan 2\alpha} \partial \alpha; & \frac{\partial T_s}{T_s} = \frac{\partial V_0}{V_0} + \frac{1}{\tan \alpha} \partial \alpha; \\ \frac{\partial Y_s}{Y_s} = \frac{2 \partial V_0}{V_0} + \frac{2}{\tan \alpha} \partial \alpha; & \frac{\partial V_s}{V_s} = \frac{\partial V_0}{V_0} - \tan \alpha \partial \alpha. \end{cases}$$

On peut les mettre sous la forme suivante :

$$(II) \quad \begin{cases} \partial X_s = \frac{V_0^2}{g} \left( \sin 2\alpha \frac{\partial V_0}{V_0} + \cos 2\alpha \partial \alpha \right); & \partial T_s = \frac{V_0}{g} \left( \sin \alpha \frac{\partial V_0}{V_0} + \cos \alpha \partial \alpha \right); \\ \partial Y_s = \frac{V_0^2}{g} \sin \alpha \left( \sin \alpha \frac{\partial V_0}{V_0} + \cos \alpha \partial \alpha \right); & \partial V_s = \cos \alpha \partial V_0 - V_0 \sin \alpha \partial \alpha. \end{cases}$$

*Remarques.* — I. On peut enfin supposer que l'autre constante qui figure dans les formules et qui est la *gravité*  $g$  subisse une petite modification  $\partial g$ . On a alors

$$\frac{\partial X}{X} = \frac{\partial X_s}{X_s} = \frac{\partial T}{T} = \frac{\partial T_s}{T_s} = -\frac{\partial g}{g}.$$

II. On peut avoir besoin, pour certaines discussions, des termes du second ordre en  $\partial \alpha$  et  $\partial V_0$ ; un développement en série de la formule de la *portée*, par exemple  $X = \frac{V_0^2}{g} \sin 2\alpha$ , conduit aisément à la formule suivante :

$$\frac{\partial X}{X} = 2 \frac{\partial V_0}{V_0} + 2 \cot 2\alpha \partial \alpha + \frac{\overline{\partial V_0}^2}{V_0^2} - 2 \overline{\partial \alpha}^2 + 4 \cot 2\alpha \partial \alpha \frac{\partial V_0}{V_0}.$$

De même, pour la *durée du trajet*  $T$ , on obtient

$$\frac{\partial T}{T} = \frac{\partial V_0}{V_0} + \cot \alpha \partial \alpha - \frac{\overline{\partial \alpha}^2}{2} + \frac{1}{2} \cot \alpha \partial \alpha \frac{\partial V_0}{V_0}.$$

### III. — THÉORÈMES SUR LES PROPRIÉTÉS DE LA TRAJECTOIRE.

29. *Équation de la trajectoire en coordonnées polaires.* — On prend, comme coordonnées, le *rayon vecteur*  $OM$ , désigné par  $X_\sigma$ , et l'*angle polaire*  $\sigma$  que  $OM$  fait avec l'axe des  $Ox$ .

L'angle  $\sigma$  s'appelle, en Balistique, l'*angle de site* ou le *site* du point  $M$  de la trajectoire (ou du but); il est positif au-dessus de  $Ox$  et négatif au-dessous. La droite  $OM$  est dite la *ligne de site* du point  $M$  (ou du but).

De l'équation de la trajectoire

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2u_0^2},$$

on déduira, en posant  $x = X_\sigma \cos \sigma$  et  $y = X_\sigma \sin \sigma$ , l'équation suivante, en coordonnées polaires :

$$X_\sigma = \frac{2V_0^2}{g} \frac{\cos \alpha}{\cos^3 \sigma} \sin(\alpha - \sigma)$$

ou, sous une autre forme,

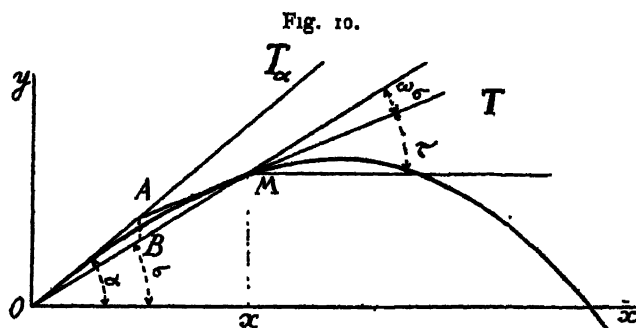
$$X_{\sigma} = \frac{2V_0^2 \cos^2 \alpha}{g \cos \sigma} (\tan \alpha - \tan \sigma).$$

*Expression de  $\tan \tau$ .* — On a

$$\tan \tau = \tan \alpha - \frac{g r}{u_0^2},$$

d'o

$$\tan \tau = \tan \alpha - \frac{g}{V_0^2} X_{\sigma} \frac{\cos \sigma}{\cos^2 \alpha}.$$



Comparant à la dernière forme de l'équation de la trajectoire, on aura

$$\tan \tau = 2 \tan \sigma - \tan \alpha.$$

On déduit de là

$$w = u_0(2 \tan \sigma - \tan \alpha) \quad \text{et} \quad v^2 = u_0^2 [1 + (2 \tan \sigma - \tan \alpha)^2].$$

Soit A le point de rencontre des deux tangentes en M et en O ; si l'on mène AB verticalement, on voit aisément, en employant la formule ci-dessus, que le point B divise la corde OM en deux parties égales.

**30. Variations de l'angle tangentiel.** — L'angle que fait, en M (fig. 10), la tangente MT avec la ligne de site OM, et qui est désigné par  $\omega_{\sigma}$ , est donné, d'après la courbe polaire, par l'expression générale

$$\tan \omega_{\sigma} = -X_{\sigma} \frac{d\sigma}{dX_{\sigma}}.$$

Mais, on écrira de suite, directement,

$$\omega_{\sigma} = \sigma - \tau, \quad \text{d'où} \quad \tan \omega_{\sigma} = \tan(\sigma - \tau).$$

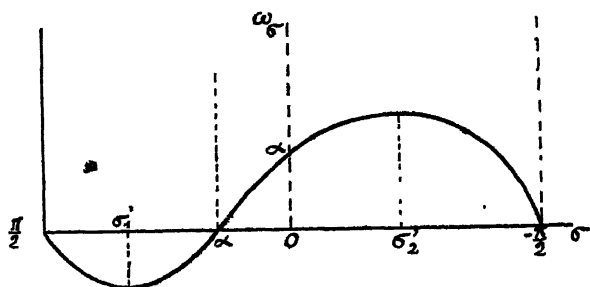
et, par suite,

$$\tan \omega_{\sigma} = \frac{\tan \sigma - \tan \tau}{1 + \tan \sigma \tan \tau} = \frac{\tan \alpha - \tan \sigma}{1 - \tan \sigma \tan \alpha + 2 \tan^2 \sigma}.$$

Les variations de l'angle  $\omega_\sigma$  sont données par le Tableau suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \sigma = \frac{\pi}{2} & \alpha & \sigma, & 0 & 2\alpha - \frac{\pi}{2} & -\frac{\pi}{2}, \\ \omega_\sigma = 0 & - & 0 & + & \sigma, & + & \alpha & + & 0. \end{array}$$

Fig. 11.



1° L'angle  $\omega_\sigma$  passe ainsi par deux valeurs maxi et mini  $(\omega_\sigma)_m$ , qui correspondent à l'égalité  $d\sigma = d\tau$ .

D'après l'expression  $\tan \tau = 2 \tan \sigma - \tan \alpha$ , en ces points désignés par  $\sigma'$ , on devra avoir

$$\cos^2 \sigma' = 2 \cos^2 \tau \quad \text{ou} \quad \tan^2 \tau = 1 + 2 \tan^2 \sigma'.$$

On aura donc, pour déterminer  $\sigma'$  en fonction de  $\alpha$ , la relation

$$2 \tan^2 \sigma' - 4 \tan \sigma' \tan \alpha + \tan^2 \alpha - 1 = 0.$$

On en déduit

$$\tan \sigma' = \tan \alpha \pm \frac{1}{\sqrt{2} \cos \alpha}.$$

Il existe ainsi deux angles  $\sigma'$ , l'un en amont du point O (signe +), l'autre en aval (signe -), qui correspondent à un minimum et à un maximum de l'angle  $\omega_\sigma$ .

L'angle  $\sigma'$ , qui est en aval de l'origine, est donné par la formule

$$\tan \sigma' = \frac{2 \sin \alpha - \sqrt{2}}{2 \cos \alpha}.$$

On pourra discuter cette équation suivant la valeur et le signe de  $\alpha$ .

On aura  $\sigma' = 0$ , au point de chute, pour  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .

Si  $\alpha < \frac{\pi}{4}$ , l'angle  $\sigma'$  sera négatif; si  $\alpha > \frac{\pi}{4}$ , cet angle sera positif. On voit facilement que les points de la trajectoire correspondant aux deux valeurs de  $\sigma'$  (en amont et en aval) sont sur deux verticales équidistantes

de l'origine, telles que  $x = \pm \frac{2V_0^2 \cos^2 \alpha}{g \sqrt{2}}$ . La droite qui les joint est parallèle à la tangente initiale.

Si l'on porte la valeur de  $\sigma$  (d'aval) dans l'expression de  $\tan \omega_\sigma$ , on trouve, pour valeur de l'angle tangentiel minimum  $(\omega_\sigma)_m$ , la formule

$$\tan(\omega_\sigma)_m = \frac{\sqrt{2} \cos \alpha}{4 - 3 \sqrt{2} \sin \alpha}.$$

Ainsi,  $(\omega_\sigma)_m$  sera *droit*, si l'angle de projection est tel que

$$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{ou} \quad \cos \alpha = \frac{1}{3};$$

d'où

$$\alpha = 70^\circ, 30'.$$

2° *Sur quelle ligne de site le projectile arrive-t-il normalement?*

On doit avoir  $\omega_\sigma = \frac{\pi}{2}$ , donc  $\tan \omega_\sigma = \infty$ . Égalant à zéro le dénominateur de l'expression de  $\tan \omega_\sigma$ , on aura

$$2 \tan^2 \sigma'' - \tan \sigma'' \tan \alpha + 1 = 0,$$

d'où

$$\tan \alpha = 2 \tan \sigma'' + \cot \sigma'',$$

qu'on peut transformer en

$$\tan(\alpha - \sigma'') = \frac{1}{2} \cot \sigma''.$$

C'est une relation reliant l'angle de projection  $\alpha$  à l'angle de site  $\sigma''$  qui jouit de la propriété énoncée. Pour que l'angle de site  $\sigma''$  soit réel, il faut qu'on ait  $\tan \alpha \geq 2\sqrt{2}$ . On a alors deux angles  $\sigma''$  donnés par la relation

$$\tan \sigma'' = \frac{\tan \alpha \pm \sqrt{\tan^2 \alpha - 8}}{4}.$$

Il est facile de voir que la valeur limite  $\tan \alpha = 2\sqrt{2}$  correspond à celle, trouvée ci-dessus,  $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ , qui donne  $(\omega_\sigma)_m = \frac{\pi}{2}$ .

Si  $\sigma'_1$  et  $\sigma'_2$  sont les deux racines de l'équation, on voit aisément, en considérant la somme et le produit de ces racines, que

$$\sigma'_1 + \sigma'_2 = \alpha.$$

C'est le problème des normales abaissées de l'origine sur la trajectoire.

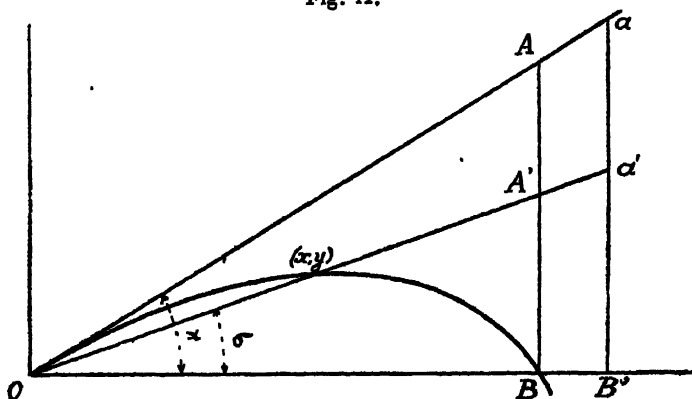
3° L'angle  $\omega_\sigma = \sigma$  au *sommet* et l'on a

$$2 \tan \sigma = \tan \alpha.$$



31. Déplacement du rayon vecteur. — 1° *Le rayon vecteur coupe une verticale quelconque en un point qui se meut d'un mouvement*

Fig. 12.



*uniforme.* Appelons  $L$  la distance  $OB'$  de la verticale proposée à l'origine et posons  $aa' = l$ . On a

$$l = L \left( - \frac{y}{x} \right).$$

Mais

$$\frac{y}{x} = \tan \alpha - \frac{g x}{2 V_0^2 \cos^2 \alpha} = \tan \alpha - \frac{g t}{2 V_0 \cos \alpha}.$$

Donc

$$\frac{dl}{dt} = \frac{L}{2} \frac{g}{V_0 \cos \alpha}.$$

La vitesse  $\frac{dl}{dt}$  est ainsi une constante.

Si l'on fait  $L$  égal à la portée  $X$ , la vitesse du déplacement sur la verticale du point de chute est

$$\frac{dl}{dt} = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{2g} \frac{g}{V_0 \cos \alpha} = V_0 \sin \alpha.$$

La vitesse  $\frac{dl}{dt}$  est constamment égale à la vitesse initiale verticale.

2° *Vitesse angulaire du rayon vecteur.* — On a

$$l = L(\tan \alpha - \tan \sigma).$$

Donc

$$\frac{dl}{dt} = -L \frac{1}{\cos^2 \sigma} \frac{d\sigma}{dt}.$$

Par suite,

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{g}{V_0 \cos \alpha} \cos^2 \sigma.$$

La vitesse  $\frac{d\sigma}{dt}$  est la vitesse angulaire qu'apprécie un observateur, supposé placé à l'origine de la trajectoire, et qui essaie de suivre le projectile dans sa marche.

A l'origine, on a

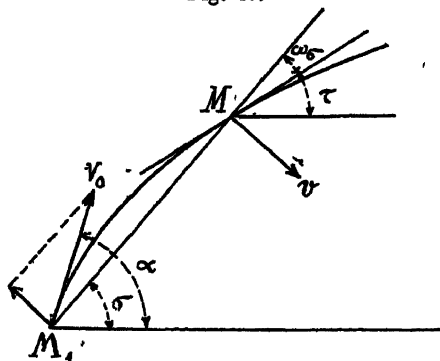
$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_0 = -\frac{1}{2} \frac{g \cos \alpha}{V_0};$$

puis  $\frac{d\sigma}{dt}$  augmente en valeur absolue jusqu'à la valeur  $\cos \sigma = 1$ , qui correspond au point de chute; cette vitesse diminue ensuite jusqu'à zéro, pour  $\sigma = -\frac{\pi}{2}$ .

**32. Vitesse du projectile.** — 1° *En un point M, la composante de la vitesse  $v$  suivant une perpendiculaire à la ligne de site  $\sigma$  est égale à la composante de la vitesse initiale suivant cette même direction, et de sens contraire.*

Sur la ligne de site, la projection de la vitesse est  $v \cos \omega_\sigma$  et, perpendiculairement, la composante est  $v \sin \omega_\sigma$ .

Fig. 13.



Mais,  $\omega_\sigma = \sigma - \tau$ . Donc, la composante, perpendiculairement à la ligne de site, est

$$v \sin(\sigma - \tau) = v \sin \sigma \cos \tau - v \cos \sigma \sin \tau = u_0(\sin \sigma - \cos \sigma \tan \tau).$$

Mais on a (29) la relation

$$\tan \tau = 2 \tan \sigma - \tan \alpha.$$

En faisant la substitution, on voit que la composante s'exprimera par la formule

$$v \sin(\sigma - \tau) = V_0 \sin(\alpha - \sigma),$$

ce qui démontre la proposition.

2° Si l'on coupe la trajectoire par une corde quelconque, aux points de rencontre  $M_1$  et  $M_2$ , les composantes des vitesses suivant la perpendiculaire à la corde sont égales et de sens contraire.

C'est le corollaire immédiat du théorème précédent; on peut prendre, en effet, le point  $M_1$  comme origine de la trajectoire, et  $M_1, M_2$  est alors une ligne de site.

3° *Projeté sur une direction quelconque, le mouvement du projectile est un mouvement uniformément varié.* Soit  $\varphi$  l'angle fait par la direction donnée avec l'axe horizontal. En appelant  $\frac{d\zeta}{dt}$  la vitesse de la projection du mouvement sur cette ligne, on aura

$$\frac{d\zeta}{dt} = u \cos \varphi + w \sin \varphi,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\zeta}{dt} = V_0 \cos(\varphi - \alpha) - g t \sin \varphi;$$

on en déduit

$$\zeta = V_0 t \cos(\varphi - \alpha) - \frac{1}{2} g t^2 \sin \varphi,$$

ce qui démontre le théorème.

La vitesse s'annule pour  $t = \frac{V_0 \cos(\varphi - \alpha)}{g \sin \varphi}$ , et l'on a, pour ce temps,

$$\zeta_{\max} = \frac{1}{2} \frac{V_0^2 \cos^2(\varphi - \alpha)}{g \sin \varphi}.$$

**33. Construction de la trajectoire par points.** — 1° *Construction de Torricelli.* — D'après la proposition du n° 31, la vitesse de déplacement du point de rencontre  $A'$  du rayon vecteur  $OMA'$  et de la verticale du point de chute est égale à  $V_0 \sin \alpha$ .

Celle du point  $M'$ , projection de  $M$  sur l'horizontale, est égale à  $V_0 \cos \alpha$ . Si donc on joint  $M'$  et  $A'$ , la droite  $M'A'$  restera constamment parallèle à la tangente initiale  $OA$ , car on a

$$A'B = X \tan \alpha - V_0 t \sin \alpha \quad \text{et} \quad M'B = X - x = X - V_0 t \cos \alpha.$$

L'élimination de  $t$  donne  $A'B = M'B \tan \alpha$ .

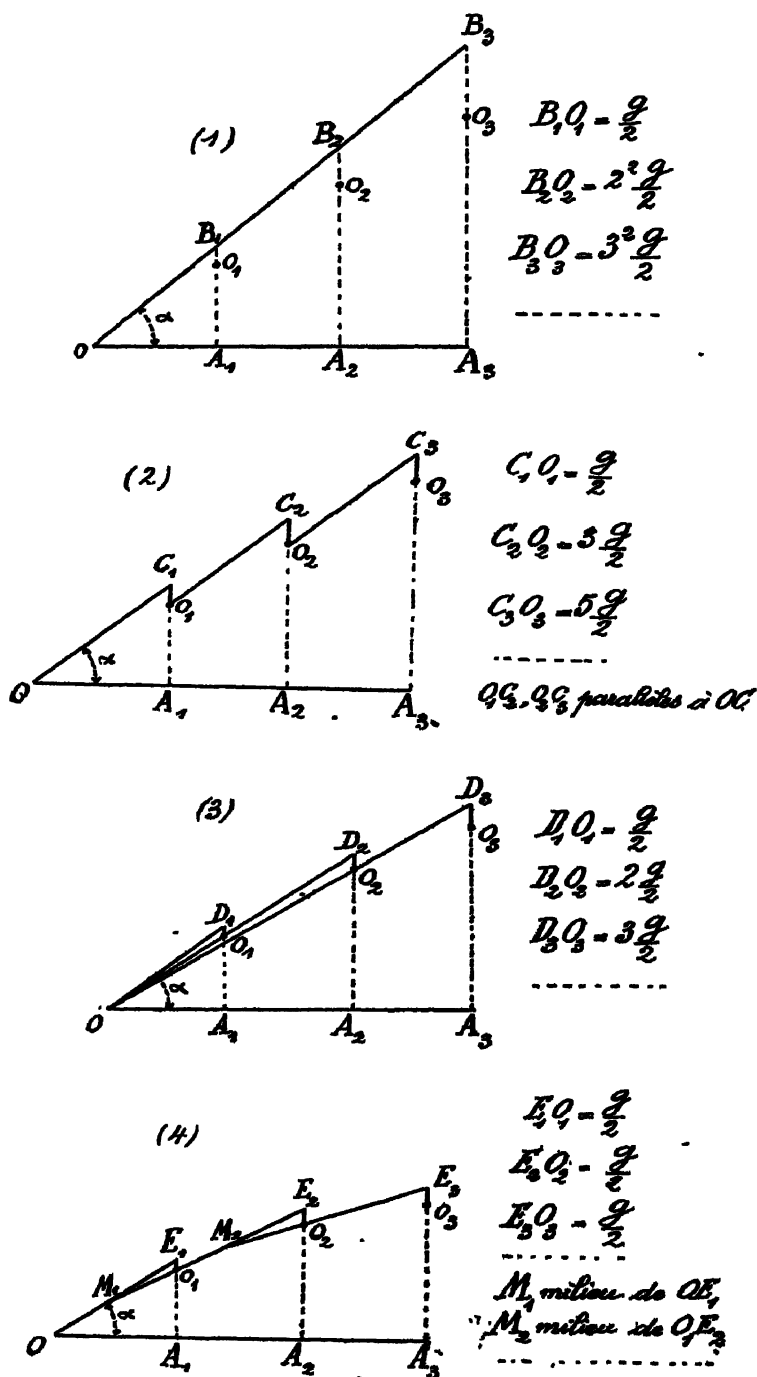
De là résulte la construction point par point de la trajectoire :

*Mener un rayon vecteur  $OA'$ ; de  $A'$ , mener  $A'M'$  parallèle à la tangente initiale; la verticale de  $M'$  coupe le rayon vecteur  $OA'$  en  $M$ , qui est le point cherché.*

Si, par le point  $A'$ , on mène une parallèle  $A'D$  à la tangente en  $M$ , cette droite passe par le point fixe  $D$ , milieu de  $OA$ . On a, en effet, en



Fig. 15.



permettra de déterminer immédiatement la verticale AA'B du point de chute.

II. Si l'on prend, pour représenter la vitesse initiale  $V_0$ , la longueur OA, la vitesse en M est représentée par la longueur RR' interceptée, par les droites Oy et AB, sur la tangente en M.

On a, en effet,

$$v \cos \tau = V_0 \cos \alpha = OB.$$

III. Si, à partir du point M, on prend MR' égal à la vitesse du point M, c'est-à-dire à RR', le lieu du point R' est la parabole à axe vertical :

$$\frac{y}{X \tan \alpha} = \left(1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \frac{x}{X}\right) \left(1 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \frac{x}{X}\right).$$

VI. Soient

$$OR = \xi_0 \quad \text{et} \quad BR' = \xi_1,$$

on a

$$\begin{aligned} \sqrt{\xi_0} + \sqrt{\xi_1} &= \sqrt{X \tan \alpha}, \\ x &= X \frac{\sqrt{\xi_0}}{\sqrt{\xi_0} + \sqrt{\xi_1}}, \quad y = \sqrt{\xi_0 \xi_1}. \end{aligned}$$

2° *Construction par arcs successifs.* — Les modes de détermination de la trajectoire, que nous allons maintenant indiquer, répondent à une idée différente de celle qui a conduit à la construction précédente. Il s'agit du tracé, par *arcs successifs*, de la trajectoire, en partant des données initiales ( $V_0, \alpha$ ), et l'intérêt de cette méthode réside dans ce qu'elle est susceptible d'être généralisée, dans certains cas; pour s'appliquer à la trajectoire atmosphérique. Voici, par exemple, quatre tracés indiqués dans la Balistique de Cranz.

On considère (pour la simplicité de l'exposition) des temps successifs de 1, 2, 3, ...,  $n$  secondes, auxquels correspondent, sur l'horizontale, les points  $A_1, A_2, A_3, \dots$  équidistants, tels que  $A_1 A_2 = V_0 \cos \alpha$ .

Ces diverses constructions s'expliquent d'elles-mêmes par l'examen des figures ci-dessus et des légendes.

34. *Formes diverses de l'équation de la trajectoire.* — 1° De l'équation de la trajectoire

$$y = x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2 u^2},$$

on déduira, en introduisant la portée  $X = \frac{2 u^2}{g} \tan \alpha$ , la formule

$$(1) \quad y = x \left(1 - \frac{x}{X}\right) \tan \alpha,$$

d'où, en fonction des deux variables  $\text{tang } \sigma = \frac{y}{x}$  et  $\text{tang } \tau = \frac{dy}{dx}$ , les formules

$$(2) \quad \text{tang } \sigma = \left(1 - \frac{x}{X}\right) \text{tang } \alpha,$$

$$(3) \quad \text{tang } \tau = \left(1 - \frac{2x}{X}\right) \text{tang } \alpha.$$

La formule (2) peut se mettre sous la forme

$$(4) \quad \frac{x}{X} = \frac{\text{tang } \alpha - \text{tang } \sigma}{\text{tang } \alpha}.$$

En employant un angle auxiliaire  $\varphi$ , on écrira

$$\frac{x}{X} = \sin^2 \varphi, \quad \frac{y}{X \text{ tang } \alpha} = \frac{\sin^2 2\varphi}{4}, \quad \frac{\text{tang } \sigma}{\text{tang } \alpha} = \cos^2 \varphi, \quad \frac{\text{tang } \tau}{\text{tang } \alpha} = \cos 2\varphi.$$

2° On a encore, d'après les formules du n° 19 :

$$y = x \frac{\text{tang } \alpha + \text{tang } \tau}{2}, \quad y = \frac{X}{4} \frac{\text{tang}^2 \alpha - \text{tang}^2 \tau}{\text{tang } \alpha};$$

$$x = \frac{X}{2} \frac{\text{tang } \alpha - \text{tang } \tau}{\text{tang } \alpha}, \quad t = \frac{X}{2 \sin \alpha} (\text{tang } \alpha - \text{tang } \tau),$$

et, enfin,

$$\frac{w}{w_0} = 1 - \frac{2x}{X}.$$

3° Introduisons, au lieu de  $x$ , dans la parenthèse de l'équation (1), l'angle de projection  $\alpha_x$  qui donne une portée égale à l'abscisse  $x$  d'un point quelconque de la trajectoire, c'est-à-dire tel que  $x = \frac{V_0^2}{g} \sin 2\alpha_x$ , et remplaçons, d'autre part, la portée  $X$  par sa valeur  $X = \frac{V_0^2}{g} \sin 2\alpha$ ; on écrira comme il suit l'équation de la trajectoire :

$$(5) \quad y = x \left(1 - \frac{\sin 2\alpha_x}{\sin 2\alpha}\right) \text{tang } \alpha,$$

et cette formule, par des transformations trigonométriques simples, donne naissance aux suivantes :

$$(5)_1 \quad y = x \frac{\cos(\alpha + \alpha_x)}{\cos^2 \alpha} \sin(\alpha - \alpha_x),$$

$$(5)_2 \quad y = x \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha_x}{\cos^2 \alpha}\right) \text{tang}(\alpha - \alpha_x),$$

$$(5)_3 \quad \sin(2\alpha - \sigma) = \sin 2\alpha_x \cos \sigma + \sin \sigma.$$

4° On peut encore, au lieu de  $X$ , introduire la vitesse initiale  $V_x$  qui,

sous l'angle  $\tau$ , donnerait la portée  $x$ ; c'est-à-dire

$$x = \frac{V_x^2}{g} \sin 2\alpha.$$

On écrira alors l'équation de la trajectoire

$$(6) \quad y = x \left( 1 - \frac{V_x^2}{V_0^2} \right) \tan \alpha.$$

5° On notera encore des relations entre les éléments d'un *point* et les éléments du *point de chute* ou du *sommet*. C'est ainsi qu'on a

$$\frac{x}{X} = \frac{t}{T}, \quad y = \frac{g}{2} t (T - t)$$

et encore

$$\frac{X_s - x}{X_s} = \frac{T_s - t}{T_s} = \sqrt{1 - \frac{y}{Y_s}} = \frac{\sqrt{v^2 - V_s^2}}{V_s \tan \alpha} = \frac{\tan \tau}{\tan \alpha}.$$

La relation  $\frac{T_s - t}{T_s} = \sqrt{1 - \frac{y}{Y_s}}$  donne lieu à un théorème qui trouve des applications dans certains problèmes (vent balistique). *Le rapport du temps que passe le projectile au-dessus d'une certaine altitude à la durée totale du trajet, ne dépend que du rapport de cette altitude à la flèche.*

Signalons encore la relation, qui est vraie quelle que soit la trajectoire,  $y = x \tan \tau + \frac{1}{2} g t^2$ , d'où ce théorème : *Si l'on mène par l'origine une parallèle à la tangente en un point M, elle coupe l'ordonnée de ce point à une distance au-dessous de M égale à l'abaissement  $\frac{1}{2} g t^2$ .*

6° Au n° 3, nous avons introduit l'angle  $\alpha_x$  correspondant à la portée  $x$ , abscisse du point dont l'angle de site est  $\sigma$ . Introduisons, au lieu de  $\alpha_x$ , l'angle  $\alpha_0$ , qui donne une portée égale à la distance  $X_\sigma$  du but sur la ligne de site.

On a, d'après l'équation de la trajectoire, en coordonnées polaires (29),

$$X_\sigma = \frac{2 V_0^2}{g} \frac{\cos \alpha}{\cos^2 \sigma} \sin (\alpha - \sigma),$$

et, par suite, pour  $\sigma = 0$ ,

$$X_\sigma = \frac{2 V_0^2}{g} \cos \alpha_0 \sin \alpha_0.$$

Donc

$$(7) \quad \sin 2\alpha_0 = \frac{2 \cos \alpha}{\cos^2 \sigma} \sin (\alpha - \sigma).$$



C'est la formule cherchée. On peut l'écrire

$$\operatorname{tang} \sigma = \operatorname{tang} \alpha \left( 1 - \frac{\sin 2\alpha_0 \cos \sigma}{\sin 2\alpha} \right),$$

ou encore

$$\frac{\operatorname{tang} \sigma - \operatorname{tang} \sigma}{\operatorname{tang} \alpha_0} = \cos \sigma \frac{\cos^2 \alpha_0}{\cos^2 \alpha}.$$

Comparant cette relation avec (5), on trouve la formule

$$\frac{\sin 2\alpha_x}{\sin 2\sigma_0} = \cos \sigma.$$

*Remarque.* — Les différentes formules établies dans le présent numéro ont été utilisées pour la solution pratique de divers problèmes de tir.

**35. Le foyer de la trajectoire.** — 1° On a vu (24) que le foyer était à une altitude  $Y_f$  donnée par la formule

$$Y_f = - \frac{V_0^2}{2g} \cos 2\alpha.$$

D'autre part, l'abscisse  $X_f$  est égale à  $X_s$ ; donc

$$X_f = \frac{V_0^2}{2g} \sin 2\alpha.$$

L'angle de site  $\sigma_f$  du foyer sera donné par la relation

$$\operatorname{tang} \sigma_f = \left( \frac{Y}{X} \right)_f = - \frac{1}{\operatorname{tang} 2\alpha}.$$

Donc

$$\sigma_f = 2\alpha - \frac{\pi}{2}.$$

L'angle  $\sigma_f$  sera positif si  $\alpha > \frac{\pi}{4}$ . On construira  $\sigma_f$  en menant une perpendiculaire à la droite OK, telle que KOX soit égal à  $2\alpha$ .

2° Le temps  $T_f$ , mis par le projectile pour atteindre le point  $X\sigma_f$  sur cette corde, sera

$$T_f V_0 \cos \alpha = X_{\sigma_f} \cos \sigma_f,$$

et, d'après l'équation polaire de la trajectoire (29) :

$$T_f = \frac{2V_0}{g} \cos \alpha (\operatorname{tang} \alpha - \operatorname{tang} \sigma_f).$$

Mais, en remplaçant  $\operatorname{tang} \sigma_f$  par sa valeur, il viendra

$$T_f = \frac{V_0}{g} \frac{1}{\sin \alpha}.$$

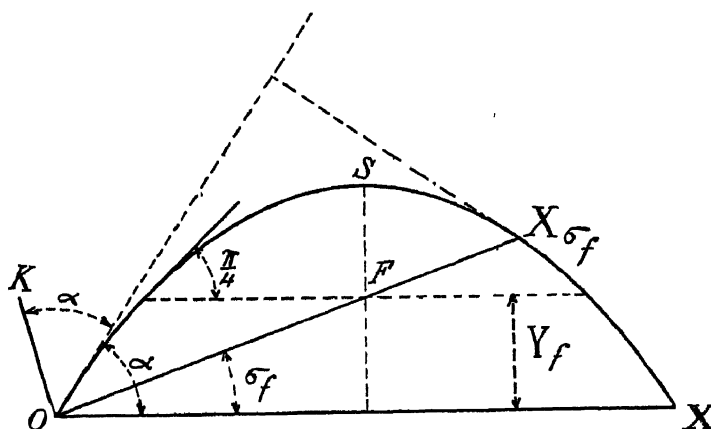
Comparant à la durée de trajet au point  $\sigma = 0$ , qui est  $T = \frac{V_0}{g} \sin \alpha$ , on en déduit la relation

$$TT_f = \left(\frac{V_0}{g}\right)^2.$$

3° D'autre part, cherchons la vitesse au point  $X_{\sigma_f}$ ; on a

$$v_f^2 = V_0^2 \cos^2 \alpha + (V_0 \sin \alpha - gT_f)^2,$$

Fig. 16.



d'où

$$v_f^2 = V_0^2 + g^2 T_f^2 - 2gT_f V_0 \sin \alpha.$$

Mais

$$gT_f \sin \alpha = V_0.$$

Donc

$$g^2 T_f^2 = v_f^2 + V_0^2.$$

Ainsi, pour une corde focale quelconque, le carré du temps mis par le projectile pour aller d'une extrémité à l'autre de cette corde est proportionnel à la somme des carrés des vitesses aux deux extrémités.

4° D'après la relation générale

$$\tan \tau = 2 \tan \sigma - \tan \alpha,$$

on déduit, pour l'inclinaison  $\tau_f$  de la tangente à l'extrémité de la corde passant par le foyer,

$$\tan \tau_f \tan \alpha = -1.$$

Les tangentes aux deux extrémités d'une corde focale quelconque sont perpendiculaires.

On a encore les relations

$$v_f = -\frac{V_0 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} \quad \text{et} \quad v_f = \frac{V_0}{\tan \alpha}.$$

5° *Le foyer F est situé sur une horizontale qui coupe la trajectoire sous l'angle de 45°.*

En effet, on a

$$Y_f = -\frac{V_0^2}{2g} \cos 2\alpha.$$

Portant cette valeur dans la formule qui fait connaître  $\tan \tau$  en fonction de  $y$  (19, IV) :

$$\tan \tau = \pm \frac{1}{u_0} \sqrt{u_0^2 \tan^2 \alpha - 2gy},$$

on voit, puisque  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ , que cette équation se réduit à

$$\tan \tau = \pm 1.$$

6° On a

$$OF = \frac{X_s}{\cos \sigma_f} = \frac{V_0^2}{2g} \frac{\sin 2\alpha}{\cos \left( 2\alpha - \frac{\pi}{2} \right)} = \frac{V_0^2}{2g} = h.$$

La distance du foyer à l'origine est égale à la hauteur due à la vitesse. Elle ne dépend pas de l'angle de projection.

7° On a

$$OX_{\sigma_f} = \frac{V_0^2}{2g} \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

Donc

$$Y, \overline{OX_{\sigma_f}} = h^2.$$

**36. Rayon de courbure et développée de la trajectoire.** — 1° On a vu (20) que, en un point  $(v, \tau)$  de la trajectoire, on a pour le *rayon de courbure*  $r$ , l'expression

$$r = -\frac{v^3}{g u_0}.$$

D'autre part (19, IV), on a

$$v = V_0 \sqrt{1 - \frac{y}{h}}.$$

On aura ainsi, en fonction de l'ordonnée  $y$ , la formule

$$r = -\frac{2h}{\cos \alpha} \left( 1 - \frac{y}{h} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

On obtiendra également cette formule en partant de l'expression

générale du rayon  $r$  dans une courbe  $y=f(x)$ , qui est

$$r = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Ici

$$y = x \tan \alpha - \frac{x^2}{4h} (1 + \tan^2 \alpha),$$

$$y' = \tan \alpha - \frac{x}{2h} (1 + \tan^2 \alpha).$$

$$y'' = -\frac{1}{2h} (1 + \tan^2 \alpha).$$

On en déduit

$$1 + y'^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \left[ 1 + \frac{x^2}{4h^2} (1 + \tan^2 \alpha) - \frac{x \tan \alpha}{h} \right] = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \left( 1 - \frac{y}{h} \right),$$

d'où la formule donnant  $r$ .

2° Considérons la trajectoire rapportée à son sommet, dont l'équation est (23)

$$x_1^2 = 4h y_1 \cos^2 \alpha.$$

On a

$$y'_1 = \frac{x_1}{2h \cos^2 \alpha}, \quad y''_1 = \frac{1}{2h \cos^2 \alpha}.$$

Soient  $(x, y)_r$  les coordonnées du centre de courbure : ce point se trouve sur la normale, à une distance  $r$  du pied de celle-ci. On a alors

$$\frac{x_r - x_1}{-y_1} = \frac{y_r - y_1}{x_1} = \frac{r}{\sqrt{1 + y_1'^2}} = \frac{1 + y_1'^2}{y_1'},$$

d'où

$$x_r = x_1 - y_1' \frac{1 + y_1'^2}{y_1'}, \quad y_r = y_1 + \frac{1 + y_1'^2}{y_1'},$$

ce qui donnera

$$x_r = -\frac{x_1^3}{4h^2 \cos^4 \alpha}, \quad y_r = 3y_1 + 2h \cos^2 \alpha.$$

Ce sont les coordonnées cherchées du centre de courbure  $R$ , relativement au sommet de la trajectoire.

3° La *développée* de la parabole s'obtiendra en portant les valeurs de  $x_1$  et  $y_1$ , tirées des équations ci-dessus, dans l'équation de la parabole. On trouve, dans les axes du sommet, la formule

$$\left( -\frac{x_1 \cos \alpha}{2h} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \left( \frac{y_1}{2h} - \cos^2 \alpha \right).$$

On a

$$SI = 2h \cos^2 \alpha.$$

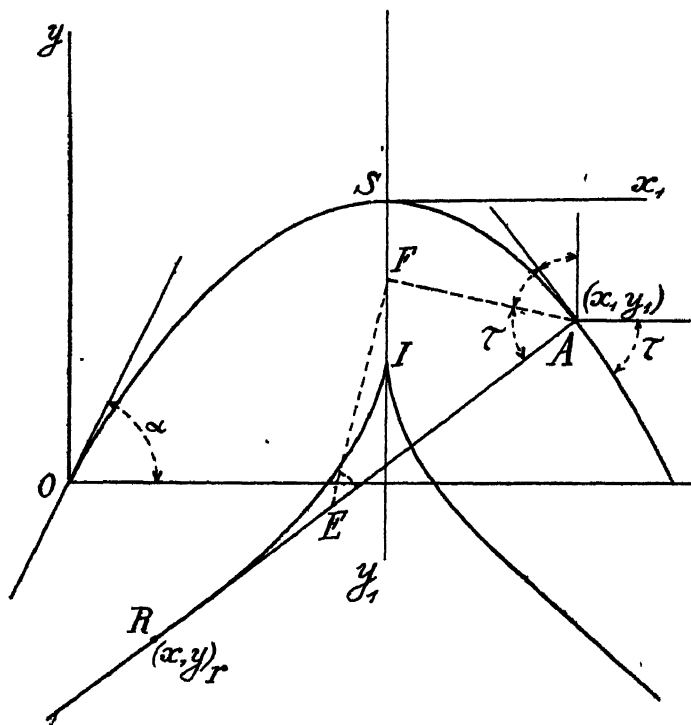
Le foyer est (24) à une distance :  $SF = h \cos^2 \alpha$  du sommet; donc  $SI = 2SF$ .

On peut démontrer que si l'on joint FA, et que, par F, on mène une perpendiculaire FE à FA, le point E est au milieu du rayon de courbure AR.

A cet effet, on partira des relations

$$FA = \frac{x_1}{\sin 2\tau}, \quad FA = AE \cos \tau$$

Fig. 17.



qui résultent des propriétés géométriques du foyer.

On a donc

$$AE = \frac{x_1}{2 \sin \tau \cos^2 \tau}.$$

Éliminant  $\tan \tau$  entre cette équation et celle de la tangente

$$\tan \tau = \frac{x_1}{2h \cos^2 \alpha},$$

on vérifiera que

$$AE = \frac{1}{2} AR.$$



---

## CHAPITRE II.

### LES FAMILLES DE TRAJECTOIRES.

---

#### I. — FAMILLE DES TRAJECTOIRES A VITESSE INITIALE CONSTANTE.

37. Définition de la famille  $V_0 = \text{const.}$  — On suppose que, d'un même point O, on lance des projectiles avec la même *vitesse initiale*  $V_0$ , mais sous des *angles de projection*  $\alpha$  différents. On obtient ainsi une *famille de trajectoires*, dite  $V_0 = \text{const.}$ , qui jouissent de propriétés communes résultant de ce que, dans l'équation de la trajectoire, écrite en mettant  $V_0$  en évidence :

$$y = x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2 V_0^2 \cos^2 \alpha},$$

l'angle  $\alpha$  est le seul paramètre variable.

Nous introduirons ici la constante

$$h = \frac{V_0^2}{2g},$$

hauteur due à la vitesse  $V_0$ . C'est la hauteur à laquelle s'élève un projectile quand il est lancé verticalement de bas en haut avec une vitesse  $V_0$  (22).

L'équation de la trajectoire devient alors

$$y = x \tan \alpha - \frac{x^2}{4h \cos^2 \alpha}, \quad \text{ou encore} \quad y = x \tan \alpha - \frac{x^2}{4h} (1 + \tan^2 \alpha),$$

avec le seul paramètre  $\tan \alpha$ .

Nous nous proposons d'examiner ici les principales propriétés de ces trajectoires. Ce sont les propriétés de paraboles ayant un point commun et même directrice.

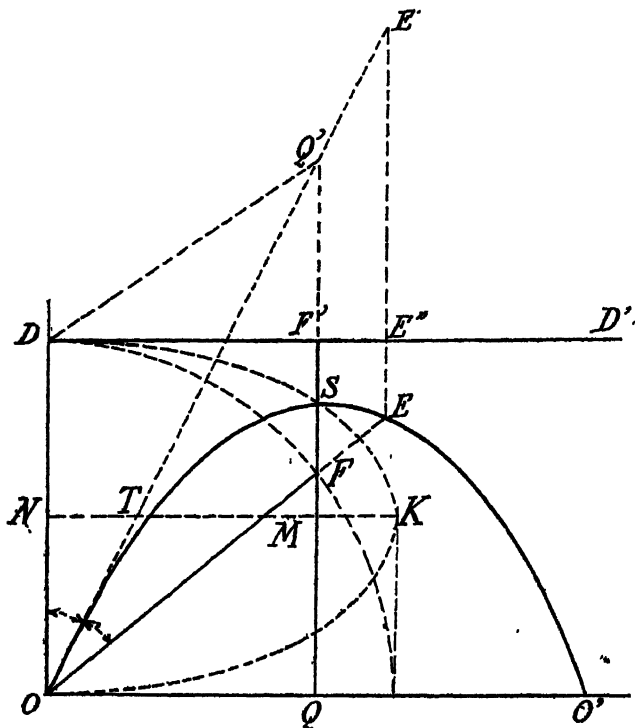
38. Théorèmes sur les directrices, les foyers et les sommets. —

1° *Toutes les trajectoires  $V_0 = \text{const.}$  ont même directrice.* — En effet, on a vu (24) que la distance de la directrice au-dessus de l'origine est égale à  $h$ : Or,  $h$  est ici une constante pour la famille :  $V_0 = \text{const.}$

2° *Le lieu des foyers des trajectoires  $V_0 = \text{const.}$  est une circonférence.* — Soient F le foyer d'une de ces trajectoires OSO' et DD' la directrice.

D'après la définition géométrique de la parabole et le théorème précédent, on a  $OF = OD = h$ ; donc, OF étant constant, le lieu des foyers F est une circonférence ayant l'origine pour centre et pour rayon  $h$ .

Fig. 18.



La ligne de projection OT est la bissectrice de l'angle DOF, d'après la propriété connue de la tangente à la parabole.

3° *Le lieu des points de rencontre E des cordes focales et de la trajectoire, est une parabole.* — L'équation polaire de la trajectoire s'écrit (29), en posant  $x_\sigma = X_\sigma \cos \sigma$ :

$$x_\sigma = 4h \cos^2 \alpha (\tan \alpha - \tan \sigma),$$

et pour une corde focale, on a (35)

$$\tan \sigma_f = -\frac{1}{\tan 2\alpha} = \frac{\tan^2 \alpha - 1}{2 \tan \alpha}.$$

Il en résulte

$$x_{\sigma_1} = \frac{2h}{\tan \alpha}.$$

Donc, le point de rencontre E' de la verticale du point E et de la tangente à l'origine se fait toujours sur une horizontale  $2h$ .

On a alors

$$EE' = h + EE'' = h + EF = OF + EF = OE.$$

Le lieu du point E est une parabole ayant l'origine pour foyer et une horizontale  $2h$  comme directrice.

4° *Le lieu des sommets des trajectoires  $V_0 = \text{const.}$  est une ellipse.* — Le sommet de la trajectoire OSO' est en S, milieu de la distance FF' du foyer à la directrice. Soit l'horizontale MN menée au milieu de OD; on aura

$$SF = \frac{1}{2} FF' = \frac{1}{2} (h - FQ) \quad \text{et} \quad FM = FQ - \frac{h}{2},$$

d'où

$$SM = SF + FM = \frac{1}{2} FQ.$$

Or, puisque le lieu de F est une circonférence, on a

$$\overline{OQ}^2 + \overline{FQ}^2 = h^2.$$

Posant

$$x = MN = OQ \quad \text{et} \quad y = SM,$$

cette relation s'écrira

$$x^2 + 4y^2 = h^2.$$

C'est l'équation d'une *ellipse*, dont le centre est en N et qui a pour demi-grands axes  $h$  (horizontalement) et  $\frac{h}{2}$  (verticalement).

Les équations du sommet (26) permettent, d'ailleurs, de trouver immédiatement cette ellipse. On a, en effet,

$$Y_s = \frac{X_s^2}{4h \cos^2 \alpha} \quad \text{et} \quad Y_s = h \sin^2 \alpha,$$

d'où, en éliminant  $\alpha$  entre ces deux relations,

$$X_s^2 + 4Y_s^2 = 4h Y_s.$$

On fera ensuite le changement de coordonnées  $x = X_s$  et  $y = Y_s - \frac{h}{2}$ , pour retomber sur la formule

$$x^2 + 4y^2 = h^2.$$



Le sommet K de l'ellipse, sur l'axe horizontal, correspond à la valeur

$$Y_s = \frac{h}{2}, \quad \text{d'où} \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{2},$$

c'est-à-dire  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .

La distance maximum OS, de l'origine au sommet S, correspond à la normale abaissée de O sur l'ellipse. On a

$$\overline{OS}^2 = X_s^2 + Y_s^2 = h^2 (\sin^2 \alpha + 4 \cos^2 \alpha) \sin^2 \alpha.$$

Pour avoir le maximum de OS, on égalera à zéro la dérivée du deuxième membre par rapport à  $\alpha$ . On obtient ainsi la condition

$$(2 - 3 \sin^2 \alpha) \sin \alpha \cos \alpha = 0,$$

équation qui, outre les points O et D, fournit la solution

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

c'est-à-dire

$$\alpha = 54^\circ, 42'.$$

A cette valeur, correspond pour OS la valeur maximum

$$OS_{\max} = \frac{2h}{\sqrt{3}}.$$

5° *Le lieu des points de rencontre Q' de l'axe de la trajectoire et de la tangente à l'origine, est une circonférence.* — On éliminera  $\alpha$  entre les deux équations

$$y = x \tan \alpha \quad \text{et} \quad x = X_s = h \sin 2\alpha;$$

on trouve la circonférence  $x^2 + (y - h)^2 = h^2$ , qui a son centre sur la directrice et pour rayon  $h$ .

D'ailleurs, la démonstration géométrique de ce théorème résulte immédiatement d'une propriété connue de la tangente OT à la parabole qui bissecte l'angle DOF. On a donc

$$Q'F = FD = DQ' = h.$$

La figure OFDQ' est ainsi un losange.

6° *Le lieu des centres de courbure du sommet des trajectoires est une ellipse.* — D'après les formules du n° 36, 3°, la distance SI du sommet S au centre de courbure est  $SI = 2h \cos^2 \alpha$ .

Les coordonnées  $X$ , et  $Y$ , de ce point sont donc

$$X_r = 2h \sin \alpha \cos \alpha, \quad Y_r = h(\sin^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha).$$

L'élimination de l'angle  $\alpha$  donne l'ellipse

$$9X_r^2 + 2Y_r^2 + 2hY_r - 4h^2 = 0,$$

ou

$$9X_r^2 + 2(Y_r - h)(Y_r + 2h) = 0,$$

ellipse dont les deux axes sont  $3h$ , verticalement, et  $\frac{h}{\sqrt{2}}$  horizontalement, le centre étant au point  $-\frac{h}{2}$ .

**39. Parabole de sécurité.** — *L'Hôpital* (1696). — Les trajectoires de la famille  $V_0 = \text{const.}$  admettent une enveloppe, qu'on déterminera en éliminant  $\tan \alpha$  entre l'équation de la trajectoire

$$y = x \tan \alpha - \frac{x^2}{4h}(1 + \tan^2 \alpha),$$

et la dérivée par rapport à  $\tan \alpha$ , qui est

$$\frac{x}{2h} \tan \alpha = 1.$$

On trouve ainsi, pour l'équation de l'enveloppe :

$$y = h - \frac{x^2}{4h}.$$

C'est une parabole, dite *parabole de sécurité*, parce qu'aucun projectile tiré du point  $O$ , avec la vitesse  $V_0$ , ne peut sortir de cette courbe.

Elle a son sommet sur la directrice  $y = h$  et son axe est vertical. Elle coupe l'axe des  $x$  au point  $x = 2h$ . Elle est égale et parallèle à la trajectoire  $\alpha = 0$ . Son foyer  $F$  est l'origine.

1° Le point  $P$  où la trajectoire particulière  $\alpha$  touche la parabole de sécurité est situé sur la verticale :  $x = \frac{2h}{\tan \alpha}$ , et l'on a

$$y = h \left( 1 - \frac{1}{\tan^2 \alpha} \right).$$

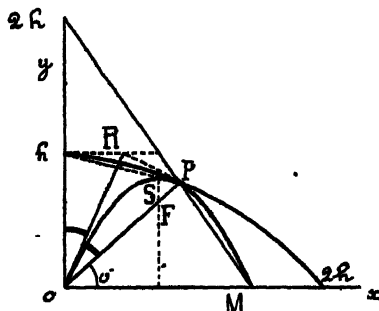
Donc

$$\tan \sigma = \left( 1 - \frac{1}{\tan^2 \alpha} \right) \frac{\tan \alpha}{2} = -\frac{1}{\tan 2\alpha}.$$

Rapprochant ce résultat du théorème du n° 33, 4°, on dira : *Une trajectoire quelconque est tangente à la parabole de sécurité au point de rencontre de cette trajectoire et de la corde focale de l'origine.*

2° La *tangente* à la trajectoire en ce point de contact est perpendiculaire sur la tangente initiale. Le pied R de cette perpendiculaire sur la tangente est situé sur la directrice de la trajectoire.

Fig. 19.



3° Le *temps* que met le projectile pour arriver à la parabole de sécurité est (33, 2°)

$$t = \frac{V_0}{g} \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Ce temps peut être représenté par le vecteur OR.

4° Démontrer que la droite qui joint le *sommet* S de la trajectoire au point P où cette trajectoire touche la parabole de sécurité a pour équation

$$2y + x \cot \alpha = 2h,$$

et qu'elle passe au point fixe  $y = h$  sur l'axe des  $y$ .

5° Démontrer que la droite qui joint le *point de chute* M de la trajectoire au point où cette trajectoire touche la parabole de sécurité passe au point fixe  $y = 2h$ , sur l'axe des  $y$ .

6° L'abscisse du point de contact P est double de la longueur OR.

40. **Portée maximum.** — La portée X est donnée par la formule

$$X = 2h \sin 2\alpha.$$

En faisant  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ , on obtient le maximum 1 de  $\sin 2\alpha$ . Donc la *portée maximum*  $X_M$  correspond à l'angle de projection  $\alpha_M = \frac{\pi}{4}$ , et a pour valeur

$$X_M = 2h.$$

La trajectoire de portée maximum, qui a pour équation  $y = x - \frac{x^2}{2h}$ , touche la parabole de sécurité sur l'axe des  $x$ .

Le foyer de cette trajectoire de portée maximum est situé sur l'axe des  $x$ , puisqu'il est situé sur la verticale du sommet, à une distance  $h$  de l'origine.

Au point de chute de la trajectoire de portée maximum, la durée du trajet  $T = \frac{2V_0}{g} \sin \alpha$  devient

$$T = \frac{V_0}{g} \sqrt{2}.$$

La flèche

$$Y_s = \frac{X_s}{2} \tan \alpha$$

devient

$$Y_s = \frac{X_s}{2} = \frac{h}{2}.$$

**Règle mnémonique.** — La portée maximum exprimée en kilomètres est, approximativement, égale au carré de la vitesse initiale exprimée en hectomètres. Ainsi, pour  $V_0 = 700^m$ , la portée maximum est d'environ  $49^{km}$ .

$$\text{Formule : } X_M = \frac{V_0^2}{g} = \frac{490000}{10} = 49^{km}.$$

**Variations  $\partial X$  et  $\partial T$  au voisinage de la portée maximum.** Les formules du n° 28 (Rem. II), en y faisant

$$\partial V_0 = 0, \quad \alpha = \frac{\pi}{4},$$

donnent

$$\frac{\partial X}{X} = -2 \frac{\partial \alpha}{\alpha}, \quad \frac{\partial T}{T} = \partial \alpha.$$

**41. Trajectoires conjuguées du point de chute.** — 1° On appelle *trajectoires conjuguées du point de chute* les trajectoires dont les angles de projection sont  $\alpha$  et  $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ .

Elles ont même portée : en effet, on a

$$X = 2h \sin 2\alpha \quad \text{et} \quad \sin(\pi - 2\alpha) = \sin 2\alpha.$$

La trajectoire  $\alpha$  est dite *trajectoire tendue*; la trajectoire  $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ , *trajectoire courbe*. On suppose  $\alpha < \frac{\pi}{4}$ .

Ces deux trajectoires se confondent avec la trajectoire de portée maximum, pour  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .

2° Les équations de deux trajectoires conjuguées du point de chute

sont

$$y = x \tan \alpha - \frac{x^2}{4h \cos^2 \alpha} \quad \text{et} \quad y = x \cot \alpha - \frac{x^2}{4h \sin^2 \alpha}.$$

Pour une même abscisse  $x$ , on trouve, entre les éléments  $(y, \tan \tau, u, t)_1$  de l'une des trajectoires et les éléments  $(y, \tan \tau, u, t)_2$  de l'autre, les relations

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{\tan \tau_1}{\tan \tau_2} = \tan^2 \alpha, \quad \frac{t_1}{t_2} = \frac{u_1}{u_2} = \tan \alpha.$$

Comme on a

$$\cos(\pi - 2\alpha) = -\cos 2\alpha,$$

les foyers des deux paraboles conjuguées qui sont (35) à une altitude

$$Y_f = -\frac{V_0^2}{2g} \cos 2\alpha$$

sont à la même distance, l'un au-dessus et l'autre au-dessous de l'origine.

3° Si, sur deux trajectoires conjuguées du point de chute, on joint, à chaque instant, les positions des deux projectiles partis au même instant, cette droite conserve une direction constante. Soit  $(x_1, y_1)$  au temps  $t$ , la position du projectile sur la trajectoire  $\alpha$ . On a

$$x_1 = V_0 t \cos \alpha, \quad y_1 = V_0 t \cos \alpha - \frac{1}{2} g t^2.$$

Sur la trajectoire  $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ , on aura, pour le point  $(x_2, y_2)$  atteint par le projectile,

$$x_2 = V_0 t \sin \alpha, \quad y_2 = V_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2.$$

La direction de la droite qui unit les deux points est

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

c'est-à-dire  $(-1)$ . Elle est perpendiculaire à la bissectrice des axes.

Cette droite se déplace (32, 3°) avec une vitesse

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (u_0 + w) = \frac{\sqrt{2}}{2} [V_0 (\sin \alpha + \cos \alpha) - g t].$$

Lorsqu'elle arrive tangentiellement à l'une des deux trajectoires, son mouvement doit s'annuler, puis changer de sens; c'est ce qui arrive pour

$$t = \frac{V_0}{g} (\sin \alpha + \cos \alpha).$$



a. Si l'on prend pour échelle

$$x_1 = \frac{x}{4h}, \quad y_1 = \frac{y}{4h},$$

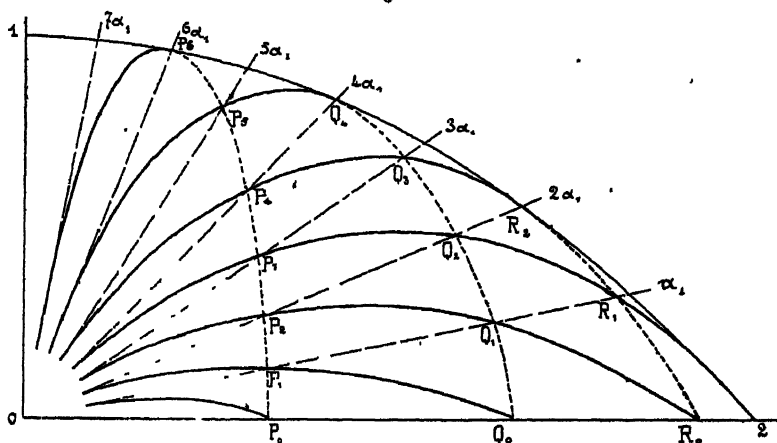
toutes les trajectoires du vide, quel que soit  $h$ , c'est-à-dire la vitesse initiale, seront représentées par la même équation

$$y_1 = x_1 \tan \alpha - x_1^2 (1 + \tan^2 \alpha).$$

b. Démontrer que si l'on prend pour échelle

$$x_2 = \frac{x}{\sin \alpha \cos \alpha}, \quad y_2 = \frac{y}{\sin^2 \alpha},$$

Fig. 21.



toutes les trajectoires de la famille  $V_0 = \text{const.}$  sont représentées par l'équation unique

$$y_2 = x_2 - \frac{x_2^2}{2h} \quad \left( \text{trajectoire } \alpha = \frac{\pi}{4} \right).$$

c. En coordonnées polaires  $(\rho, \sigma)$ , l'équation de la parabole de sécurité est

$$\rho = \frac{2h}{1 + \sin \sigma}.$$

2° On a représenté sur la figure 21 un réseau de trajectoires  $V_0 = \text{const.}$ , en choisissant des angles de projection en progression arithmétique de raison

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{16} = 11^\circ, 15'.$$

43. Trajectoires orthogonales des paraboles de la famille  $V_0 = \text{const.}$

(Lieutenant Haag). — De

$$(1) \quad y = x \operatorname{tang} \alpha - \frac{x^2}{4h} (1 + \operatorname{tang}^2 \alpha),$$

on déduit, en différentiant :

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang} \alpha - \frac{x}{2h} (1 + \operatorname{tang}^2 \alpha).$$

On aura l'équation différentielle des *trajectoires orthogonales* en changeant  $dy$  en  $-dx$  et  $dx$  en  $dy$ . C'est donc

$$(2) \quad -\frac{dx}{dy} = \operatorname{tang} \alpha - \frac{x}{2h} (1 + \operatorname{tang}^2 \alpha).$$

Entre ces deux équations, il faut éliminer l'une quelconque des variables  $(x, y, \alpha)$ . L'élimination de  $\alpha$  est compliquée. Celle de  $y$  est immédiate, mais ne conduit pas à une équation visiblement intégrable. Faisons alors, au préalable, le changement de variable

$$(3) \quad x \operatorname{tang} \alpha \doteq \zeta.$$

Les équations (1) et (2) deviennent

$$(4) \quad y = \zeta - \frac{\zeta^2}{4h} - \frac{x^2}{4h},$$

$$(5) \quad -x dx = \left[ \zeta - \frac{x^2}{2h} - \frac{\zeta^2}{2h} \right] dy.$$

Éliminons  $x^2$  entre ces deux équations, on a

$$(6) \quad (\zeta - 2h) d\zeta = (2y - \zeta - 2h) dy,$$

équation qui s'intégrera en posant

$$(7) \quad 2y - \zeta - 2h = \xi(\zeta - 2h).$$

Éliminant, en effet,  $y$  entre (6) et (7), il vient

$$2 d\zeta = \xi [d\zeta + (\zeta - 2h) d\xi + \xi d\zeta]$$

ou

$$(2 - \xi - \xi^2) d\zeta = \xi(\zeta - 2h) d\xi,$$

qu'on écrira

$$\frac{d\zeta}{\zeta - 2h} = \frac{\xi d\xi}{2 - \xi - \xi^2} = -\frac{d\xi}{3} \left( \frac{2}{\xi + 2} + \frac{1}{\xi - 1} \right).$$

Intégrant, il vient

$$(8) \quad (\zeta - 2h)^3 (\xi + 2)^2 (\xi - 1) = K.$$



Si, de (4), on tire  $\zeta$  en fonction de  $(x, y)$ , puis  $\xi$  de (7), en portant dans (8), on aura l'équation générale implicite des courbes cherchées.

Il est plus avantageux de chercher une représentation paramétrique. Si l'on pose

$$(9) \quad (\zeta - 2h)(\xi + 2) = \lambda,$$

l'équation (8) devient

$$\lambda^3(\xi - 1) = K(\xi + 2),$$

d'où

$$(10) \quad \xi = \frac{\lambda^3 + 2K}{\lambda^3 - K}, \quad \zeta = \frac{\lambda^3 + 6h\lambda^2 - K}{3\lambda^2}.$$

Portant dans (7), on tire  $y$  :

$$(11) \quad y = \frac{2\lambda^3 + 12h\lambda^2 + K}{6\lambda^2}.$$

Portant dans (4), on tire  $x^2$  :

$$(12) \quad x^2 = -\frac{(\lambda^3 + 6h\lambda^2 - K)^2}{9\lambda^4} - \frac{2hK}{\lambda^2}.$$

Cette dernière équation montre que la courbe n'est réelle que si  $hK < 0$ . On peut donc poser, par exemple,  $K = -K_1^2 h$ . Les équations (11) et (12) deviennent

$$(13) \quad \begin{cases} x^2 = \frac{2K_1^2 h^2}{\lambda^2} - \frac{(\lambda^3 + 6h\lambda^2 + K_1^2 h)^2}{9\lambda^4}, \\ y = \frac{\lambda^3 + 6h\lambda^2 - K_1^2 h}{3\lambda^2}. \end{cases}$$

Elles permettent d'avoir commodément autant de points de la courbe que l'on veut.

Le point sur la parabole de sécurité est donné par

$$\zeta - 2h = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda^3 = K.$$

Portant dans (11), il vient

$$y = 2h + \frac{\sqrt[3]{K}}{2},$$

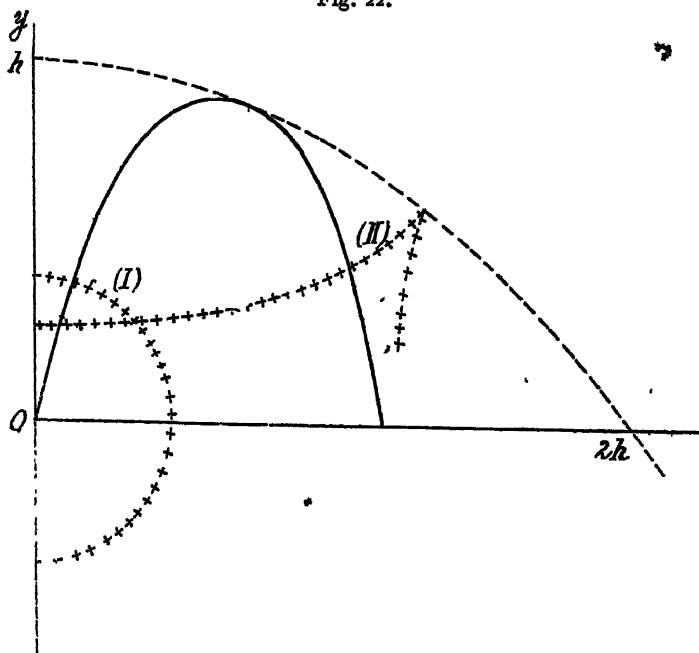
d'où

$$x^2 = -4h \left( h + \frac{\sqrt[3]{K}}{2} \right).$$

Les trajectoires orthogonales possèdent un point de rebroussement sur la parabole de sécurité.

On a les types de courbes désignées (I) et (II) sur la figure ci-dessous.

Fig. 22.



44. Maximum de l'arc et de l'aire. — 1° *Maximum de l'arc.* — L'arc  $s$  a pour expression (21)

$$s = 2h \cos^2 \alpha (\xi_2 \alpha - \xi_2 \tau),$$

entre  $\alpha$  et  $\tau$ . Pour avoir l'arc total  $S$  de l'origine au point de chute, il faut faire  $\tau = -\alpha$ ; on a

$$\xi_2(-\alpha) = -\xi_2 \alpha.$$

Donc

$$S = 4h \xi_2 \alpha \cos^2 \alpha.$$

Cherchons le maximum de  $S$ , en faisant  $\frac{dS}{d\alpha} = 0$ .

On a, en tenant compte de la relation de définition

$$\frac{d\xi_2}{d\tau} = \frac{1}{\cos^4 \tau},$$

la formule

$$\frac{dS}{d\alpha} = 4h \left( \frac{1}{\cos \alpha} - 2\xi_2 \alpha \sin \alpha \cos \alpha \right).$$

Par suite, l'angle  $\alpha'$  donnant le maximum  $S_{\max}$  de l'arc est défini par

la condition

$$\xi_2 \alpha' = \frac{1}{2 \sin \alpha' \cos^2 \alpha'}$$

ou, en développant  $\xi_2 \alpha' (21)$  :

$$\frac{\sin \alpha'}{\cos^2 \alpha'} + \log \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha'}{2} \right) = \frac{1}{\sin \alpha' \cos^2 \alpha'},$$

qui devient

$$\log \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha'}{2} \right) = \frac{1}{\sin \alpha'},$$

ou encore

$$\tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha'}{2} \right) = e^{\frac{1}{\sin \alpha'}}.$$

Cette équation est satisfaite pour  $\alpha' = 56^\circ, 12$ .

A cette valeur correspond l'arc maximum de trajectoire situé au dessus de l'horizontale de la bouche.

On a

$$S_{\max} = \frac{2h}{\sin \alpha'} = 2,398 h.$$

*Remarque.* — Pour  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ , où la portée maximum est  $X_M = 2h$ , l'arc correspondant est

$$S_{\frac{\pi}{4}} = 4h \xi_2 \frac{\pi}{4} \cos^2 \frac{\pi}{4} = 2,296 h = 1,148 X_M.$$

2° *Maximum de l'aire.* — On a

$$\text{aire} = \int_0^x y dx = \frac{1}{2} x^2 \left( \tan \alpha - \frac{g}{3u_0^3} x \right),$$

d'où

$$\text{aire totale} (x = X) = \frac{8}{3} h^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha.$$

Le maximum a lieu pour  $\tan \alpha = \sqrt{3}$ , c'est-à-dire pour  $\alpha = 60^\circ$ .

L'aire maximum est

$$\frac{\sqrt{3}}{2} h^2$$

*Remarque.* — Si l'on considère deux trajectoires conjuguées dont les aires sont  $A_1$  et  $A_2$ , on a

$$A_1 + A_2 = \frac{4}{3} h^2 \sin 2\alpha, \quad A_1 - A_2 = \frac{2}{3} h^2 \sin 4\alpha.$$

45. *Théorème de l'abaissement constant.* — Soient  $OA_1$  et  $OA_2$  deux trajectoires de la famille  $V_0 = \text{const.}$  Considérons, sur les lignes de pro-

jection, les deux éloignements  $OK_1$  et  $OK_2$  égaux. On a, pour la première trajectoire,  $OK_1 = \frac{x_1}{\cos \alpha_1}$  et, pour la seconde,  $OK_2 = \frac{x_2}{\cos \alpha_2}$ .

L'abaissement  $(y_1 - x_1 \tan \alpha_1)$  de la première a pour expression

$$\frac{x_1^2}{4h \cos^2 \alpha_1}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{OK_1^2}{4h}.$$

Pour la seconde, l'abaissement sera  $\frac{OK_2^2}{4h}$ . L'égalité  $OK_1 = OK_2$  entraîne celle des abaissements et l'on a

$$K_1 A_1 = K_2 A_2 = K_0 A_0.$$

On peut donc déduire l'une de l'autre, par exemple de la trajectoire  $\alpha = 0$ , toutes les trajectoires de la famille  $V_0 = \text{const.}$  A cet effet, sur  $OK$  faisant avec  $OK_0$  un angle  $\alpha_1$ , on rabattra  $K_0$  en  $K_1$ ; puis, sur la verticale de  $K_1$ , on prendra  $K_1 A_1 = K_0 A_0$ ; le point  $K_1$  est un point de la trajectoire  $\alpha_1$ .

La propriété de l'abaissement constant appartient aussi à la tangente en  $A$  qui joint deux points infiniment voisins de la trajectoire  $OK$ . Donc, pour avoir la tangente en  $A_1$ , on relèvera  $B_0$  en  $B_1$  sur la tangente  $OK_1$ , et l'on joindra  $A_1 B_1$ , qui sera la tangente cherchée.

3° *Les tangentes, aux points correspondants passent par un point fixe de l'axe des  $y$ .* — Soit la tangente en  $A_1$  qui coupe l'axe des  $y$  en  $P$ . On a

$$\frac{OP}{K_1 A_1} = \frac{OB_1}{B_1 K_1}.$$

Or, d'après la construction de  $A_1$  et de la tangente, l'abaissement  $K_1 A_1$  est une constante; l'éloignement  $OK_1$  également, et aussi  $OB_1$ .

On a donc  $OP = \text{const.}$ , et, considérant ce point par rapport à la trajectoire  $A_0$ , on a

$$OP = K_0 A_0 \frac{OB_0}{B_0 K_0}.$$

Pour calculer  $OB_0$ , partons de l'équation de la trajectoire  $OA_0$ , qui est

$$y = -\frac{1}{2} \frac{g x^2}{V_0^2}; \quad \text{donc} \quad \tan \tau = -\frac{gx}{V_0^2} = -\frac{g}{V_0^2} OK_0.$$

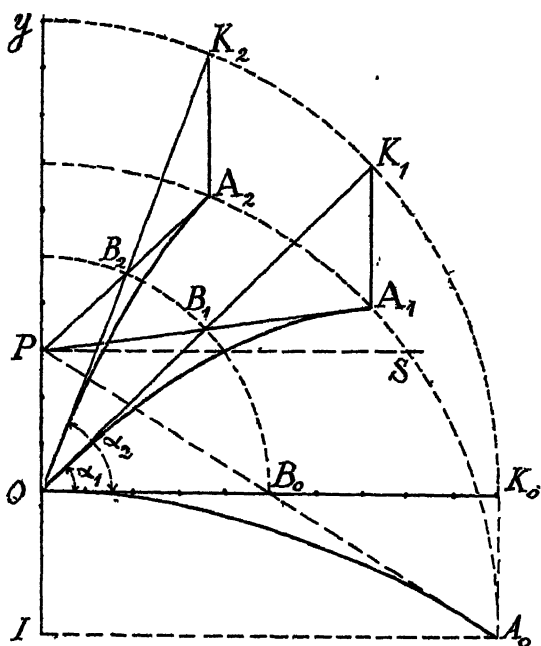
Par suite,

$$B_0 K_0 = K_0 A_0 \cot \tau = \frac{1}{2} \frac{gx^2}{V_0^2} \frac{V_0^2}{gx} = \frac{x}{2} = \frac{OK_0}{2}.$$

Le point  $B_0$  est ainsi le milieu de  $OK_0$ . Donc  $OP = K_0 A_0$ , c'est-à-dire est égal à l'abaissement.

4° Si l'on suppose des fils attachés le long de  $OK_0$  et ayant leurs extrémités inférieures au profil de la parabole  $OA_0$ , il suffira de faire tourner

Fig. 23.



la tige  $OK_0$  autour de  $O$  pour que le profil inférieur des fils dessine constamment la trajectoire correspondant à l'angle  $\alpha$ .

L'aire curviligne  $OK_1A_1$  est équivalente à l'aire  $OK_0A_0 \cos \alpha_1$ .

Le lieu d'un point  $A_0$  de la trajectoire est une circonférence  $A_0A_1A_2$  ayant son centre en  $I$  sur l'axe des  $y$ , à une distance au-dessous de l'origine égale à l'abaissement  $K_0A_0$ .

*Remarque.* — Le théorème de l'abaissement constant n'est que la traduction de l'indépendance du mouvement suivant les axes. Rapportées à la tangente à l'origine et à une verticale avec, pour coordonnées, l'éloignement  $z$  et l'abaissement  $y$ , les équations d'une trajectoire quelconque sont

$$z = V_0 t, \quad y = \frac{1}{2} g t^2,$$

équations indépendantes de l'angle de projection.

5° Les temps mis par le projectile pour aller aux points correspondants

$A_0, A_1, A_2, \dots$  sont les mêmes. On a, en effet,

$$OK_0 = OK_1 = OK_2 = V_0 t \quad \text{et} \quad K_0 A_0 = K_1 A_1 = K_2 A_2 = \frac{1}{2} g t^2.$$

Les vitesses en  $A_0, A_1, A_2$  sont représentées par les trois côtés des triangles  $A_0 B_0 K_0, A_1 B_1 K_1$  et  $A_2 B_2 K_2$ , et l'on a :

*Vitesses verticales :*

$$A_0 K_0 = A_1 K_1 = A_2 K_2 = g t;$$

*Vitesses suivant la tangente à l'origine :*

$$B_0 K_0 = B_1 K_1 = B_2 K_2 = V_0;$$

*Vitesses totales, suivant les tangentes :*

$$A_0 B_0, \quad A_1 B_1, \quad A_2 B_2,$$

ou encore

$$\frac{1}{2} P A_0, \quad \frac{1}{2} P A_1, \quad \frac{1}{2} P A_2.$$

*Problème.* — Quel est l'angle de projection qui donne le maximum de la différence  $(z - y)$  de l'éloignement  $z$  et de l'abaissement  $y$  du point de chute ?

On a

$$z - y = 4 h (1 - \sin \alpha) \sin \alpha,$$

d'où

$$\frac{d(z - y)}{d\alpha} = 4 h (1 - 2 \sin \alpha) \cos \alpha.$$

Donc

$$\sin \alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha = 30^\circ.$$

**46. Lieu des points d'éclatement.** — On suppose que des projectiles lancés avec la même vitesse initiale  $V_0$ , sous des angles de projection variables, éclatent au bout d'un même temps  $\theta$ . Quel est le lieu de leurs points d'éclatement ?

On éliminera  $\alpha$  entre les deux équations

$$y = x \tan \alpha - \frac{x^2}{4 h \cos^2 \alpha} \quad \text{et} \quad x = V_0 \theta \cos \alpha.$$

On trouve

$$x^2 + y^2 + g \theta^2 y = V_0^2 \theta^2 - \frac{g^2 \theta^4}{4}.$$

C'est une circonférence, qu'on peut mettre sous la forme

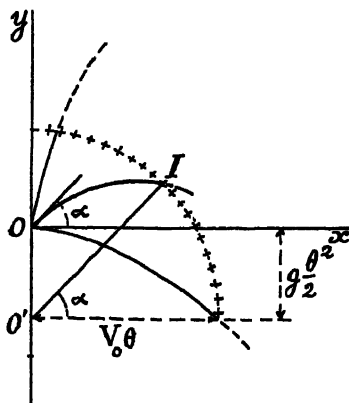
$$x^2 + y'^2 = V_0^2 \theta^2,$$

en posant

$$y = y' - \frac{1}{2} g \theta^2.$$

Le centre  $O'$  est au-dessous de l'origine à une distance égale à la hauteur de chute verticale  $\frac{1}{2} g \theta^2$ , pendant le temps  $\theta$ . Le rayon est  $V_0 \theta$ , parcours du projectile si la pesanteur n'agissait pas.

Fig. 24.



On obtient le point d'éclatement  $I$  sur une trajectoire déterminée en menant du point  $O'$  une parallèle à la tangente initiale.

1° Lorsque la durée  $\theta$  varie, les circonférences, lieux des points d'éclatement, ont une enveloppe qu'on obtiendra en éliminant  $\theta^2$  entre l'équation du cercle et cette même équation dérivée par rapport à  $\theta^2$  : on trouve la parabole  $x^2 = 4h^2 - 4hy$ . C'est la parabole de sécurité (39).

Chaque circonférence touche l'enveloppe en  $M$  à son intersection avec l'horizontale  $y = 2h - \frac{g\theta^2}{2}$ , c'est-à-dire à une hauteur de  $2h$  au-dessus du centre  $O_2$ . Mais tous les cercles ne toucheront pas l'enveloppe; il faut, en effet, que l'intersection du cercle et de l'horizontale précédente soit réelle.

On discutera aisément cette condition.

Si  $\theta < \frac{V_0}{g}$  ou  $\frac{g\theta^2}{2} < h$ , le lieu est la circonférence (I) qui ne touche point la parabole de sécurité;

Si  $\theta > \frac{V_0}{g}$  ou  $\frac{g\theta^2}{2} > h$ , le lieu est la circonférence (II) qui touche la parabole de sécurité au point  $M_2$ ; quand  $\theta$  croît, ce point se déplace graduellement, à partir du point  $D$ , sur la branche descendante de la parabole de sécurité;





Ainsi, au point de chute, on a

$$T = \frac{2u_0}{g} \tan \alpha$$

et, par suite,

$$l = AT \left[ 1 - \alpha \frac{g T^2}{2.6} \right].$$

Telle est la formule de graduation cherchée.

**47. Lieu des points où  $\tau = \text{const.}$**  — On peut se proposer d'autres problèmes. Ainsi, on peut chercher le lieu des points où, dans la famille  $V_0 = \text{const.}$ , les inclinaisons  $\tau$  sont les mêmes.

Soit  $\tau = \tau_0$ . On a

$$x = 2h \cos^2 \alpha (\tan \alpha - \tan \tau_0), \quad y = h \cos^2 \alpha (\tan^2 \alpha - \tan^2 \tau_0).$$

Éliminant  $\alpha$  entre les deux relations, il viendra

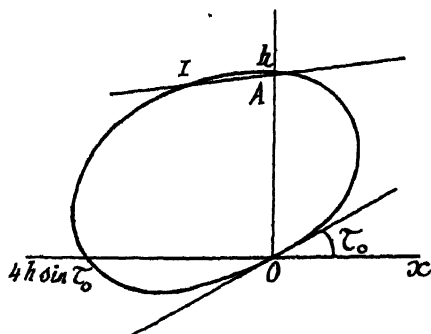
$$x^2 + (x \tan \tau_0 - 2y)^2 = 4h(y - x \tan \tau_0).$$

C'est une ellipse partant de l'origine avec une tangente faisant l'angle  $\tau_0$ , et coupant la verticale au point  $h$ .

Quand  $\tau_0$  varie, l'enveloppe des ellipses est la parabole de sécurité qui est touchée au point I tel que la droite IA ait pour équation

$$x \tan \tau_0 - 2y = -2h.$$

Fig. 26.



*Remarque.* — Si  $\tau_0 = 0$ , on doit retrouver le lieu des sommets (38, 4°); c'est bien

$$x^2 + 4y^2 = 4hy.$$

**48. Les courbes des Tables de tir.** — Les *Tables de tir* à vitesse constante sont un tableau qui, en regard de l'argument X, la *portée*, croissant en progression arithmétique, fait connaître :

1° Les éléments du *pointage*, c'est-à-dire l'angle de *projection*  $\alpha$  et la *hausse*  $h$  correspondante, définie par l'équation

$$h = l \tan \alpha,$$

$l$  étant la longueur constante de la *ligne de mire* ;

2° Les éléments du *point de chute* qui, dans le vide, se réduisent à la seule *durée du trajet*  $T$  (puisqu'on a  $\omega = -\alpha$  et  $V_{\omega} = V_0$ ) ;

3° Les éléments du *sommet*, c'est-à-dire, dans ce cas, la *flèche*  $Y$ , seulement (puisqu'on a  $X_s = \frac{X}{2}$ ,  $T_s = \frac{T}{2}$ ,  $V_s = u_0$ ).

On aura donc, dans les tables de tir, les cinq colonnes suivantes :

$$X, \alpha, h, T, Y.$$

Il convient de donner la forme des courbes ayant  $X$  pour abscisse et pour ordonnée une des grandeurs ( $\alpha, h, T, Y_s$ ).

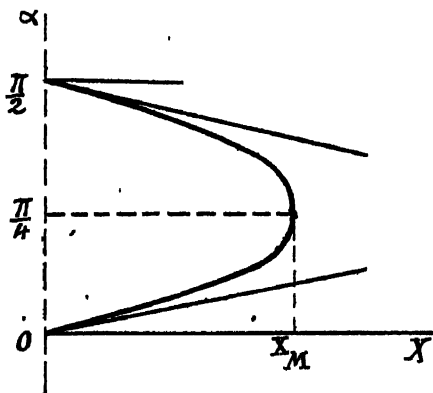
1° *Angle de projection*  $\alpha$  en fonction de  $X$ . — La courbe ( $X, \alpha$ ) a pour équation

$$X = 4 h \sin \alpha \cos \alpha.$$

La tangente est donnée par la formule

$$\frac{dX}{d\alpha} = 4 h \cos 2\alpha.$$

Fig. 27.



La courbe part de l'origine tangentielllement à la droite  $X = 4 h \alpha$ ; elle admet un maximum pour  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  et  $X_M = 2 h$ .

Elle vient finir au point  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , avec une tangente symétrique de la

tangente à l'origine. Le développement de  $X$  en série est le suivant :

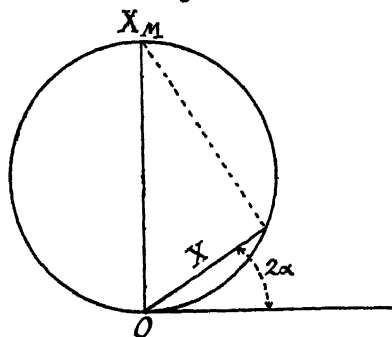
$$X = 2h \left[ 2\alpha - \frac{(2\alpha)^3}{3!} + \frac{(2\alpha)^5}{5!} - \dots \right].$$

*Remarque.* — En coordonnées polaires, si l'on prend  $X$  comme rayon vecteur et  $2\alpha$  comme angle polaire, la courbe est une circonférence  $X = 2h \sin 2\alpha$ , tangente à l'origine et de rayon  $\frac{X_M}{2} = h$ .

On a, en effet,

$$X = X_M \sin 2\alpha.$$

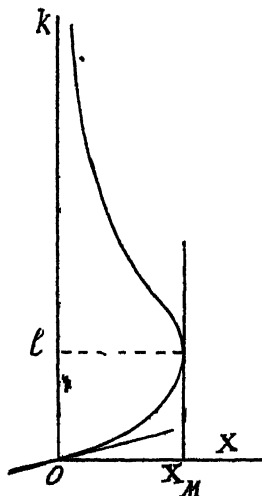
Fig. 28.



2° *Courbe des hausses k.* — Comme on peut écrire

$$X = 4h \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha},$$

Fig. 29.



en combinant avec  $k = l \tan \alpha$ , il viendra l'équation du troisième degré

en  $X$  et  $k$  :

$$X(l^2 + k^2) = \frac{1}{4} h l k.$$

On en tire

$$\frac{dk}{dX} = \frac{1}{4h} \frac{(l^2 + k^2)^2}{l^2 - k^2},$$

et la courbe, qui part de l'origine avec une tangente égale à

$$\left(\frac{dk}{dX}\right)_0 = \frac{l}{4h},$$

présente un maximum pour  $X = X_M$  et  $k = l$ .

3° *Courbe des durées de trajet T.* — On a

$$X^2 = V_0^2 T^2 - \frac{g^2 T^4}{4}$$

et

$$\frac{dT}{dX} = \frac{\sqrt{4V_0^2 - g^2 T^2}}{2V_0^2 - g^2 T^2}.$$

La courbe part de l'origine avec une tangente égale à

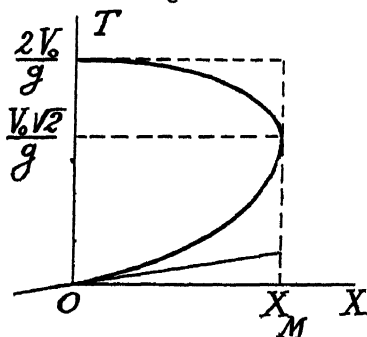
$$\left(\frac{dT}{dX}\right)_0 = \frac{1}{V_0}.$$

Elle présente un maximum pour

$$X_M \quad \text{et} \quad T_M = \frac{V_0 \sqrt{2}}{g}.$$

Elle vient finir, horizontalement, sur l'axe des  $T$ , pour  $T = \frac{2V_0}{g}$ . Si l'on prend pour coordonnées  $X^2$  et  $T^2$ , la courbe est une parabole.

Fig. 30.



4° *Courbe des flèches  $Y_s$ .* — On a

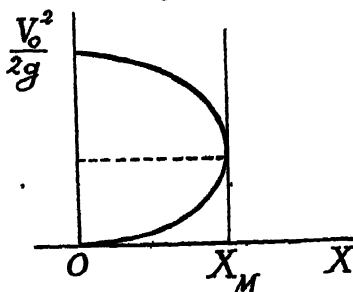
$$Y_s = \frac{1}{8} g T^2 \quad (26);$$

en portant dans l'équation  $X^2 = V_0^2 T^2 - g^2 \frac{T^4}{4}$ , il viendra

$$2Y^2 + \frac{X^2}{8} = \frac{V_0^2 Y_s}{g};$$

c'est donc une ellipse.

Fig. 31.

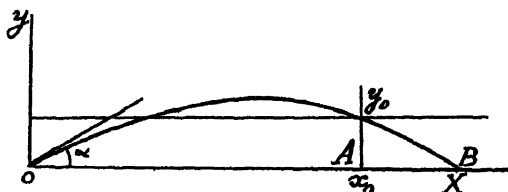


49. *La zone dangereuse.* — Soit un but de hauteur  $y_0$ . La *zone dangereuse*  $Z$ , correspondant à cette hauteur, est la longueur  $AB$ , sur la trajectoire d'angle de projection  $\alpha$ , entre le pied  $x_0$  de l'ordonnée  $y_0$  et le point de chute  $B$ .

On a donc  $Z = X - x_0$ , et  $x_0$  est donné en fonction de  $y_0$  par l'équation

$$y_0 = x_0 \tan \alpha - \frac{x_0^2}{4h \cos^2 \alpha},$$

Fig. 32.



d'où l'on tire

$$x_0 = 2h \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{y_0}{h \sin^2 \alpha}} \right) \sin \alpha \cos \alpha.$$

On a donc

$$Z = X - x_0 = 2h \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{y_0}{h \sin^2 \alpha}} \right) \sin \alpha \cos \alpha$$

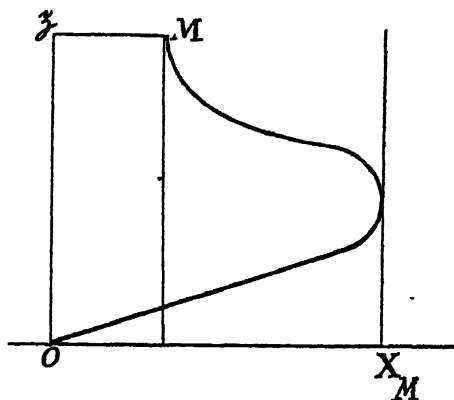
ou encore

$$Z = \frac{X}{2} \left( 1 \pm \sqrt{\frac{y_0}{Y_s}} \right).$$

La courbe n'est réelle que si  $y_0 < Y_s$ , ou  $\sin^2 \alpha > \frac{y_0}{h}$  (point M).

La zone dangereuse décroît ensuite constamment, en affectant l'allure de la courbe figurée ci-dessous.

Fig. 33.



## II. — PROBLÈME DU BUT A BATTRE.

50. **Solution géométrique du problème du but à battre.** — Ce problème, qui résume les propriétés des trajectoires de la famille  $V_0 = \text{const.}$ , s'énonce ainsi :

*Étant connue la vitesse initiale  $V_0$  d'un projectile, sous quel angle doit-on le lancer pour atteindre un but donné A ?*

1° Voici quelle en sera la solution géométrique (La Hire, 1683). D'après le théorème du n° 38, 2°, le foyer de la parabole répondant à la question doit se trouver d'abord sur la circonférence de centre O et de rayon  $OD = h$ , lieu des foyers. Il doit aussi se trouver, d'après la définition de la parabole, sur une autre circonférence, ayant le but A pour centre et tangente à la directrice D'D'.

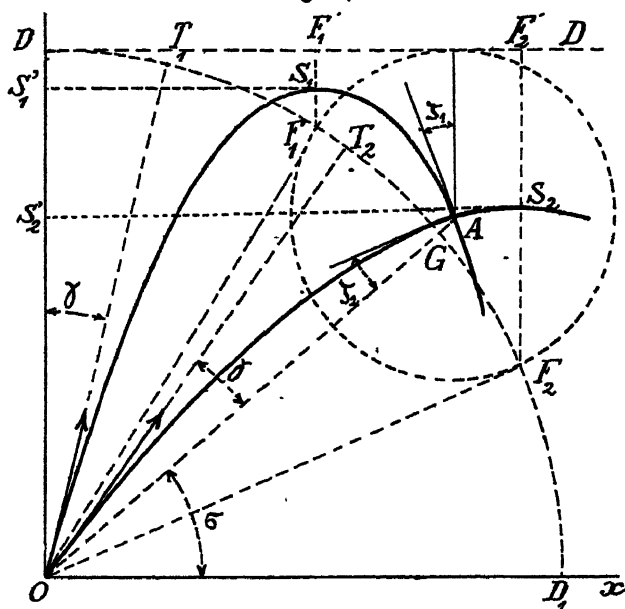
L'intersection de ces deux circonférences donne, en général, deux points  $F_1$  et  $F_2$ , foyers de deux paraboles répondant à la question et déterminées par le foyer, la directrice et le point O. Ces deux paraboles sont dites les deux *trajectoires conjuguées* du but A. L'une correspond au *tir tendu* ou *direct*, l'autre au *tir courbe* ou *indirect*.

Les sommets  $S_1$  et  $S_2$  des deux paraboles sont au milieu des perpendiculaires  $F_1F'_1$  et  $F_2F'_2$ , abaissées des foyers sur la directrice DD'.

Pour déterminer la tangente OT, à l'origine de la trajectoire, il suffit, d'après une propriété connue de la parabole, de joindre le milieu de la droite  $S_1S'_1$ , horizontale passant par le sommet  $S_1$ , au point O.

On obtiendra de même la tangente  $OT_2$  à la trajectoire conjuguée du point A.

Fig. 34.



2° *Relation entre les deux angles de projection.* — On appelle *ligne de site* la droite OA, allant de l'origine au but. Les tangentes  $OT_1$  et  $OT_2$  aux deux trajectoires conjuguées sont telles que l'angle  $\gamma'$  formé par l'une avec la ligne de site est égal à l'angle  $\gamma$  formé par l'autre avec la verticale.

Il faut démontrer que l'angle  $\gamma' = \widehat{DOT_1}$  est égal à l'angle  $\gamma = \widehat{T_2OA}$ , ou, sur la circonférence ODD<sub>1</sub>, que les deux arcs  $DT_1$  et  $GT_2$  sont égaux.

Or, d'après les propriétés des tangentes à la parabole, qui sont bissectrices de l'angle formé par le rayon vecteur allant au foyer et une perpendiculaire à la directrice, on a

$$DT_1 = T_1F_1 \quad \text{et} \quad DT_2 = T_2F_2.$$

On a donc

$$DG = 2DT_1 + F_1G = 2DT_2 - F_1G.$$

Mais  $DT_2 = T_2F_2$ ; il viendra donc

$$DT_1 = T_2F_2 - F_1G = T_2G.$$

C'est la propriété énoncée. On peut dire encore : La ligne de site OA





Deux trajectoires quelconques se coupent, comme il a été démontré, sur une ligne de site symétrique de la verticale par rapport à la bissectrice de leurs tangentes à l'origine. Si les deux trajectoires se rapprochent indéfiniment, les deux tangentes se confondent, à la limite, avec cette bissectrice  $OT_M$ , et le point  $A_M$ , de portée maximum sur chaque droite issue de l'origine, sera ainsi un point de l'enveloppe cherchée.

Ce point  $A_M$  est déterminé par la condition d'être également distant de la directrice  $DD'$  et de la circonférence  $ODD_1$  de rayon  $h$ .

On a donc

$$A_M F_M = A_M Q.$$

Le lieu du point  $A_M$  sera une parabole à axe vertical, dont on obtiendra la directrice en prenant  $PQ = OD = h$ .

On a alors, en effet,

$$OA_M = OF_M + F_M A_M = A_M Q + PQ = A_M P,$$

ce qui définit une parabole de foyer  $O$ . Le sommet de cette parabole est en  $D$ . La tangente  $OT_M$  à l'origine, qui est bissectrice de l'angle  $DOF_M$ , passe par le point  $P$ .

Pour déterminer le point  $A_M$ , on mènera donc la bissectrice  $OT_M$  qui coupe en  $P$  la droite  $2h$ . Puis on mènera  $PQA_M$  verticalement ; sa rencontre en  $A_M$  avec  $OF_M$  donne le point cherché.

La parabole de sécurité coupe l'axe des  $x$  en un point  $I$  tel que  $OI = 2h$ , sous un angle égal à  $\frac{\pi}{4}$ .

5° *Trouver le point  $A'$  de la ligne de site  $\sigma$  où le projectile tombe normalement.* — Soit  $A'B$  perpendiculaire à la directrice  $DD'$ . La tangente en  $A'$  à la trajectoire qui passe en  $A'$  est la bissectrice  $A'a$  de l'angle  $BA'F_1$ . Mais dans le cas actuel,  $A'a$  étant perpendiculaire à la bissectrice  $OA'$  de l'angle  $F_1 A' F_2$ , les trois points  $B, A', F_2$  seront en ligne droite.

Si donc  $M$  est le point de rencontre de la ligne de site  $OA'$  avec la directrice, la ligne  $MF_2$  qui joint le point  $M$  au foyer  $F_2$  coupera la verticale  $DOD''$  au point  $D''$  tel que  $OD'' = OD = h$ . La construction du point  $F_2$  et, partant, celle du point  $A'$ , en résulte immédiatement.

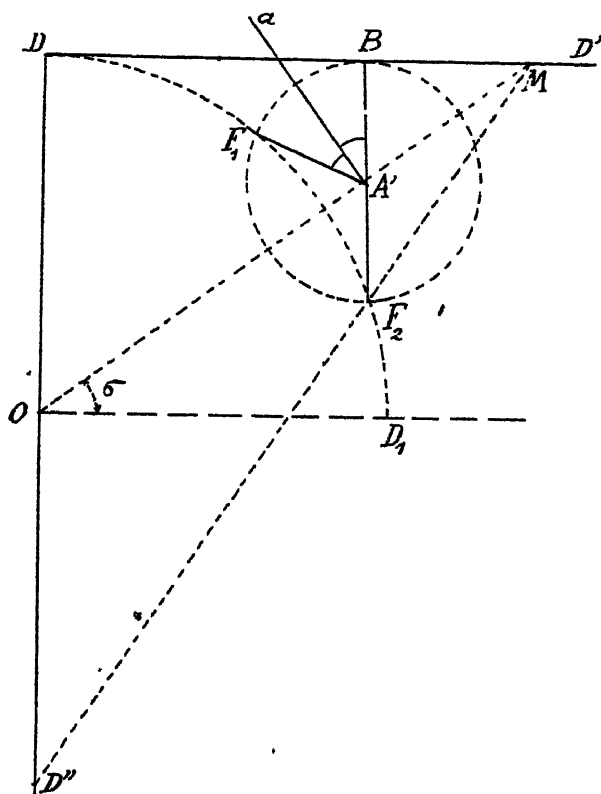
D'autre part, le point  $A'$  étant le milieu de la corde  $F_2 B$ , on énoncera le théorème suivant : *Le point  $A'$  d'une ligne de site où la tangente à une trajectoire est normale à la ligne de site est le sommet de la trajectoire conjuguée.*

lieu des points  $A'$ , quand  $\sigma$  varie, est donc l'ellipse des sommets

(38, 4°). C'est aussi le lieu des pieds des normales abaissées de l'origine sur les différentes trajectoires ( $\alpha$  variable,  $V_0$  constante), qu'on peut déduire de l'équation du n° 30 (2°)

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{1 - 2 \operatorname{tang}^2 \sigma}{\operatorname{tang} \sigma},$$

Fig. 36.



combinée avec l'équation polaire de la trajectoire.

51. **Quelques autres solutions géométriques.** — On peut résoudre le problème du but à battre par d'autres constructions géométriques que celle de La Hire, qu'on vient d'exposer. Blondel (1683) donne plusieurs de ces constructions. Voici celles de Buot et de Rümer :

Remarquons tout d'abord, d'après les propriétés élémentaires de la parabole, que la tangente à l'origine coupe la droite  $SS'$  en son milieu  $T$ , et que la droite  $DF$  passe également au point  $T$ ; de plus,  $OT$  est perpendiculaire sur  $DF$ .



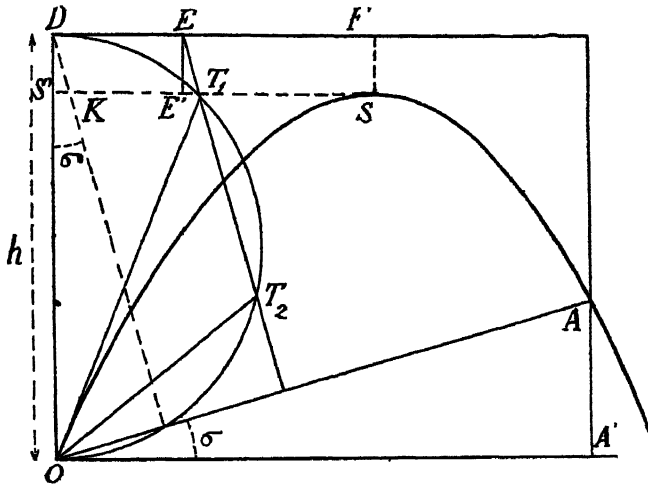
**Mais on a (34, 1°)**

$$\operatorname{tang} \tau = \left(1 - \frac{x}{2X_s}\right) \operatorname{tang} \alpha;$$

done

$$DE = \frac{X_s}{2} - (h - Y_s) \left( 1 - \frac{x}{2X_s} \right) \tan \varphi.$$

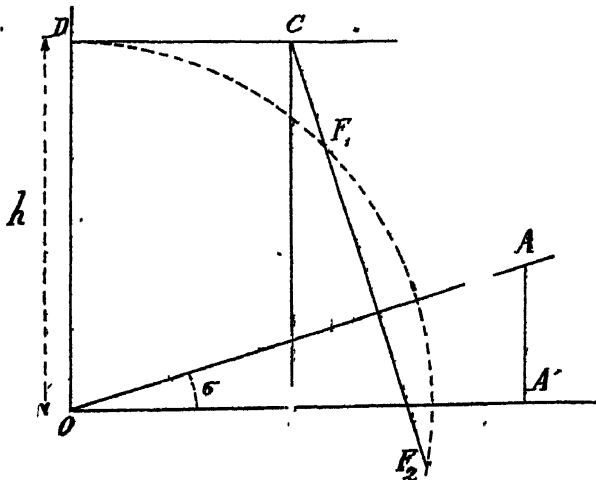
Fig. 35.



**Mais**

$$X_s = \frac{u_0^2}{g} \tan \alpha, \quad Y_s = \frac{u_0^2}{2g} \tan^2 \alpha, \quad h = \frac{V_0^2}{2g}.$$

**Fig. 39.**



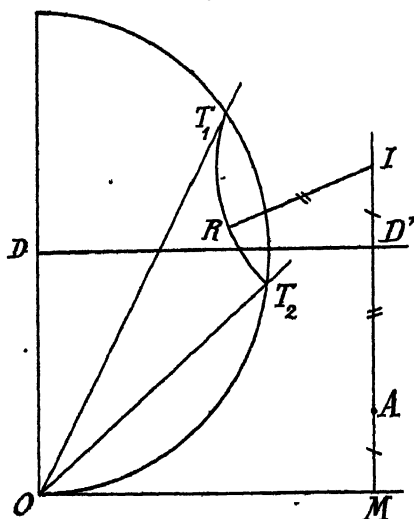
Faisant la substitution, on trouvera

$$DE = \frac{x}{4}.$$

**C. Q. F. D.**

2° Prendre  $DC = \frac{1}{2} OA$  (*fig. 39*). Mener la droite  $CF, F_2$  perpendiculaire à la ligne de site  $OA$ . Les intersections  $F, F_2$  avec la circon-

Fig. 40.



rence de centre  $O$  et de rayon  $OD$  déterminent les foyers  $F_1$  et  $F_2$  des deux trajectoires passant par le point  $A$ . Cette proposition résulte immédiatement de la précédente, le point  $T_1$  étant (*fig. 37*) le milieu de la droite  $DT, F$ .

3° Donnons une autre construction indiquée par Bailla (1883). Les tangentes à l'origine  $OT_1$  et  $OT_2$  des deux trajectoires passant en  $A$  sont déterminées par l'intersection  $T_1, T_2$  de deux circonférences; la première, de centre  $D$ , a pour rayon  $OD = h$ ; la seconde a pour centre le point  $I$ , tel que  $ID' = AM = y$ , et pour rayon  $IR$ , tel que  $IR = D'A = h - y$ .

**52. Solution de Cassini.** — Indiquons enfin la construction qui suit, fondée sur le théorème du n° 24.

Soit  $A$  le but : joignons  $OA$  et construisons, sur la *ligne d'égalité*  $OP = \frac{1}{2} h$ , le segment  $POB$  capable de l'angle de site  $\sigma$ . La demi-circonférence ainsi obtenue sera rencontrée aux points  $M$  et  $M'$  par la verticale du but  $A$ . Les droites  $OM$  et  $OM'$  sont les tangentes initiales des deux paraboles qui répondent à la question.

Dans le triangle  $MOA$ , on a, en effet,

$$\frac{OM}{\cos \sigma} = \frac{AM}{\sin \gamma}.$$

Fig. 41.

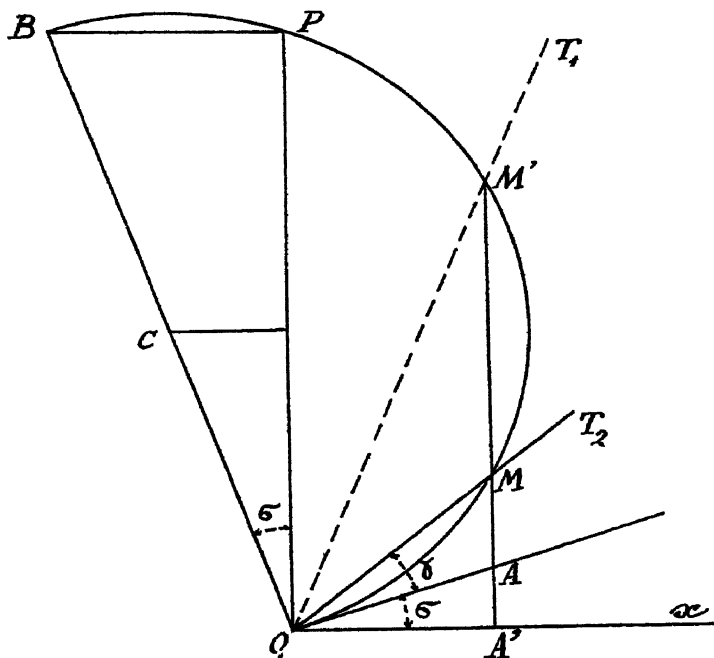
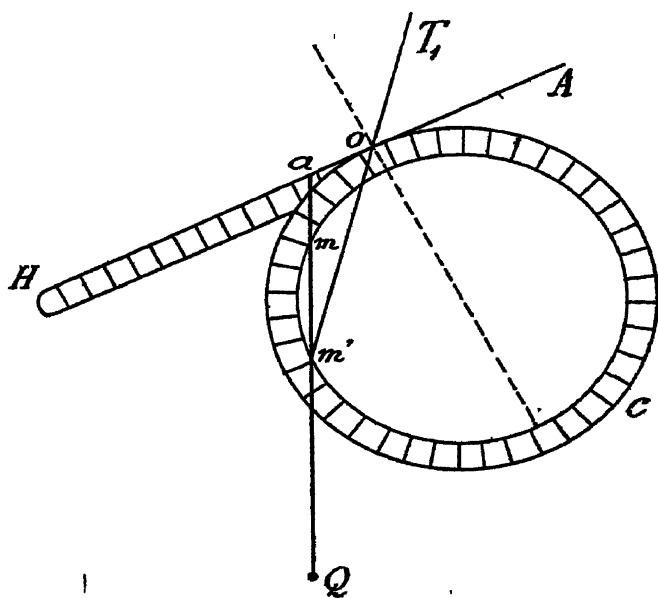


Fig. 42.



D'autre part.

$$OM = OB \sin \gamma = \frac{PO}{\cos \sigma} \sin \gamma;$$

on a donc

$$\overline{OM}^2 = AM \cdot OP,$$

ce qui est la proposition énoncée au n° 24.

*Instrument universel de Cassini.* — On a déduit, de cette construction, un appareil permettant de pointer un mortier sur un but d'angle de site quelconque. Il se compose d'un *cercle métallique* gradué C, d'une *règle graduée* OH, tangente au cercle, et d'un *fil à plomb* aQ. On voit que le système formé est semblable à la figure du théorème, et que, en visant le but le long de OH, la direction du mortier doit être OT. Pour utiliser toujours le même cercle, qui devrait avoir un rayon variable, proportionnel à  $\frac{4h}{\cos \sigma}$ , on prend  $\alpha O = AO \cos \sigma$ , c'est-à-dire égal, non à la distance du but au mortier, mais à la projection horizontale OA' de cette distance.

**§3. Solution algébrique du problème du but à battre.** — Il est nécessaire de donner maintenant les formules propres à calculer les angles de projection, que la méthode précédente détermine graphiquement.

Soient  $x_1$  l'abscisse ou distance horizontale de l'origine au but à battre,  $y_1$  l'ordonnée ou la hauteur de ce but au-dessus du plan horizontal passant par l'origine.

L'angle de site  $\sigma$  est défini par la relation  $\tan \sigma = \frac{y_1}{x_1}$ .

1° Puisque la trajectoire doit passer par le point dont les coordonnées sont  $(x_1, y_1)$ , on devra avoir, d'après l'équation de cette trajectoire,

$$(1) \quad y_1 = x_1 \tan \alpha - \frac{x_1^2}{4h} (1 + \tan^2 \alpha).$$

L'équation du second degré

$$\tan^2 \alpha - \frac{4h}{x_1} \tan \alpha + 1 + 4h \frac{y_1}{x_1^2} = 0$$

détermine les deux valeurs suivantes de  $\tan \alpha$  :

$$\tan \alpha = \frac{2h}{x_1} \pm \sqrt{\frac{4h(h - y_1)}{x_1^2} - 1}.$$

Si la quantité sous le signe  $\sqrt{\quad}$  est positive, il y a deux angles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  qui répondent à la question; si elle est nulle, les deux angles se réduisent à un seul; si elle est négative, il n'existe pas de solution réelle.

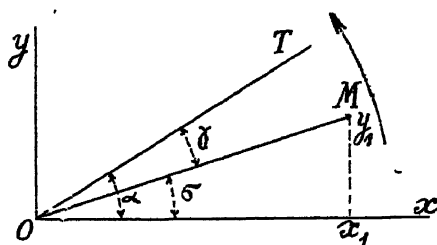
*Remarques.* — I. On pourrait discuter le problème non en partant de l'expression de  $\tan z$  ci-dessus, mais en prenant la relation (1) sous la forme équivalente

$$\sin(2z - \sigma) = \frac{x_1}{h} \cos \tau + \sin \tau,$$

qu'on peut déduire également de l'équation de la trajectoire en coordonnées polaires (29).

II. Pour la discussion algébrique des problèmes, il est nécessaire d'adopter un sens déterminé pour les divers angles que l'on peut avoir à considérer.

Fig. 43.

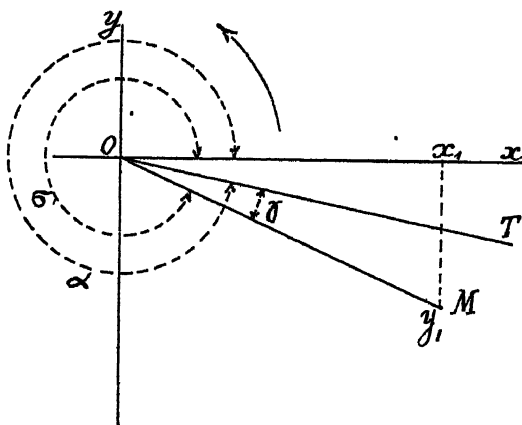


Les angles  $\sigma$ , *angle de site* ou *site*;  $\alpha$ , *angle de projection*;  $\gamma$ , *angle de hausse*, seront comptés positivement dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (fig. 43).

On a

$$\alpha = \gamma + \sigma;$$

Fig. 44.



$\alpha$  et  $\sigma$  variant de 0 à  $\frac{\pi}{2}$ . Dans le quatrième quadrant, la disposition est



celle de la figure 44; on a encore  $\alpha = \gamma + \sigma$  et les angles  $\alpha$  et  $\sigma$  sont plus grands que  $\frac{3}{2}\pi$ ; ils varient de  $\frac{3}{2}\pi$  à  $2\pi$ .

Il n'y a pas à considérer ce qui se passe dans les quadrants (2) et (4), le tir étant supposé avoir lieu toujours vers l'avant de la batterie et tout étant d'ailleurs symétrique par rapport à la verticale de l'origine.

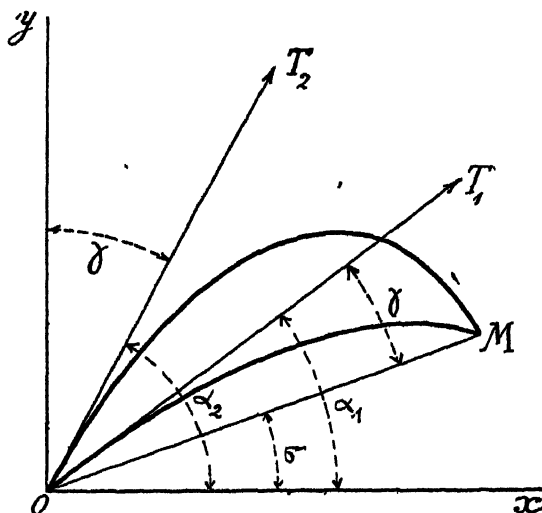
2° *Relation entre les deux angles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ .* — Si  $\tan \alpha_1$  et  $\tan \alpha_2$  sont les racines de l'équation du second degré ci-dessus, on aura

$$\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2 = \frac{4h}{x_1} \quad \text{et} \quad \tan \alpha_1 \tan \alpha_2 = 1 + 4h \frac{y_1}{x_1^2}.$$

On déduit de ces relations, en éliminant  $h$  :

$$\frac{\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2}{1 - \tan \alpha_1 \tan \alpha_2} = \tan(\alpha_1 + \alpha_2) = -\frac{1}{\tan \sigma}.$$

Fig. 45.



Donc

$$\tan(\alpha_1 + \alpha_2) \tan \sigma = -1 \quad \text{ou} \quad \tan(\alpha_1 + \alpha_2) \tan -\sigma = 1;$$

par suite,

$$\alpha_1 + \alpha_2 - \sigma = \frac{\pi}{2}$$

ou

$$\alpha_1 - \sigma = \frac{\pi}{2} - \alpha_2.$$

C'est la propriété démontrée géométriquement plus haut (§30, 1°) :

*La bissectrice de la verticale et de la ligne de site est également bissectrice de l'angle des deux tangentes à l'origine.*

Les deux angles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont plus petits que  $\frac{\pi}{2}$  si  $1 + 4h \frac{y_1}{x_1^2} > 0$ ; l'un est plus petit que  $\frac{\pi}{2}$  et l'autre plus grand que  $\frac{3\pi}{2}$  (4<sup>e</sup> quadrant), si

$$1 + 4h \frac{y_1}{x_1^2} < 0.$$

Ce cas correspond à l'hypothèse du but placé à l'intérieur de la parabole

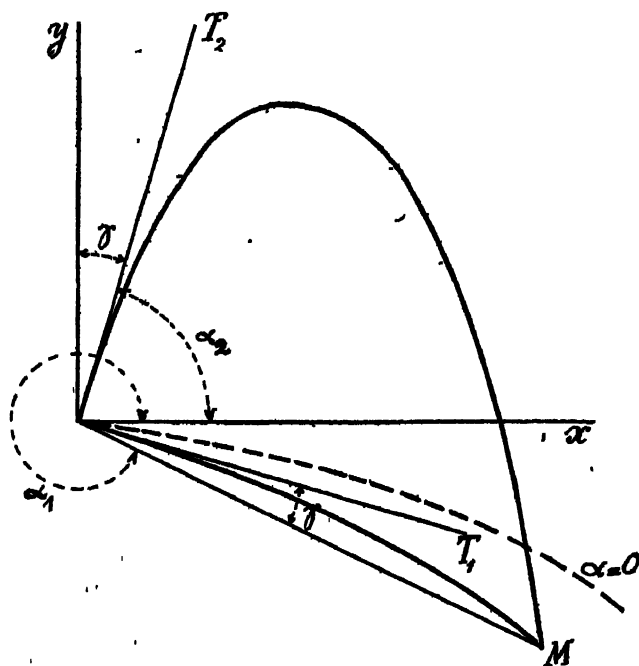
$$y_1 = -\frac{x_1^2}{4h},$$

d'angle de projection nul. On peut avoir les deux dispositions indiquées sur les figures ci-dessous.

3<sup>e</sup> Cas où les deux angles se réduisent à un seul. — Cela se produira si l'on a

$$4h(h - y_1) - x_1^2 = 0.$$

Fig. 46.



Les deux angles sont alors confondus en un seul  $\alpha_{12}$ , dont l'expres-

sion est

$$\operatorname{tang} \alpha_{12} = \frac{2h}{x_1}.$$

D'après la relation précédente, établie entre  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ , on aura

$$\alpha_{12} - \sigma = \frac{\pi}{2} - \alpha_{12}$$

ou

$$2\alpha_{12} = \frac{\pi}{2} + \sigma.$$

Donc : La ligne de projection est la bissectrice de l'angle formé par la verticale et par la ligne de site.

**54. Portée dans le site.** — 1° On appelle *portée dans le site*  $\sigma$  et l'on désigne par  $X_\sigma$ , la distance

$$X_\sigma = \frac{x_1}{\cos \sigma}$$

où un projectile coupe la ligne de site  $\sigma$ . D'après l'équation de la trajectoire (29), cette expression se met sous la forme

$$X_\sigma = 4h \frac{\sin(\alpha - \sigma) \cos \alpha}{\cos^2 \sigma}.$$

Pour avoir le maximum  $X_{\sigma_M}$ , il faut évaluer à zéro la dérivée du second membre par rapport à  $\alpha$ . On trouve

$$2\alpha_{12} = \frac{\pi}{2} + \sigma,$$

c'est-à-dire la valeur  $\alpha_{12}$  qui correspond à la bissectrice de l'angle formé par la verticale et par la ligne de site.

En portant la valeur  $\alpha_{12}$  dans l'expression de  $X_\sigma$ , on obtient

$$X_{\sigma_M} = \frac{2h}{1 + \sin \sigma};$$

$X_M$  étant la portée maximum pour  $\sigma = 0$ , on a (40)

$$X_M = 2h;$$

d'autre part,  $y_1 = X_\sigma \sin \sigma$ . On aura ainsi

$$y_1 + X_{\sigma_M} = X_M.$$

Donc, un point ne peut être atteint que si la somme de son altitude  $y_1$  et de sa distance  $X_\sigma = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ , mesurée sur la ligne de site, est inférieure ou, au plus, égale à la portée maximum sur un plan horizontal.

En d'autres termes, on doit avoir

$$y_1 + \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = 2h.$$

2° *Parabole de sécurité.* — Ainsi, le plan de projection se trouve divisé en deux régions : l'une contient tous les points, de coordonnées  $(x_1, y_1)$ , qui peuvent être atteints de deux manières; l'autre région ne contient aucun de ces points. Ces deux régions sont séparées par une courbe qui répond à l'équation

$$y_1 + \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = 2h,$$

ou, en introduisant les coordonnées courantes  $(x, y)$  :

$$y = h - \frac{x^2}{4h}.$$

C'est la parabole de sécurité du n° 39.

3° *Problème de Maupertuis.* — Quelle est la vitesse minimum qui permet d'atteindre le point  $(x_1, y_1)$  ?

C'est évidemment la vitesse qui donnera la portée maximum sur la ligne de site. On le démontrera directement en écrivant l'équation de la trajectoire qui passe par le point  $(x_1, y_1)$  et qui est

$$\text{tang } \sigma = \text{tang } \alpha - \frac{x_1}{4h} (1 + \text{tang}^2 \alpha),$$

sous la forme

$$4h = x_1 \frac{1 + \text{tang}^2 \alpha}{\text{tang } \alpha - \text{tang } \sigma}.$$

La condition  $dh = 0$  donnera la formule

$$\text{tang}^2 \alpha - 2 \text{tang } \alpha \text{ tang } \sigma - 1 = 0;$$

d'où

$$\text{tang } \sigma = - \frac{1 - \text{tang}^2 \alpha}{2 \text{tang } \alpha} = - \cot 2\alpha,$$

c'est-à-dire

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} + \sigma,$$

ce qui est la condition rencontrée plus haut.

On en déduit

$$2h = x_1 \text{ tang } \alpha \quad \text{ou} \quad 2h = y_1 + \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

pour valeur de la hauteur  $h$  due à la vitesse initiale cherchée

Le but A étant donné, on portera sur la verticale de A la longueur

$AB = OA$ . Le point B représentera la hauteur  $2h$ . Joignant OB, cette ligne sera la ligne de projection. Si l'on forme

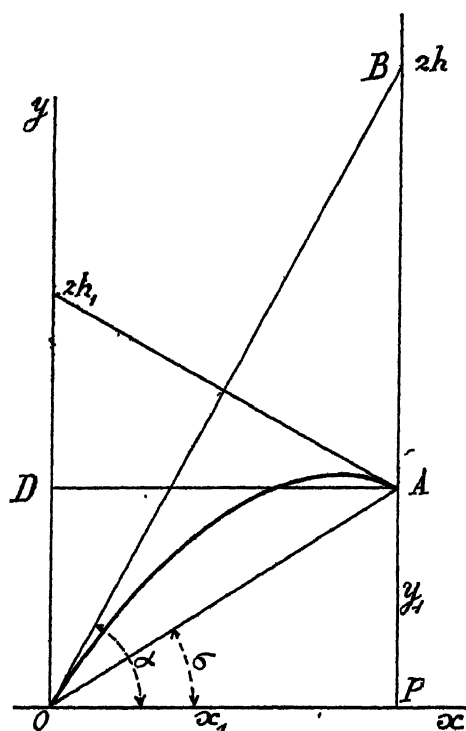
$$\operatorname{tang} \tau = \operatorname{tang} \alpha - \frac{x_1}{2h} (1 + \operatorname{tang}^2 \alpha),$$

on trouve, au point A, que

$$\tau = -\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

La tangente à la trajectoire en A est perpendiculaire sur la tangente

Fig. 47.



initiale. Le point A appartient à la parabole de sécurité (39). La droite OA est la *corde focale* (35).

Inversement, si l'on tire du point A pour atteindre le point  $O(-x_1, -y_1)$ , on prend  $OC = OA$  et l'on a  $DC = 2h$ , ce qui détermine la vitesse minimum cherchée. Les tangentes en A et en O à cette nouvelle trajectoire (de A en O) sont les mêmes que les tangentes aux mêmes points de la trajectoire allant de O en A. Dans ces

conditions, les deux paraboles à axe vertical sont identiques. On a

$$hh_1 = \frac{x_1^2}{4}.$$

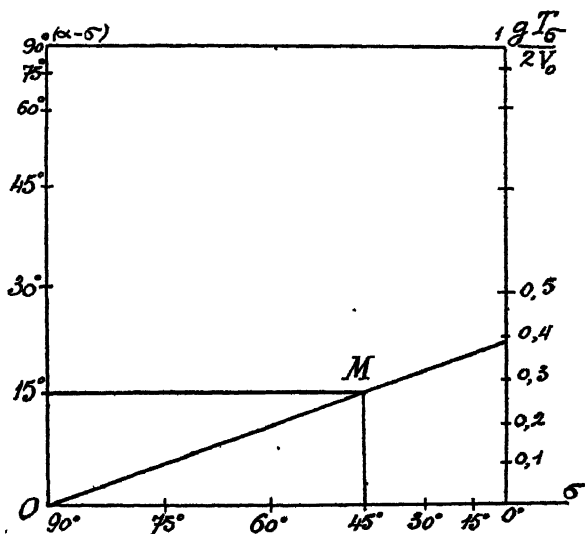
4° *Durée du trajet.* — Le temps  $T_\sigma$ , mis par le projectile pour atteindre la ligne de site  $\sigma$ , est donné par la formule

$$T_\sigma = \frac{2V_0}{g} \frac{\sin(\alpha - \sigma)}{\cos \sigma}.$$

Le maximum de  $T_\sigma$  correspond à

$$\sin(\alpha - \sigma) = 1 \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{\pi}{2} + \sigma.$$

Fig. 48.



Cela ne peut avoir lieu que si  $\sigma$  est négatif. La ligne de projection est alors perpendiculaire sur la ligne de site. On a alors

$$T_\sigma = \frac{2V_0}{g} \cos \sigma.$$

Le lieu des points de chute, sur la ligne de site  $\sigma$ , des projectiles tirés sous une ligne de projection perpendiculaire à la ligne de site est la trajectoire

$$y = -\frac{x^2}{4h},$$

d'angle de projection nul.

Cette même formule

$$T_{\sigma} = \frac{2V_0}{g} \frac{\sin(\alpha - \sigma)}{\cos \sigma}$$

permet de répondre à la question suivante :

Dans un tir sur avion, quelle relation doit exister constamment, entre l'évent à déboucher  $T_{\sigma}$  et l'angle de projection  $\alpha$ , pour que le projectile éclate toujours sur la ligne de site de l'avion ?

On peut construire aisément un abaque donnant la solution.

On graduera l'échelle horizontale, marquée  $\sigma$ , d'après les valeurs de  $\cos \sigma$  et l'échelle verticale, marquée  $(\alpha - \sigma)$ , ou  $\gamma$  (angle de hausse) d'après les valeurs de  $\sin(\alpha - \sigma) = \sin \gamma$ . D'autre part, la verticale du point  $0^0$  sur l'axe des  $\sigma$  sera graduée, conformément aux valeurs de

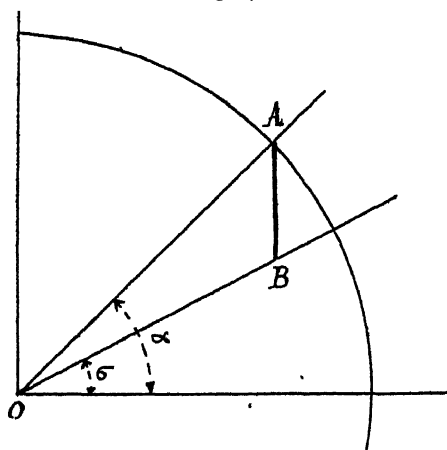
$$\frac{gT_{\sigma}}{2V_0}.$$

Le point M, par exemple, correspond à

$$\sigma = 45^{\circ}, \quad \gamma = (\alpha - \sigma) = 15^{\circ} \quad \text{et} \quad \frac{gT_{\sigma}}{2V_0} = 0,35.$$

*Second abaque.* — Soit une circonférence de centre O et de rayon

Fig. 49.



égal à  $\frac{2V_0}{g}$ , et soient OA et OB les lignes de projection et de site.

Dans le triangle AOB, on a

$$\frac{AB}{\sin(\alpha - \sigma)} = \frac{OA}{\cos \sigma}.$$

Donc

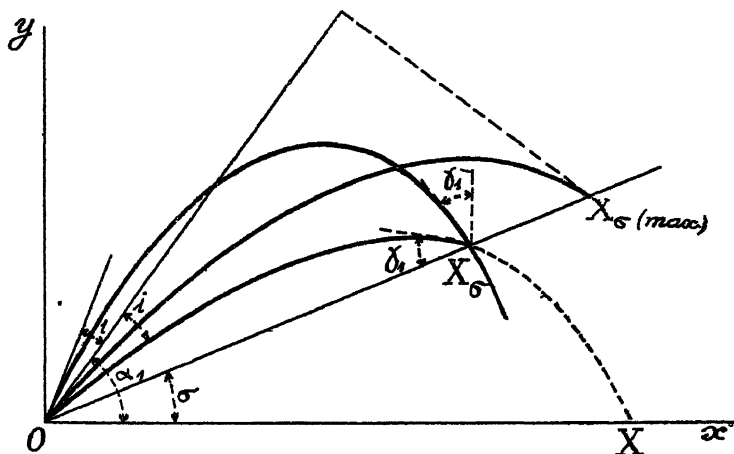
$$AB = \frac{2V_0}{g} \frac{\sin(\alpha - \sigma)}{\cos \sigma}.$$

Ainsi :  $T_\sigma = AB$ .

*Remarque.* — Pour des perturbations très petites  $\partial V_0$  et  $\partial \alpha$ , on a

$$\frac{\partial T_\sigma}{T_\sigma} = \frac{\partial V_0}{V_0} - \cot(\alpha - \sigma) \partial \alpha.$$

Fig. 50.



5° *Théorème sur les angles d'égale portée  $\Lambda_\sigma$  dans le site.* — On obtiendra la même portée  $X_\sigma$  dans le site  $\sigma$  en tirant avec des angles de projection  $(\alpha_1 \pm i)$ , l'angle  $\alpha_1$  correspondant à la portée maximum  $X_{\sigma_0}$  sur la ligne de site et  $i$  étant quelconque.

Pour établir cette proposition, partant de la valeur trouvée pour  $X_\sigma$ , il suffit de démontrer qu'on a

$$\sin(\alpha_1 + i - \sigma) \cos(\alpha_1 + i) = \sin(\alpha_1 - i - \sigma) \cos(\alpha_1 - i),$$

lorsque

$$2\alpha_1 = \frac{\pi}{2} + \sigma.$$

L'égalité à démontrer peut donc s'écrire

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sigma}{2} + i\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sigma}{2} + i\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sigma}{2} - i\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sigma}{2} - i\right).$$

Or,

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sigma}{2} + i\right) = \text{cosinus du complément} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sigma}{2} - i\right),$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sigma}{2} + i\right) = \text{sinus du complément} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sigma}{2} - i\right). \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Pour  $\sigma = 0$ , on retrouve les propriétés démontrées plus haut (41).



6° *Relation entre  $X$  et  $X_\sigma$ .* — Entre les deux portées  $X_\sigma$ , dans le site  $\sigma$ , et  $X$ , dans le site zéro, correspondant au même angle de projection, on a la relation

$$\frac{X}{X_\sigma} = \cos^2 \sigma \frac{\sin z}{\sin(z - \sigma)},$$

qu'on peut écrire

$$\frac{X}{X_\sigma} = \cos \sigma \frac{\tan z}{\tan z - \tan \sigma}.$$

Entre  $T$  et  $T_\sigma$ , on aura

$$\frac{T}{T_\sigma} = \frac{\tan z}{\tan z - \tan \sigma}.$$

7° *Angle de chute sur la ligne de site.* — Rappelons que nous avons trouvé précédemment (30), pour cet angle  $\omega_\sigma$ , la formule

$$\tan \omega_\sigma = \frac{\tan z - \tan \sigma}{1 - \tan \sigma \tan z + 2 \tan^2 \sigma}.$$

L'angle est droit lorsque

$$\tan z = \frac{2 \tan^2 \sigma + 1}{\tan \sigma}$$

et le lieu des points de chute correspondant à cet angle de projection ainsi défini est l'ellipse des sommets (30, 5°) :

$$x^2 + 4y^2 = 4ky.$$

8° Démontrer qu'entre la portée  $X_\sigma$  dans le site, correspondant à l'angle  $i$  défini en 5° et la portée  $X_{\sigma_v}$  dans ce même site, on a la relation

$$X_\sigma = X_{\sigma_v} \left[ 1 - \frac{2 \sin^2 i}{1 - \sin \sigma} \right].$$

9° Démontrer que la durée du trajet  $T_\sigma$  est donnée par la formule

$$T_\sigma = T_{\sigma_v} \left[ \cos i + \sin i \frac{\cos \sigma}{1 - \sin \sigma} \right].$$

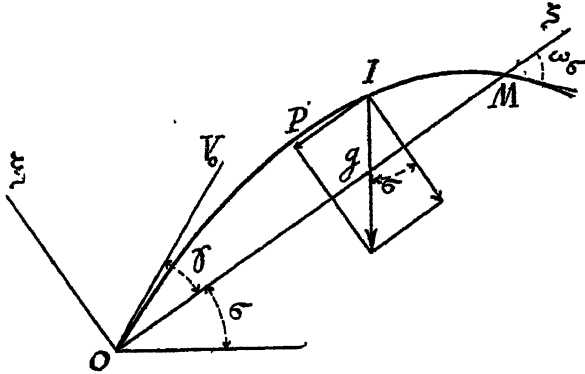
55. *La trajectoire rapportée à la ligne de site.* — 1° Prenons, pour axes, la ligne de site  $OM$  ( $O\zeta$ ) et la perpendiculaire  $O\xi$  à cette droite. La vitesse initiale fait, avec la ligne de site, un angle  $\gamma$ . Les équations différentielles du mouvement sont

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = -g \cos \sigma, \quad \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = -g \sin \sigma.$$

On en déduit, pour les équations finies :

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= V_0 \sin \gamma - g t \cos \sigma, & \frac{d\zeta}{dt} &= V_0 \cos \gamma - g t \sin \sigma; \\ \xi &= V_0 t \sin \gamma - \frac{1}{2} g t^2 \cos \sigma, & \zeta &= V_0 t \cos \gamma - \frac{1}{2} g t^2 \sin \sigma.\end{aligned}$$

Fig 51



Au point M, dont nous appellerons  $(X_\sigma, T_\sigma, \omega_\sigma, V_\sigma)$  les éléments, on aura

$$\begin{aligned}T_\sigma &= \frac{2V_0 \sin \gamma}{g \cos \sigma}, & \tan \omega_\sigma &= \frac{\tan \gamma}{2 \tan \sigma \tan \gamma - 1}, \\ X_\sigma &= \frac{2V_0^2 \sin \gamma \cos(\gamma + \sigma)}{g \cos^2 \sigma}, & \begin{cases} V_\sigma \cos \omega_\sigma = V_0 \frac{\cos(\gamma + \sigma)}{\cos \sigma}, \\ V_\sigma \sin \omega_\sigma = -V_0 \sin \gamma. \end{cases}\end{aligned}$$

Cette dernière relation, qui donne la projection  $V_\sigma \sin \omega_\sigma$  de la vitesse sur une perpendiculaire à la ligne de site, démontre le théorème énoncé au n° 32.

Le point P<sub>1</sub> où la tangente à la trajectoire est parallèle à la ligne de site correspond aux valeurs suivantes, pour  $\frac{d\xi}{dt} = 0$ :

$$\begin{aligned}t_1 &= \frac{V_0 \sin \gamma}{g \cos \sigma}, & \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_1 &= V_0 \frac{\cos(\gamma + \sigma)}{\cos \sigma}, \\ \xi_1 &= \frac{1}{2} \frac{V_0^2 \sin^2 \gamma}{g \cos \sigma}, & \zeta_1 &= \frac{V_0^2 \sin 2\gamma}{2g \cos \sigma} \left(1 - \frac{1}{2} \tan \sigma \tan \gamma\right).\end{aligned}$$

Le point P<sub>2</sub> où la tangente à la trajectoire est perpendiculaire à la ligne de site correspond aux valeurs suivantes, pour  $\frac{d\zeta}{dt} = 0$ :

$$\begin{aligned}t_2 &= \frac{V_0 \cos \gamma}{g \sin \sigma}, & \left(\frac{d\xi}{dt}\right)_2 &= V_0 \frac{\cos(\gamma + \sigma)}{\sin \sigma}, \\ \zeta_2 &= \frac{1}{2} \frac{V_0^2 \cos^2 \gamma}{g \sin \sigma}, & \xi_2 &= \frac{V_0^2 \sin 2\gamma}{2g \sin \sigma} \left(1 - \frac{1}{2} \cot \sigma \cot \gamma\right).\end{aligned}$$

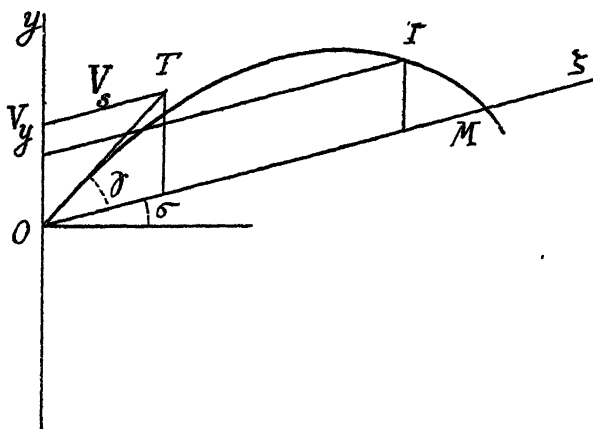
Démontrer que la droite  $P_1P_2$  est perpendiculaire à la symétrique de l'horizontale par rapport à la ligne de site.

2° *La trajectoire en coordonnées obliques.* — Prenons maintenant, comme axes, la ligne de site  $O\zeta$  et la verticale  $Oy$ . On aura

$$\zeta = \frac{V_0 \cos(\gamma + \sigma)}{\cos \sigma} t = V_\zeta t,$$

$$y = \frac{V_0 \sin \gamma}{\cos \sigma} t - \frac{1}{2} g t^2 = V_y t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Fig. 52.



On en déduit

$$\frac{dy}{d\zeta} = \frac{V_y - gt}{V_\zeta}.$$

Donc :

À l'origine,

$$\left(\frac{dy}{d\zeta}\right)_0 = \frac{V_y}{V_\zeta};$$

Au point P,

$$\left(\frac{dy}{d\zeta}\right) = 0, \quad \begin{cases} (t) = \frac{V_y}{g}, & \left(\frac{d\zeta}{dt}\right) = V_\zeta, \\ (\zeta) = \frac{V_\zeta V_y}{g}, & (y) = \frac{1}{2} \frac{V_y^2}{g}; \end{cases}$$

Au point M,

$$\left(\frac{dy}{d\zeta}\right)_\sigma = -\frac{V_y}{V_\zeta}, \quad \begin{cases} T_\sigma = \frac{2V_y}{g}, & \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_\sigma = V_\zeta, \\ X_\sigma = \frac{2}{g} V_\zeta V_y, & y = 0 \end{cases}$$

Ces formules sont indépendantes de l'angle de projection.

La portée OM est telle que

$$X_{\sigma} = \frac{2}{g} V_0^2 V_1 = \frac{2 V_0^2}{g} \frac{\sin \gamma \sin (\gamma + \sigma)}{\cos^2 \sigma}.$$

Posons

$$\tau = \frac{\pi}{2} - \sigma';$$

on aura

$$X_{\sigma} = \frac{2 V_0^2}{g} \frac{\sin \gamma \sin (\gamma - \sigma')}{\cos^2 \sigma}.$$

On voit immédiatement que le maximum a lieu quand

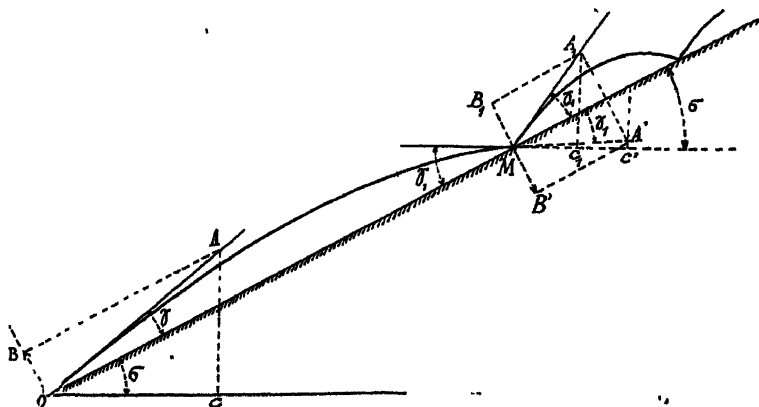
$$\gamma + \gamma - \sigma' = 0 \quad \text{ou} \quad \gamma = \frac{\sigma'}{2} \quad [(\S 50, 3^{\text{e}}) \text{ et } (\S 53, 3^{\text{e}})].$$

**56. Ricochet sur plan incliné.** — Appliquons le théorème et les formules qui précèdent au cas où l'on suppose qu'un projectile, une bille par exemple, parfaitement élastique, est lancée avec une *vitesse initiale*  $V_0$ , sous l'*angle de projection*  $\alpha = \gamma + \sigma$ , le long de la ligne de plus grande pente d'un plan parfaitement élastique, incliné de l'*angle de site*  $\sigma$ .

Soit M le point de chute. On sait (32) que l'on obtiendra la vitesse  $MA'$  en grandeur et en direction en prenant  $MB' = OB$  et  $MC' = OC$ . Menant  $B'A'$  parallèle à OM et  $C'A'$  verticale, on aura le point  $A'$ .

On aura ainsi l'angle de chute  $\gamma_1$  sur le plan incliné, et, menant  $MA_1$

Fig. 53.



symétrique de  $MA'$  relativement à OM, on aura en  $MA_1$  la direction et la grandeur de la nouvelle vitesse initiale.

On a immédiatement

$$\begin{aligned} OB = MB' = MB_1 &= V_0 \sin \gamma = V_1 \sin \gamma_1, \\ MC' = MA' \cos(\sigma - \gamma_1), \quad OC &= OA \cos(\gamma + \sigma) \end{aligned}$$

On aura donc les deux relations

$$\begin{aligned} (1) \quad & V_0 \sin \gamma = V_1 \sin \gamma_1, \\ (2) \quad & V_1 \cos(\sigma - \gamma_1) = V_0 \cos(\gamma + \sigma); \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$(3) \quad \cot \gamma_1 = \cot \gamma - 2 \operatorname{tang} \sigma.$$

Cette formule se déduit d'ailleurs de la formule (29) :

$$\operatorname{tang} \tau = 2 \operatorname{tang} \sigma - \operatorname{tang} \alpha,$$

en posant

$$\alpha = \gamma + \sigma; \quad \tau = \sigma - \gamma_1.$$

Le temps mis par le projectile pour tomber en M est

$$T = \frac{2 V_0}{g} \frac{\sin \gamma}{\cos \sigma}.$$

Par suite de la première relation, on aura

$$T_0 = T_1 = T_2 = \dots = \text{const.}$$

*La durée de chaque bond est une constante.*

D'autre part, la *vitesse horizontale*, qui est constante pour chaque bond, est, pour le premier bond,  $OC = V_0 \cos(\gamma + \sigma)$ , et, pour le second,  $MC_1 = V_1 \cos(\gamma_1 + \sigma)$ .

On aura donc, pour les portées le long du plan incliné :

$$X_{\sigma_0} = \frac{2 V_0^2}{g} \frac{\sin \gamma \cos(\gamma + \sigma)}{\cos^2 \sigma} = \frac{2 V_0^2}{g} \frac{\sin^2 \gamma}{\cos^2 \sigma} (\cos \sigma \cot \gamma - \sin \sigma)$$

et

$$X_{\sigma_1} = \frac{2 V_0}{g} V_1 \frac{\sin \gamma}{\cos^2 \sigma} \cos(\gamma_1 + \sigma) = \frac{2 V_0^2}{g} \frac{\sin^2 \gamma}{\cos^2 \sigma} (\cos \sigma \cot \gamma_1 - \sin \sigma).$$

On trouve ainsi, d'après la relation (3), en éliminant  $\gamma_1$  :

$$\frac{X_{\sigma_1}}{X_{\sigma_0}} = \frac{1 - 3 \operatorname{tang} \sigma \operatorname{tang} \gamma}{1 - \operatorname{tang} \sigma \operatorname{tang} \gamma}.$$

On trouve de même

$$\frac{X_{\sigma_2}}{X_{\sigma_1}} = \frac{1 - 5 \operatorname{tang} \sigma \operatorname{tang} \gamma}{1 - 3 \operatorname{tang} \sigma \operatorname{tang} \gamma};$$

et, d'une façon générale :

$$\frac{X_n}{X_{\sigma_{(n-1)}}} = \frac{1 - (2n+1) \tan \sigma \tan \gamma_1}{1 - (2n-1) \tan \sigma \tan \gamma_1}.$$

En combinant cette relation avec celle qui donne  $\frac{X_{\sigma_{(n-1)}}}{X_{\sigma_n}}$ , on trouve la loi générale de récurrence

$$X_{\sigma_{(n+1)}} + X_{\sigma_{(n-1)}} = 2 X_{\sigma_n}.$$

On en déduit encore, par addition de relations semblables :

$$X_{\sigma_n} - X_{\sigma_{(n+1)}} = X_{\sigma_0} - X_{\sigma_1} \quad \text{et} \quad X_{\sigma_{n-1}} = (n+1) X_{\sigma_1} - n X_{\sigma_0}.$$

On a encore

$$\frac{X_{\sigma_n}}{X_{\sigma_0}} = \frac{1 - (2n+1) \tan \sigma \tan \gamma_1}{1 - \tan \sigma \tan \gamma_1}.$$

La bille remontera le plan incliné jusqu'au  $n^{\text{ème}}$  bond, tel que l'angle  $\gamma_1$  soit  $> \frac{\pi}{2} - \sigma$ .

Alors la bille rebondira vers l' $\mathcal{R}$ , dans la partie descendante.

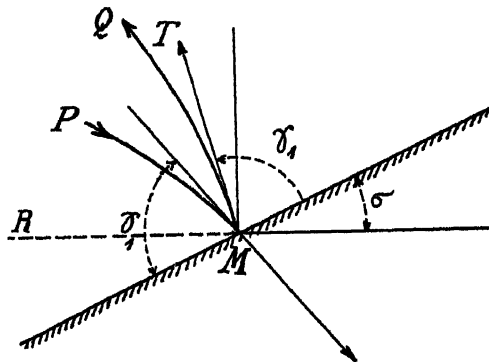
La bille, qui arrive suivant la direction  $PM$ , repart dans la direction  $MQ$ , sous un angle de projection  $\alpha_1 = RMT$ , tel que

$$\alpha_1 = \pi - (\gamma_1 + \sigma).$$

Pour  $\gamma_1 = \frac{\pi}{2} - \sigma$ , la direction est la verticale et cela correspond, d'après l'équation (3), à la valeur de l'angle de projection

$$\cot \gamma = 3 \tan \sigma.$$

Fig. 54.



Les mêmes formules que précédemment sont applicables en changeant le signe de  $\sigma$ .

Cherchons, par exemple, sous quel angle la bille devra être lancée pour que, après un seul bond, elle rebondisse exactement à son point de départ.

On fera  $X_{\sigma_1} = -X_{\sigma_0}$  et, par suite,

$$1 - 3 \tan \sigma \tan \gamma = -(1 - \tan \sigma \tan \gamma),$$

d'où

$$\tan \sigma \tan \gamma = \frac{1}{2}.$$

C'est la relation déjà trouvée ( $30, 2^\circ$ ), qui caractérise le cas où le projectile arrive normalement sur la ligne de site  $\sigma$ .

### III. — AUTRES FAMILLES DE TRAJECTOIRES.

**57. Trajectoires à angle de projection constant.** — Dans cette famille, la *vitesse initiale*  $V_0$  varie, tandis que l'*angle de projection*  $\alpha$  reste constant, pour toutes les trajectoires considérées. Ce sont des paraboles ayant un point et la tangente en ce point communs et même direction d'axe.

**1° Lieu géométrique des sommets.** — Ce lieu est une droite qui partage en deux parties égales les segments compris entre la tangente initiale et l'horizontale de l'origine.

En effet, le sommet est défini par les deux équations

$$X_s = \frac{u_0^2}{g} \tan \alpha, \quad Y_s = \frac{u_0^2}{2g} \tan^2 \alpha,$$

et l'élimination de  $u_0$  donnera

$$Y_s = \frac{X_s}{2} \tan \alpha.$$

**2°** D'ailleurs, cette proposition n'est qu'un cas particulier du théorème suivant : *Toutes les trajectoires  $\alpha = \text{const.}$  sont homothétiques par rapport à l'origine, et leur rapport de similitude est égal au rapport des carrés des vitesses initiales.*

En effet, si dans l'équation de la trajectoire

$$y = x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2 V_0^2 \cos^2 \alpha},$$

on pose

$$x = \left( \frac{V_0}{V_0'} \right)^2 x' \quad \text{et} \quad y = \left( \frac{V_0}{V_0'} \right)^2 y',$$

il vient

$$y' = x' \tan z - \frac{g x'^2}{2 V_0^2 \cos^2 z},$$

ce qui est bien une autre trajectoire  $z = \text{const.}$

Aux points homologues de toutes ces trajectoires, on a

$$\tau = \tau' \quad \text{et} \quad \frac{t}{t'} = \frac{V_0}{V_0'} = \frac{v}{v'}.$$

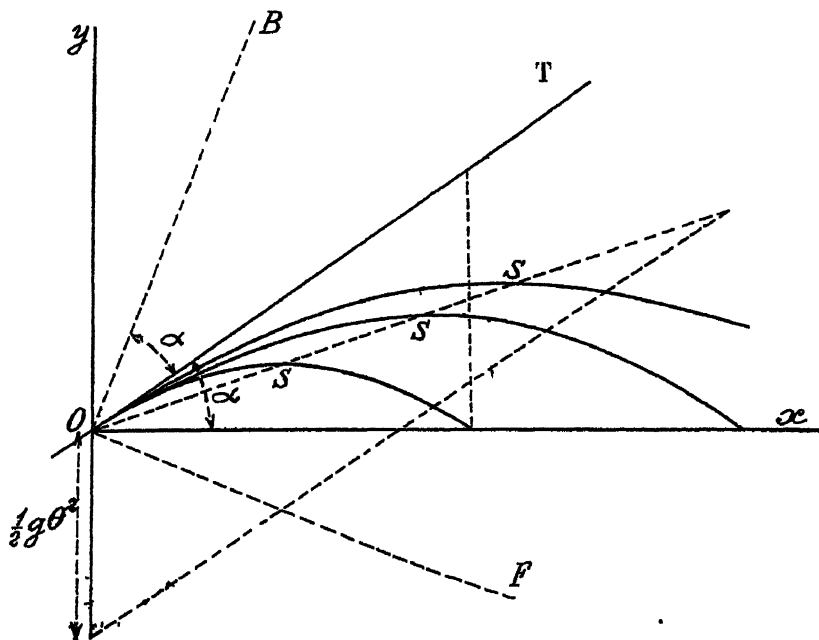
3° *Lieu géométrique des foyers.* — Ce lieu est une droite. On le construit en doublant l'angle  $z$ , ce qui donne la droite OB, et en menant, de l'origine, une perpendiculaire OF à cette droite OB.

On sait, en effet, que la tangente OT en O à la parabole est bissectrice de l'angle formé par une parallèle Oy à l'axe et par la droite OF qui passe par le foyer.

4° *Lieu des points d'éclatement.* — Si, entre les deux relations

$$x = V_0 t \cos z, \quad y = V_0 t \sin z - \frac{1}{2} g t^2,$$

Fig. 55.



on élimine  $V_0$  et si l'on fait  $t = \theta$ , quantité donnée, il viendra

$$y = x \tan z - \frac{1}{2} g \theta^2.$$



C'est l'équation d'une ligne droite, parallèle à la tangente commune initiale : elle coupe l'axe des  $y$  au point où, en chute libre, pour  $V_0 = 0$ , le projectile serait parvenu au bout du temps  $\theta$ .

Les tangentes à toutes les trajectoires, aux points de même  $\theta$ , se coupent sur l'axe des  $y$ .

5° *Lieu des points d'égale vitesse.* — Entre les deux équations (19, V)

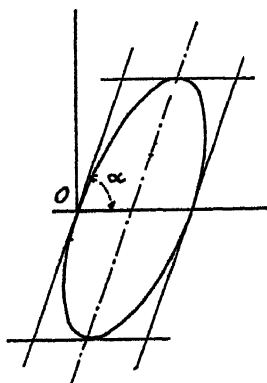
$$x = \frac{u_0^2}{g} \left[ \tan \alpha \pm \frac{1}{u_0} \sqrt{v^2 - u_0^2} \right] \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{2g} [u_0^2 (1 + \tan^2 \alpha) - v^2],$$

l'élimination de  $u_0$  donne l'ellipse

$$(1 + \tan^2 \alpha) x^2 + 4y^2 - 4xy \tan \alpha + \frac{2v^2}{g} (y - x \tan \alpha) = 0,$$

tangente à la ligne de projection et coupant l'axe des  $x$  au point

Fig. 56.



$x = \frac{v^2}{g} \sin 2\alpha$ , et l'axe des  $y$  au point  $y = -\frac{v^2}{2g}$ , où la tangente est horizontale (fig. 56).

6° *Trajectoire qui passe par un point donné.* — Soient, comme précédemment (53)  $(x_1, y_1)$ , les coordonnées du point visé;  $\sigma$  est l'angle de site, tel que  $\tan \sigma = \frac{y_1}{x_1}$ .

On aura pour l'équation de la trajectoire

$$y_1 = x_1 \tan \alpha - \frac{g x_1^2}{2 V_0^2 \cos^2 \sigma},$$

où  $V_0$  est l'inconnue.

On en déduit  $V_0$  sous l'une des deux formes suivantes :

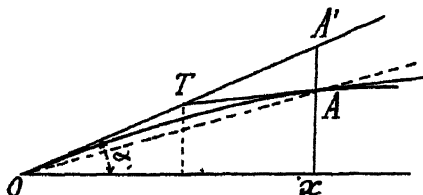
$$V_0^2 = \frac{gx_1^2}{2(x_1 \tan \alpha - y_1) \cos^2 \alpha} \quad \text{ou} \quad V_0^2 = \frac{gx_1 \cos \alpha}{2 \cos \alpha \sin(\alpha - \alpha)}.$$

7° *Théorème de l'abaissement constant.* — Le théorème analogue à celui du cas de  $V_0 = \text{const.}$  s'enonce dans le cas de  $\alpha = \text{const.}$  sous la forme :

*Pour des abscisses proportionnelles aux vitesses, les abaissements des trajectoires de la famille  $\alpha = \text{const.}$  sont les mêmes.*

8° *Sur une même verticale  $x$ , les tangentes à toutes les trajectoires  $\alpha = \text{const.}$  concourent en un même point de la tangente à l'origine.*

Fig. 57.



C'est la conséquence de la propriété suivante de la parabole : si, par le point de rencontre de deux tangentes  $OT$  et  $TA$  à la parabole, on mène une parallèle à l'axe, elle coupe la corde  $OA$  en son milieu (29).

Donc  $TA' = \frac{OA'}{2}$ . Le point  $T$  est le même pour toutes les trajectoires ayant même tangente à l'origine.

9° On peut trouver l'équation des *trajectoires orthogonales* des trajectoires de la famille  $\alpha = \text{const.}$  par un procédé analogue à celui développé au n° 43.

On trouve

$$\frac{dx}{x} = - \frac{\varphi d\varphi}{\varphi^2 - \varphi \tan \alpha + \dots},$$

avec

$$\varphi = \tan \alpha - 2 \frac{y}{x}.$$

Pour  $\alpha = 0$ , on obtient l'ellipse

$$x^2 + 2y^2 = K^2;$$

Pour  $\tan \alpha = 2\sqrt{2}$ , on a la courbe

$$K(x\sqrt{2} - 2y) = e^{x\sqrt{2} - \dots}$$

et, dans le cas d'une constante,  $K = 1$ , on peut écrire

$$(x\sqrt{2} - 2y)^{(2\sqrt{2}-2)} = e^{\sqrt{2}}.$$

§8. *Trajectoires à vitesse horizontale constante.* — Voici quelques-unes des propriétés des trajectoires de la famille  $u_0 = \text{const.}$  :

1° *Lieu géométrique des sommets.* — En éliminant  $\alpha$  entre les deux équations

$$X_s = \frac{u_0^2}{g} \tan \alpha \quad \text{et} \quad Y_s = \frac{u_0^2}{2g} \tan^2 \alpha,$$

où  $u_0 = \text{const.}$ , on trouve, pour lieu géométrique, la parabole

$$Y_s = \frac{g}{2u_0^2} X_s^2,$$

qui est, à l'origine, tangente à l'axe des  $x$ .

2° *Lieu des foyers.* — On sait (24) que la directrice est à une hauteur  $\frac{u_0^2}{2g}$  au-dessus du sommet. Le foyer se trouve donc à une distance  $\frac{u_0^2}{2g}$  au-dessous du sommet. Le lieu des foyers est, par suite, une parabole égale à la parabole, lieu des sommets, mais transportée parallèlement à elle-même d'une quantité  $\left(-\frac{u_0^2}{2g}\right)$ .

3° *Lieu des points d'éclatement.* — Comme on a  $x = u_0 t$ , le lieu des points d'éclatement au temps  $\theta$  est la verticale  $x = u_0 \theta$ .

4° *Lieu des points ayant même inclinaison  $\tau'$ .* — En éliminant  $\alpha$  entre (19, I) :

$$x = \frac{u_0^2}{g} (\tan \alpha - \tan \tau') \quad \text{et} \quad y = \frac{u_0^2}{2g} (\tan^2 \alpha - \tan^2 \tau'),$$

on trouve la parabole à axe vertical

$$y = x \tan \tau' + \frac{g}{2u_0^2} x^2.$$

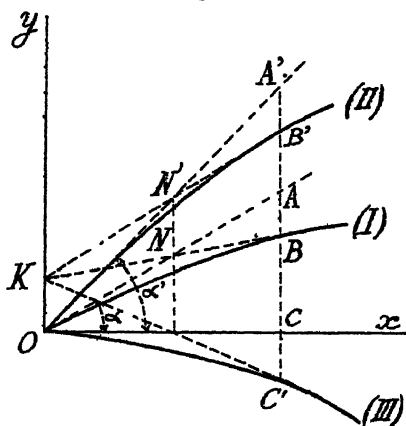
5° *Génération des trajectoires  $u_0 = \text{const.}$*  — L'abaissement  $y = \frac{gx^2}{2u_0^2}$  est le même pour toutes les trajectoires et pour la même valeur de l'abscisse  $x$ .

Ainsi, la trajectoire (II) d'angle de projection  $\alpha'$  se déduira, point par point, de la trajectoire (I), d'angle de projection  $\alpha$ , en menant une

verticale C et en prenant  $A'B' = AB$ . De même on aura, pour la trajectoire (III) ( $\alpha = 0$ ) :  $CC' = AB = A'B'$  (fig. 58).

Les tangentes aux points C', B, B' concourent au même point K

Fig 58.



de l'axe des  $y$ . En effet, d'après une propriété connue de la parabole, la verticale  $NN'$  partage en deux segments égaux les obliques  $OA$ ,  $OA'$ ,  $OC$ . Les deux triangles  $A'B'N'$  et  $N'KO$  seront donc égaux, et l'on aura

$$KO = A'B' = AB = CC' - y.$$

6° Les *trajectoires orthogonales* des trajectoires de la famille  $u_0 = \text{const.}$  peuvent s'obtenir aisément. Posant  $q = \frac{g}{2u_0^2}$ , la trajectoire s'écrit

$$(1) \quad y = x \tan \alpha - qx^2,$$

d'où

$$dy = dx \tan \alpha - 2qx \, dx.$$

L'équation différentielle des trajectoires orthogonales est

$$(2) \quad -dx = dy(\tan \alpha - 2qx) \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2qx - \tan \alpha}.$$

Éliminant l'angle  $\alpha$  en (1) et (2), il viendra

$$\frac{dy}{2x \, dx} = \frac{1}{2(qx^2 - y)}.$$

Posons  $\zeta = x^2$ , on aura

$$\frac{dy}{d\zeta} = \frac{1}{2(q\zeta - y)},$$

et cette équation se traitera par la méthode classique, en prenant pour variable  $q\zeta - \gamma = \eta$ , d'où l'on tire

$$d\gamma = \frac{d\eta}{2q\eta - 1}.$$

Donc

$$2q\gamma = \log(2q\eta - 1) + \text{const.}$$

et, par suite,

$$2q\eta - 1 = K e^{2q\gamma}.$$

Il vient donc, en remplaçant  $\eta$  par sa valeur,

$$2q\gamma = 2q^2x^2 - 1 - K e^{2q\gamma}.$$

C'est l'équation cherchée des trajectoires orthogonales.

En particulier, pour  $K=0$ , on a une parabole à axe vertical ayant son sommet au point  $\gamma = -\frac{1}{2q}$ .

§9. **Autres familles de trajectoires.** — On pourra étudier des trajectoires diverses, par exemple les suivantes :

1° *Trajectoires à vitesse initiale verticale constante.* — Ce sont des trajectoires  $w_0 = V_0 \sin \alpha = \text{const.}$ , qui ont même durée de trajet  $T$ , de l'origine au point de chute, et même flèche  $Y_s$ .

a. *Lieu des sommets.* — Droite horizontale :

$$\gamma = \frac{w_0^2}{g};$$

b. *Lieu des foyers.* — Parabole :

$$\gamma = \frac{w_0^2}{2g} - \frac{g x^2}{2 w_0^2};$$

c. *Lieu des éclatements.* — Droite :

$$\gamma = w_0 \theta - \frac{1}{2} g \theta^2.$$

2° *Trajectoires à portée constante.* — On a

$$V_0^2 \sin 2\alpha = \text{const.}$$

La trajectoire peut se mettre sous la forme

$$\gamma = x \left( 1 - \frac{x}{X} \right) \tan^2 \alpha$$

et l'on a

$$\operatorname{tang} \tau = \left(1 - \frac{x}{X}\right) \operatorname{tang} \alpha.$$

Le lieu des points d'éclatement est l'hyperbole

$$xy = \left(1 - \frac{x}{X}\right) y X^2.$$

3° *Trajectoires passant par un point donné.* — D'après l'équation de la trajectoire en coordonnées polaires (29), l'équation générale de ces trajectoires est

$$y = Bx - \frac{B - \operatorname{tang} \sigma}{X_\sigma \cos \sigma} x^2,$$

où  $B$  est un paramètre variable.

Le lieu des sommets est une hyperbole

$$y (X_\sigma \cos \sigma - 2x) = x^2 \operatorname{tang} \sigma.$$

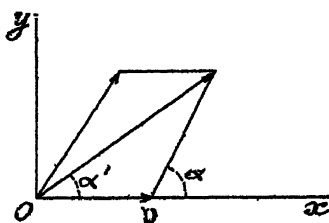
4° *Trajectoire sur plate-forme mobile.* — Si  $v$  est la *vitesse du tireur*, on a, pour définir la vitesse initiale  $V$  et l'angle de projection  $\alpha'$ , les relations

$$V \cos \alpha' = v + V_0 \cos \alpha, \quad V \sin \alpha' = V_0 \sin \alpha.$$

La trajectoire a pour équation

$$y = x \operatorname{tang} \alpha' - \frac{g x^2}{2 V^2 \cos^2 \alpha'}.$$

Fig. 59.



Ni la flèche, ni la durée de trajet ne sont modifiées.

La portée est

$$X = \frac{V_0^2}{g} \left(1 + \frac{v}{u}\right) \sin 2\alpha \cos \alpha.$$

Le maximum de portée a lieu pour

$$\cos \alpha_M = \frac{-v + \sqrt{v^2 + 8 V_0^2}}{4 V_0}.$$

60. **Théorie de l'arbalète.** — On peut encore chercher les propriétés d'autres familles de trajectoires définies, par exemple, par une relation  $f(V_0, \alpha)$  entre la vitesse initiale et l'angle de projection. La plupart de ces problèmes ne présentent d'intérêt que comme exercices de Géométrie analytique élémentaire.

Voici, à titre d'exemple, l'énoncé d'un problème posé aux examens d'entrée à l'École Polytechnique, en 1912 :

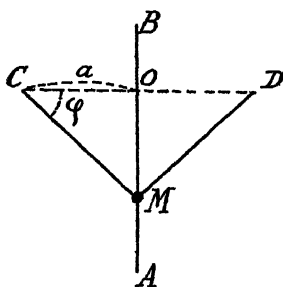
« Une sorte d'arbalète est formée d'un tube rectiligne et d'un fil élastique. Le fil CMD est fixé par ses extrémités à deux points C et D de l'arbalète. Il sert, par son élasticité, à lancer un projectile M, guidé par le tube dont l'axe AOB est perpendiculaire au milieu O de CD.

Ouvert en B, fermé en A, le tube est évidé latéralement de A en O, de façon à laisser libre passage au fil.

Pour lancer le projectile, on l'amène à l'extrémité A de sa course, de façon à tendre le fil élastique; puis on l'abandonne à la réaction du fil.

On donne  $OB = OC = OD = a$ ;  $OA = \frac{4a}{3}$ . Le fil a une section et une masse négligeable. Non tendu, il a pour longueur naturelle CD.

Fig. 60.



Tendu suivant la ligne brisée CMD, il agit sur M, pendant le mouvement, comme la corde agit sur la poulie, dans l'étude statique de la poulie mobile. Sa tension, proportionnelle à l'allongement, a pour expression  $k \frac{CM - CO}{CO}$ . Le projectile est assimilé à un point matériel de masse  $m$ ; l'action du tube sur lui est assimilée à celle d'un plan incliné qui aurait pour ligne de plus grande pente l'axe du tube, le coefficient de frottement  $f$  ayant la même valeur au départ et pendant le mouvement.

1° Déterminer  $k$  et  $f$  par les conditions suivantes : l'arme étant

verticale, la masse  $m$  doit être portée à 112<sup>k</sup>, pour que son poids suffise à faire descendre le fil élastique jusqu'au point A. Cette masse demeure en A pour toutes les positions de BA faisant avec la verticale ascendante un angle  $\theta$  inférieur à  $\frac{\pi}{2}$ , mais elle part dès que  $\theta$  dépasse  $\frac{\pi}{2}$ .

2° Avec les valeurs trouvées pour  $k$  et  $f$ , mais pour les diverses valeurs imaginables de  $m$ , étudier, en fonction de  $\theta$ , la portée de l'arbalète, c'est-à-dire la distance du point B de l'arbalète au point de chute du projectile sur le plan horizontal du point B. »

1° L'arbalète étant verticale, évaluons la force exercée par le fil sur le projectile M placé à une distance  $OM' = x$  du point O.

Cette force F est, si l'on appelle T la tension du fil,

$$F = 2T \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}};$$

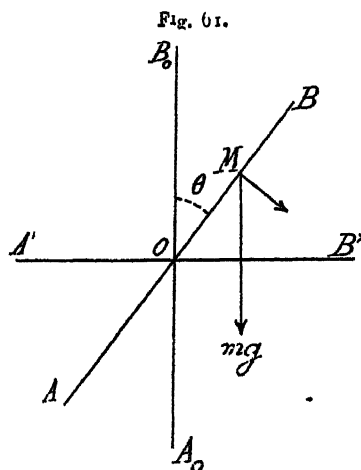
mais

$$T = k \frac{CM - CO}{CO} = k \frac{\sqrt{a^2 + x^2} - a}{a},$$

d'où

$$F = 2k \frac{\sqrt{a^2 + x^2} - a}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

D'après l'énoncé, on augmente progressivement la masse du projectile



pour qu'il descende peu à peu vers l'extrémité A du tube. Dans ces conditions, on doit admettre qu'il y a équilibre entre la force F et le poids du projectile, pour  $x = \frac{4}{3}a$ .



Donc

$$mg = 2k \left( \sqrt{1 + \frac{16}{9}} - 1 \right) \frac{4}{3 \sqrt{1 + \frac{16}{9}}} = \frac{16}{15} k.$$

Comme  $m = 112$ , on a

$$k = \frac{15}{16} mg = \frac{15}{16} \times 112 g = 105g.$$

Quand on fait tourner l'arbalète autour d'un axe horizontal passant par O, la composante du poids de M suivant AB décroît constamment et la force de frottement croît constamment.

La somme de ces deux forces est

$$mg(\cos \theta + f \sin \theta).$$

Comme  $F = mg$ , la résultante de toutes les forces agissant sur M, projetée sur AB, est

$$mg(\cos \theta + f \sin \theta - 1).$$

Puisque le projectile part pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , c'est que  $f = 1$ .

Nous avons donc les valeurs  $k = 105g$  et  $f = 1$ , que nous allons utiliser pour résoudre la seconde question.

2° Pour connaître la portée du projectile partant en faisant l'angle  $\theta$  avec la verticale, il suffit de connaître la vitesse initiale.

Cette vitesse initiale résulte de l'étude du mouvement du projectile M dans le tube AB. Ce mouvement peut être décomposé en deux : le mouvement entre A et O pendant lequel le fil presse sur le projectile, et le mouvement entre O et B pendant lequel le fil ne presse pas sur M, et où les seules forces agissantes sont le poids de M et le frottement du tube.

Pendant la première période, on a :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -2k \left[ \frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right] x - mg(\sin \theta + \cos \theta).$$

La force ne dépendant que de  $x$ , on peut intégrer par la méthode des forces vives :

$$2m \frac{dx}{dt} \frac{d^2 x}{dt^2} = -4k \left[ \frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right] x \frac{dx}{dt} - 2mg(\sin \theta + \cos \theta) \frac{dx}{dt},$$

d'où

$$m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = -\frac{4k}{a} \frac{x^2}{2} + 4k \sqrt{a^2 + x^2} - 2mg(\sin \theta + \cos \theta)x.$$

On a donc, en faisant varier  $x$  de  $-\frac{4a}{3}$  à 0 :

$$[mv^2]_{-\frac{4a}{3}}^0 = +4ka - \left[ \frac{4k}{2a} \left( \frac{4}{3}a \right)^2 + 4k\sqrt{a^2 + \frac{16a^2}{9}} + \frac{2mg}{3}(\sin\theta + \cos\theta)4a \right],$$

Pendant la seconde période, on a

$$\frac{m}{dt^2} \frac{d^2x}{dt^2} = -mg(\sin\theta + \cos\theta),$$

et, en intégrant de 0 à  $a$  :

$$[mv^2]_0^a = -2mg(\sin\theta + \cos\theta)a.$$

Donc, finalement,

$$[mv^2]_{-\frac{4a}{3}}^a = +\frac{280}{3}ag - \frac{14}{3}mga(\sin\theta + \cos\theta) = \frac{14}{3}ag[20 - m(\sin\theta + \cos\theta)]$$

ou

$$V_0^2 = \frac{14}{3}ag \left[ \frac{20}{m} - (\sin\theta + \cos\theta) \right].$$

Mais la portée  $X$  est donnée par  $X = \frac{V_0^2}{g} \sin 2\theta$ , de sorte que l'on a

$$X = \frac{14}{3}a \left[ \frac{20}{m} - (\sin\theta + \cos\theta) \right] \sin 2\theta.$$

Telle est la formule cherchée.

3° *Discussion*. — On voit tout d'abord que si l'on change  $\theta$  en  $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ ,  $X$  ne change pas.

Nous allons construire la courbe qui donne  $X$  en fonction de  $\theta$ , en donnant à  $m$  des valeurs constantes, et en faisant varier  $\theta$  de 0 à  $\frac{\pi}{2}$ .

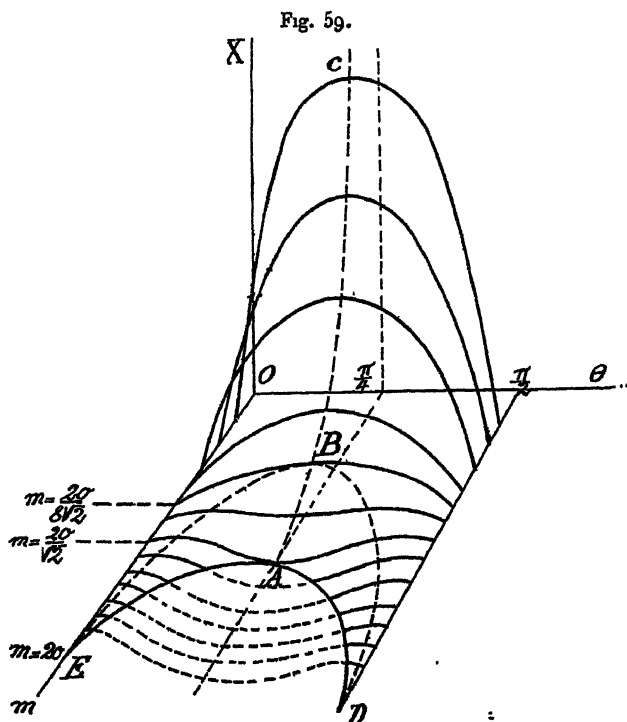
Il faut que  $V_0^2$  soit positif. Donc, si l'on veut que le projectile parte sous tous les angles, il faut remplacer  $(\sin\theta + \cos\theta)$  par son maximum  $\sqrt{2}$ , ce qui donne  $m < \frac{20}{\sqrt{2}}$ . Pour que le projectile puisse partir au moins sous un certain angle, il faut donner à  $(\sin\theta + \cos\theta)$  sa valeur minimum 1, ce qui donne  $m < 20$ . Si donc  $m$  est  $> 20$ , le projectile ne quittera pas l'arbalète.

La figure montre les diverses circonstances du mouvement. On a porté sur trois axes rectangulaires les quantités  $\theta$ ,  $m$  et  $X$ . La figure admet, pour plan de symétrie, le plan  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , qui est le plan ABC.

La portion utile de la surface représentative est limitée, en projection

horizontale, par l'axe  $O\theta$ , l'axe  $Om$ , la droite  $\theta = \frac{\pi}{2}$  et la courbe transcendante DAE, qui représente le lieu des points  $V_0 = 0$ .

Les sections par les plans  $m = \text{const.}$  sont composées de deux courbes égales et admettant chacune une tangente parallèle à  $O\theta$ , lorsque  $m$  est



compris entre 20 et  $\frac{20}{\sqrt{2}}$ . Puis, à partir du point A, ces deux courbes viennent se souder sur l'hyperbole ABC et elles admettent trois tangentes parallèles à  $O\theta$  jusqu'en un certain point B, défini par  $m = \frac{20}{8\sqrt{2}}$ . La tangente est donnée par l'expression

$$\frac{\partial X}{\partial \theta} = \frac{14}{3} a \left[ \frac{20}{m} \cos \theta - \cos 2\theta (\sin \theta + \cos \theta) - \sin 2\theta (\cos \theta - \sin \theta) \right].$$

On a figuré, en pointillé, la ligne de faite EBD, lieu des points à tangente parallèle à  $O\theta$ .

Pour les valeurs inférieures de  $m$ , les courbes ne présentent plus qu'un seul maximum et leur sommet s'élève très vite en suivant l'hyperbole ABC.

## CHAPITRE III.

### LES PROBLÈMES DE TIR DANS LE VIDE.

#### I. — LES DIFFÉRENTS GENRES DE TIR.

61. **Le tir en brèche.** — 1° *On veut que le projectile rase le parapet AB et vienne toucher un point déterminé C de la muraille.* On se donne donc les coordonnées  $x_1$  et  $y_1$  du sommet du parapet, et l'inclinaison  $\tau_1$ , du dernier élément de la trajectoire, la distance AC étant supposée très petite. On demande la vitesse initiale  $V_0$  et l'angle de projection  $\alpha$  d'un tir efficace.

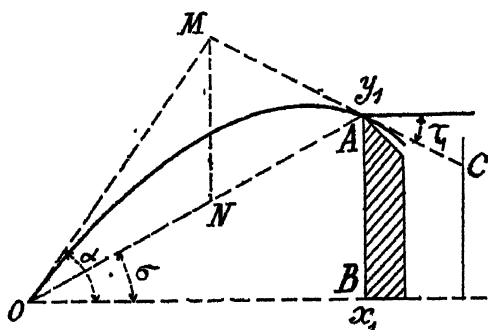
On aura, par l'équation de la trajectoire,

$$y_1 = x_1 \tan \alpha - \frac{g x_1^2}{2 V_0^2 \cos^2 \alpha}$$

ou, d'après la relation  $\tan \sigma = \frac{y_1}{x_1}$ ,

$$\tan \alpha - \tan \sigma = \frac{g x_1}{2 V_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Fig. 63.



D'autre part, l'équation de la tangente (19) donne

$$\tan \alpha - \tan \tau_1 = \frac{g x_1}{V_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

On déduit de la

$$\operatorname{tang} \alpha = 2 \operatorname{tang} \sigma - \operatorname{tang} \tau_1, \quad V_0^2 = \frac{g}{2 \cos^2 \alpha} \frac{x_1}{\operatorname{tang} \sigma - \operatorname{tang} \tau_1}.$$

Ces deux équations résolvent le problème.

La solution géométrique du problème est très simple : par N milieu de OA, mener une verticale qui rencontre en M la tangente donnée en A ; la droite OM est la tangente initiale (29).

Le foyer de la parabole s'obtiendra immédiatement par la propriété connue des tangentes ; on aura aussi la directrice, c'est-à-dire la valeur de  $h = \frac{V_0^2}{2g}$ , d'où la vitesse initiale inconnue  $V_0$ .

2° On veut que le projectile atteigne le point  $(x_1, y_1)$  et que la vitesse initiale  $V_0$  soit aussi faible que possible. Quelle est cette vitesse ?

On sait (50, 3°) que  $V_0$  étant donné, l'angle  $\alpha$  de projection correspondant à la portée maximum sur la ligne de site est  $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\sigma}{2}$ , et que, d'autre part (54), la portée maximum sur la ligne de site est

$$X_\sigma = \frac{V_0^2}{g} \frac{1}{1 + \sin \sigma}.$$

Donc

$$V_0^2(\min) = \frac{gx_1}{\cos \sigma} (1 + \sin \sigma).$$

62. Le tir déflé. — 1° On veut atteindre, au delà d'une masse couvrante de coordonnées  $(x_1, y_1)$ , un but de coordonnées  $(x_2, y_2)$ . Il faut déterminer la vitesse initiale  $V_0$  et l'angle de projection  $\alpha$  de la trajectoire qui passe par ces deux points.

On écrira

$$y_1 = x_1 \operatorname{tang} \alpha - \frac{gx_1^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} \quad \text{et} \quad y_2 = x_2 \operatorname{tang} \alpha - \frac{gx_2^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha};$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{tang} \alpha - \frac{y_1}{x_1} = \frac{gx_1}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} \quad \text{et} \quad \operatorname{tang} \alpha - \frac{y_2}{x_2} = \frac{gx_2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Divisant les deux équations membre à membre, on aura

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{y_1 x_2^2 - y_2 x_1^2}{x_1 x_2 (x_2 - x_1)}.$$

Cette équation fait connaître l'angle  $\alpha$ .

Retranchant membre à membre les deux équations, il vient

$$\frac{y_1}{x_1} - \frac{y_2}{x_2} = \frac{x_2 - x_1}{2} \frac{g}{V_0^2 \cos^2 \alpha},$$

d'où

$$V_0^2 = \frac{g}{2 \cos^2 \alpha} \frac{x_1 x_2 (x_2 - x_1)}{x_2 y_1 - x_1 y_2},$$

ce qui donne la *vitesse initiale*  $V_0$ .

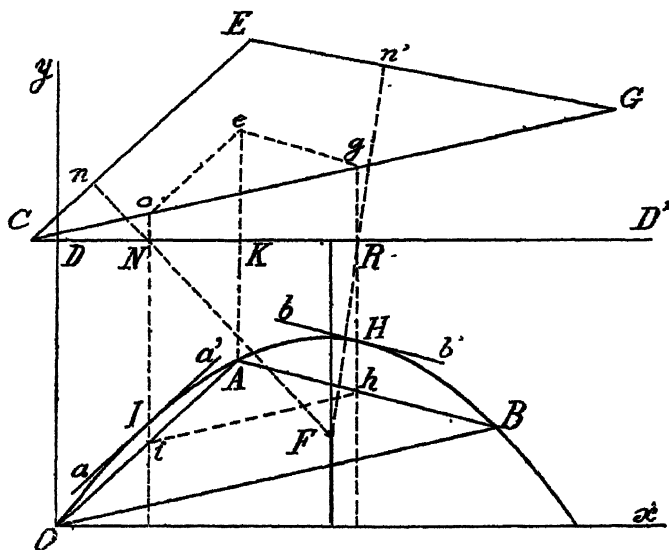
Si l'on fait

$$y_1 - y_2 = (x_2 - x_1) \tan \sigma \quad \text{et} \quad \tan \sigma = \frac{y_1}{x_1},$$

on retrouve les formules du numéro précédent.

2° Donnons de ce problème une solution géométrique, qu'on trouve dans la « Balistique » de Bailla.

Fig. 64.



« Supposons le problème résolu. Soient O la pièce; A, B les deux points donnés; OAB la parabole, dont F est le foyer, et DD' la directrice. Joignons OA, AB, OB. Par les points  $i$ ,  $h$ , milieux de OA et AB, élevons des verticales qui rencontrent la courbe aux points I, H. Les tangentes  $aa'$ ,  $bb'$  menées à ces deux derniers points sont, par une propriété de la parabole, parallèles aux cordes OA, AB. D'ailleurs, la droite  $ih$  est évidemment parallèle à OB et deux fois plus courte. On sait, de plus, que si du point F on mène des perpendiculaires sur les tangentes  $aa'$ ,  $bb'$  jusqu'à la rencontre de la directrice aux points N, R,

ces points marquent aussi l'aboutissement des verticales IN, HR élevées au point de tangence; c'est une conséquence de la règle de construction des tangentes.

» Ceci posé, voici comment s'effectue la construction :

» Soient C la bouche à feu; E, G les deux points donnés. Prenons au hasard un point F, qui sera le foyer de la parabole inconnue. La directrice de cette courbe doit être horizontale; nous la supposons confondue avec la droite DD' passant par le canon. Avec ces deux éléments arbitraires, supposons construite une parabole indéfinie. Cherchons les deux tangentes à la courbe respectivement parallèles aux droites CE, EG qui joignent les points deux à deux; pour cela, on mène du point F à ces deux droites les perpendiculaires Fn et Fn', et des points de rencontre N, R de ces perpendiculaires avec la directrice, on abaisse des verticales. Les intersections I et H de ces verticales avec les perpendiculaires au milieu de FN et FN' sont les points de tangence cherchés.

» Il ne reste plus qu'à inscrire, dans la parabole, un triangle semblable à CEG, et dont les deux côtés soient parallèles à ces deux tangentes. Mais nous savons que lorsque cette condition est réalisée,  $ih$  est parallèle à OB, c'est-à-dire à CG; on n'aura donc qu'à prolonger les verticales I, H jusqu'à la rencontre de CG, ce qui donne la longueur  $cg$ , égale à  $ih$  et semblablement placée. Sur  $cg$ , construisons le triangle  $ceg$ , semblable à CEG, et du point  $c$  abaissons une perpendiculaire, qui rencontre la courbe en un certain point A (mener, à cet effet, une perpendiculaire au milieu de FK).

» Du point A, menons des parallèles aux droites CE, EG et nous obtiendrons les points O, B. Les trois points O, A, B sont identiquement placés comme les points C, E, G, soit entre eux, soit par rapport à l'horizontale Ox. Il n'y a de changé que les grandeurs absolues des côtés de ce triangle inscrit, ce qui n'a aucune importance, puisque nous attribuerons à ces côtés leur véritable grandeur numérique et que les autres éléments de la figure s'en déduisent proportionnellement.

» Le problème est donc entièrement résolu.

» La vitesse initiale est celle que le boulet prendrait en tombant de la hauteur OD, c'est-à-dire  $\sqrt{2g \cdot OD}$ . L'angle de projection est donné par l'inclinaison de la tangente au point O sur l'horizontale Ox » (Baills).

**63. Le tir de côte.** — Le problème est le suivant :

*Un plan horizontal est à l'altitude  $y$ , relativement à la batterie ou au bateau qui tire. Quelle sera la portée L sur ce plan?*

En faisant dans la trajectoire,  $y = y_1$ , on trouve, pour la portée  $L$ , l'équation du second degré

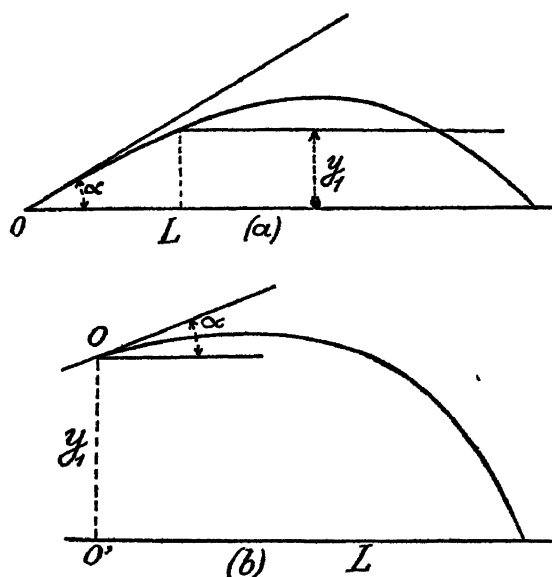
$$L^2 - 4hL \sin \alpha \cos \alpha + 4hy_1 \cos^2 \alpha = 0,$$

d'où l'on déduit la formule

$$L = h \sin 2\alpha \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{y_1}{h \sin^2 \alpha}} \right).$$

1° Si  $y_1$  est négatif (tir des batteries de côte), il existe toujours une seule valeur de  $L$  répondant à la question (fig. 65 b);

Fig. 65.



2° Si  $y_1$  est positif (tir des bateaux sur la côte), il existe deux valeurs de  $L$ , ou une seule, ou aucune, suivant que  $h$  sera supérieur, égal ou inférieur à  $y_1 \sin^2 \alpha$  (fig. 65 a).

Pour obtenir la portée maximum  $L_{(\max)}$  sur le plan  $y_1$ , on formera  $\frac{dL}{d\alpha}$  d'après l'équation du second degré. Égalée à zéro, cette quantité donne la relation

$$L_{(\max)} = -y_1 \tan 2\alpha_m.$$

L'angle  $\alpha_m$  du maximum sera alors donné par la formule

$$\cos 2\alpha_m = \frac{y_1}{2h - y_1}$$



et l'on aura

$$L_{(\text{max})} = 2h \sqrt{1 - \frac{v_1}{h}} \quad \text{ou} \quad L_{(\text{max})} = -2h \tan \alpha_m.$$

C'est l'intersection du plan  $\gamma_1$  avec la parabole de sécurité.

*Théorèmes.* — I. Démontrer que si  $\gamma_1$  varie, le plan des L restant fixe, les tangentes initiales  $\alpha_m$  de la portée maximum enveloppent une courbe  $(y + h)^2 = \frac{27}{4} h x^2$ .

II. L'angle de site  $\sigma$ , qui va de l'origine O au but, pour la portée maximum est tel que  $\tan \sigma = -\cot 2\alpha_m$  (voir problème de Maupertuis, §4, 3°); en déduire une construction géométrique donnant la portée maximum sur le plan  $\gamma_1$ .

*Remarque.* — Le problème traité ici, quand  $\gamma_1$  est négatif, est aussi le problème du tir d'avion contre un but terrestre, le tireur étant supposé immobile.

**64. Le tir fusant.** — L'ensemble des trajectoires que décrivent les fragments d'un shrapnel qui éclate dans l'air forme une *gerbe fusante*.

Supposons qu'il s'agisse d'une bombe sphérique que l'explosion intérieure fait éclater en fragments égaux; l'explosion leur communique à tous une même vitesse  $v$ , dirigée suivant chacun des rayons de la bombe. Cette vitesse  $v$ , composée avec la vitesse  $(V_0, \alpha)$ , au point d'éclatement, du centre de gravité du projectile, définit, en grandeur et direction, l'origine de la trajectoire de chaque fragment.

1° *La gerbe fusante dans le plan de projection.* — Suivant la direction  $\eta$ , angle de OB avec OA, la vitesse initiale sera  $OB = V$ . On a, pour définir V, dans le triangle BOA, la relation

$$v^2 = V^2 + V_0^2 - 2VV_0 \cos \eta,$$

d'où

$$(1) \quad V = V_0 \cos \eta \pm \sqrt{v^2 - V_0^2 \sin^2 \eta}.$$

A l'angle  $\eta$  correspondent deux valeurs  $OB'$  et  $OB$  de V.

Le lieu des points B est une circonférence de rayon  $v$  et de centre A; l'ouverture de la gerbe est définie par l'angle  $\eta_m$ , qui correspond aux deux tangentes à cette circonférence, et qui est tel que  $\sin \eta_m = \frac{v}{V_0}$ .

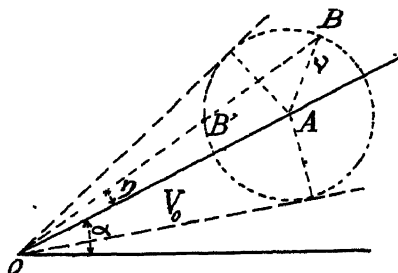
Toutes les trajectoires de la gerbe auront pour équation

$$(2) \quad y = x \tan(\alpha + \eta) - \frac{gx^2}{2V^2 \cos^2(\alpha + \eta)},$$

qu'il faut supposer liée à l'équation (1) qui définit  $V$  comme fonction de  $\eta$  et de  $V_0$ .

Si l'on considère l'éclat lancé suivant  $OB$  avec la vitesse  $V$ , il sera, au bout du temps  $t$  arrivé au point  $B_1$ , tel que l'éloignement  $OB'$  soit égal à  $Vt$ , et l'abaissement  $B'B_1$  soit égal à  $\frac{1}{2}gt^2$ . Le lieu des points  $B'$  sera une circonférence de centre  $A'$ , tel que  $OA' = V_0t$  et de rayon  $vt$ . Le

Fig. 66.



lieu des points  $B_1$ , où les éclats seront parvenus au temps  $t$ , sera une circonférence ayant pour centre le point  $M$  de la parabole du centre de gravité et pour rayon  $vt$ .

Cherchons l'enveloppe de ces circonférences  $M$  de rayon  $vt$ , quand le centre de gravité du projectile se meut sur la parabole. Si l'on considère deux circonférences infiniment voisines, telles que  $M_1, M_2 = vdt$  et  $CM_2 = CM_1 + vdt$ , on aura, dans le triangle infiniment petit  $M_1M_2D$ , la relation

$$DM_2 = M_1M_2 \cos \psi,$$

d'où

$$\cos \psi = \frac{v}{V}.$$

Ainsi, en chaque point de la trajectoire, on mènera un rayon vecteur faisant avec la tangente l'angle  $\psi$  défini ci-dessus : *La trajectoire orthogonale* ( $OP, OP_1$ ) *de ces rayons, issue de l'origine O, représentera l'enveloppe ou contour apparent de la gerbe, dans le plan de projection.*

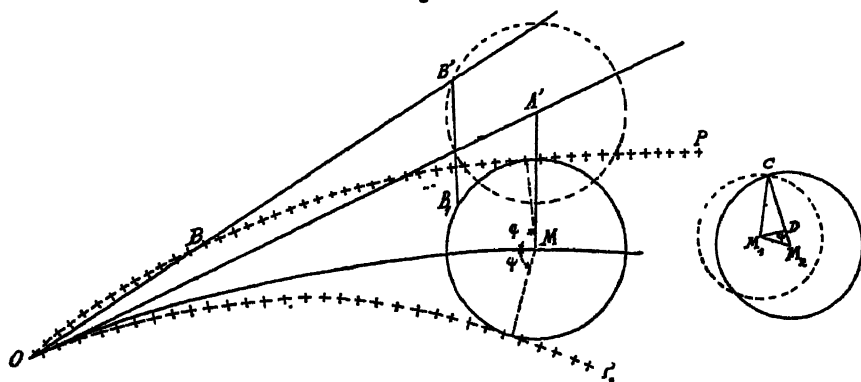
Cette courbe enveloppe a une définition analogue à celle d'une autre courbe, dite *onde balistique*, dont nous étudierons plus tard les propriétés dans la « Théorie du Champ acoustique » (Tome III).

Remarquons que si  $v > V$ , il n'y a pas d'enveloppe réelle, jusqu'à ce que, sur la branche descendante,  $v$ , qui croît jusqu'à l'infini, ait dépassé  $V$ .

Si, au lieu de considérer ce qui se passe seulement dans le plan de

projection, on considère l'espace entier, il suffit de remplacer la circonférence, lieu instantané des éclats, par une sphère, les rayons vecteurs

Fig. 66.



d'angle  $\psi$  par des cônes droits ayant ce même angle  $\psi$  comme angle au sommet autour de la tangente au point correspondant de la trajectoire, et enfin de considérer la surface qui coupe normalement ces cônes et a son sommet au point d'éclatement. Cette surface, qu'on retrouve dans la Théorie du Champ acoustique, est l'enveloppe des éclats pendant leur trajet.

L'intersection de la surface enveloppe avec le plan horizontal déterminera la zone battue par l'éclatement du shrapnel.

2° *La gerbe latérale.* — Résolvons encore un problème relatif aux éclatements. On suppose que le projectile est cylindrique et n'émet que des éclats perpendiculaires au plan de projection, avec une vitesse  $v$ . De plus, pour simplifier un peu les calculs, on supposera que l'éclatement se fait au sommet de la trajectoire.

Les éclats circonférentiels ont été lancés sous des angles  $\alpha$  divers, dans un plan perpendiculaire à la trajectoire et avec une vitesse  $v$ . Ils seront, en plus, animés d'une vitesse horizontale  $V_0$ .

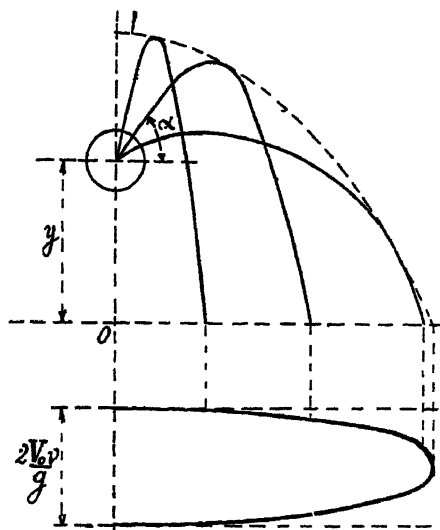
Cherchons l'intersection de la gerbe latérale avec un plan horizontal situé à une hauteur  $(-y_1)$  au-dessous du point d'éclatement. Chaque trajectoire d'angle de projection  $\alpha$  et de vitesse initiale  $v$  aura pour intersection, avec le plan  $(-y_1)$ , l'abscisse  $x$  définie par l'équation

$$-y_1 = x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2 v^2 \cos^2 \alpha}.$$

Ce point sera atteint au bout d'un temps  $t = \frac{x}{v \cos \alpha}$ .

D'autre part, pendant ce même temps  $t$ , l'observateur se sera déplacé avec une vitesse  $V_0$  et aura parcouru un espace  $\zeta = V_0 t$ . Éliminons  $x$  et  $t$  entre ces trois équations. on aura, pour équation de la courbe des impacts

Fig. 68.



sur le plan horizontal, la formule

$$V_0^2 \left( \frac{g \zeta^2}{2 V_0^2} - y_1 \right)^2 = v^2 \zeta^2 - V_0^2 x^2.$$

Considérons l'éclat qui correspond à la verticale, vers le bas; on a

$$y_1 = v t + \frac{1}{2} g t^2,$$

d'où

$$t = \frac{\sqrt{v^2 - 2 g y_1}}{g} - \frac{v}{g}.$$

On a donc, pour ce point,

$$\zeta = V_0 t = V_0 \sqrt{v^2 - 2 g y_1} - \frac{V_0 v}{g}.$$

Pour l'éclat qui correspond à la verticale vers le haut, le temps, pour revenir à son point de départ, est  $\frac{2v}{g}$ . Donc, jusqu'au plan  $(-y_1)$ , on aura

$$\zeta = V_0 \sqrt{v^2 + 2 g y_1} + \frac{V_0 v}{g}.$$

Ce sont les deux points situés sur l'axe des  $\zeta$ ; la tangente à la courbe est donnée par la formule

$$\frac{d\zeta}{dx} = - \frac{V_0^2 x}{\zeta} \frac{1}{g \left( \frac{g \zeta^2}{2 V_0^2} - y_1 \right) - v^2}.$$

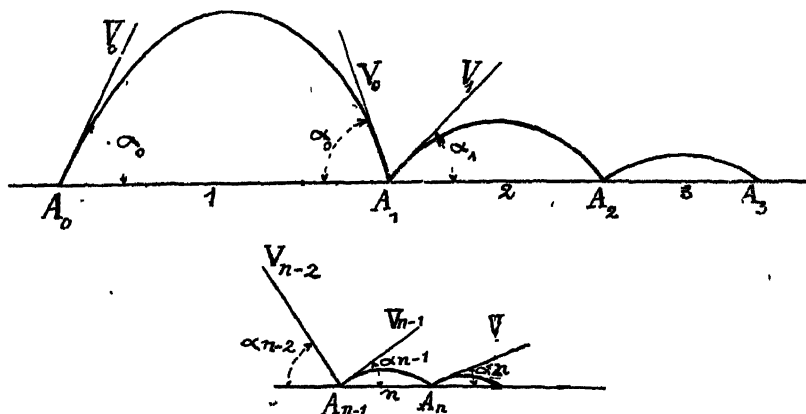
Elle s'annule pour  $x=0$ , et devient infinie pour  $\frac{g \zeta^2}{2 V_0^2} = \frac{v^2}{g} + y_1$ , c'est-à-dire  $\frac{g x^2}{v^2} = \frac{v^2}{g} + 2 y_1$ , à l'intersection de la parabole de sécurité avec le plan  $(-y_1)$ .

**65. Le tir à ricochet.** — Soit un projectile sphérique, lancé du point O avec la vitesse initiale  $V_0$ , sous l'angle  $\alpha$ . La sphère vient frapper le plan horizontal de départ en  $A_1$ , avec la même vitesse  $V_0$  qu'au départ. Mais le sol n'est pas parfaitement élastique : la sphère rebondit et commence une nouvelle parabole, mais avec une vitesse initiale plus petite  $V_1$  et sous un angle de projection plus petit  $\alpha_1$ . Elle frappe de nouveau le sol en  $A_2$  et ainsi de suite.

*Quelles sont, après le  $n^{\text{ème}}$  bond, la portée  $\Sigma X_n$  et la durée du trajet correspondante  $\Sigma T_n$  ? (Bordoni, 1816.)*

Admettons, comme cas intermédiaire entre celui des corps parfaite-

Fig. 69.



ment élastiques et celui des corps mous, que si la sphère vient frapper le sol indéfini, avec une vitesse  $V$ , sous l'angle  $i$ , les deux composantes de la vitesse  $V \sin i$  et  $V \cos i$  sont modifiées et deviennent  $\eta V \sin i$  et  $\eta' V \cos i$ . Les coefficients  $\eta$  et  $\eta'$  sont compris entre 0 (corps mous) et 1 (corps parfaitement élastiques).

Soit alors  $X_n$  la  $n^{\text{ème}}$  portée, entre  $A_{n-1}$  et  $A_n$ . On a

$$X_n = \frac{V_{n-1}^2}{g} \sin 2\alpha_{n-1}, \quad T_n = \frac{2V_{n-1}}{g} \sin \alpha_{n-1}.$$

Mais on a, par hypothèse,

$$V_{n-1} \cos \alpha_{n-1} = \eta' V_{n-2} \cos \alpha_{n-2}, \quad V_{n-1} \sin \alpha_{n-1} = \eta V_{n-2} \sin \alpha_{n-2}.$$

On pourra donc écrire

$$X_n = \eta \eta' \frac{V_{n-2}^2}{g} \sin 2\alpha_{n-2} = \eta \eta' X_{n-1}, \quad T_n = \eta \frac{V_{n-2}}{g} \sin \alpha_{n-2} = \eta T_{n-1}.$$

de sorte qu'on aura les formules de récurrence suivantes :

$$\begin{aligned} X_n &= \eta \eta' X_{n-1}, & T_n &= \eta T_{n-1}, \\ X_{n-1} &= \eta \eta' X_{n-2}, & T_{n-1} &= \eta T_{n-2}, \\ &\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ X_2 &= \eta \eta' X_1, & T_2 &= \eta T_1, \\ X_1 &= \eta \eta' X_0, & T_1 &= \eta T_0. \end{aligned}$$

On en déduit

$$X_n = (\eta \eta')^{n-1} X_1, \quad T_n = \eta^{n-1} T_1,$$

et, pour les sommes  $\Sigma X_n$  et  $\Sigma T_n$  ( $n$  variant de 1 à  $n$ ).

$$\begin{aligned} \Sigma X_n &= X_1 [1 + \eta \eta' + (\eta \eta')^2 + \dots + (\eta \eta')^{n-1}], \\ \Sigma T_n &= T_1 [1 + \eta + \eta^2 + \dots + \eta^{n-1}], \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\Sigma X_n = \frac{1 - (\eta \eta')^n}{1 - \eta \eta'} \frac{V_0^2 \sin 2\alpha_0}{g}, \quad \Sigma T_n = \frac{1 - \eta^n}{1 - \eta} \frac{2V_0 \sin \alpha_0}{g}.$$

Théoriquement, la sphère rebondira sur le sol en décrivant un nombre infini d'arcs de parabole; mais, cependant, la portée totale  $\Sigma X_\infty$  de l'origine, au point où le corps revient au repos complet, et le temps total  $\Sigma T_\infty$  sont finis.

En effet, puisque  $\eta$  et  $\eta'$  sont de véritables fractions, pour  $n = \infty$ , on a : limite  $\eta^n = 0$ , et les formules deviennent

$$\Sigma X_\infty = \frac{1}{1 - \eta \eta'} \frac{V_0^2 \sin 2\alpha_0}{g}, \quad \Sigma T_\infty = \frac{1}{1 - \eta} \frac{2V_0 \sin \alpha_0}{g}.$$

Sur un sol infiniment mou, on a

$$\eta = \eta' = 0.$$

Donc

$$\Sigma X_\infty = \frac{V_0^2}{g} \sin 2\alpha_0.$$

Sur un sol parfaitement élastique, on a

$$\eta = \eta' = 1.$$

Donc

$$\Sigma X_{\infty} = \infty.$$

Pour les sommets successifs de la trajectoire,  $Y_s = \frac{1}{2} g T_s^2$ , on a

$$Y_{s(n)} = \eta^2 Y_{s(n-1)}.$$

*Problèmes.* — *a.* Une bille, dont on connaît l'élasticité  $\eta$ , tombe d'une hauteur donnée  $H$  sur un plan horizontal. Trouver tout l'espace que la bille doit parcourir avant d'arriver au repos (Jullien).

L'espace cherché est égal à  $\frac{1+\eta^2}{1-\eta^2} H$ .

*b.* Une bille pesante est lancée d'une hauteur de 20<sup>m</sup> contre un plan horizontal; elle rebondit à 10<sup>m</sup>, retombe de nouveau et rebondit de 4<sup>m</sup>. Trouver l'élasticité de la bille et la vitesse à laquelle elle a été lancée.

On a

$$v^2 = V_0^2 + 40g, \quad \eta^2 v^2 = 20g, \quad \eta^4 v^2 = 8g.$$

Donc

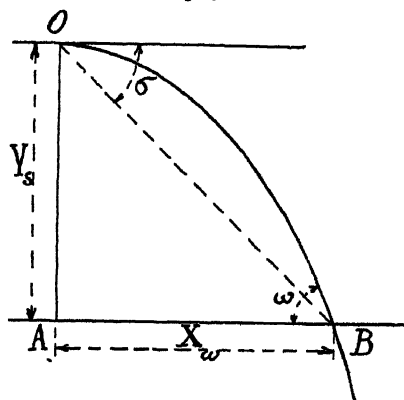
$$\eta = \sqrt{\frac{2}{5}}, \quad V_0 = \sqrt{10g}$$

ou, à peu près,

$$V_0 = 9^m, 90 \text{ par seconde.}$$

66. Le problème de l'aéro-cible. — Un aviateur, à bord d'un aéroplane animé d'une vitesse  $v$ , horizontale, laisse tomber une bombe.

Fig. 70.



*En quel point atteindra-t-elle le sol, et quelles seront les erreurs à craindre dans ce tir?*

1° *Trajectoire.* — L'équation de la trajectoire de la bombe est la parabole du vide, où l'on fera  $x = 0$ , et  $V_0 = v$  :

$$y = -\frac{gx^2}{2v^2}.$$

La trajectoire est ainsi rapportée à son sommet.

L'aéroplane étant en O, à l'altitude Y, sur la verticale du point A, le point atteint sera B. Les éléments de la trajectoire en ce point seront l'abscisse AB désignée par  $X_\omega$ , la vitesse totale  $V_\omega$ , la durée de la chute  $T_\omega$ , et l'angle de chute  $\omega$ .

Les deux variables naturelles du problème sont évidemment  $v$  et Y, qu'il faut supposer connues, à chaque instant, du pointeur. C'est en fonction de ces variables qu'il importe d'exprimer tous les éléments du point de chute.

On a, d'après les formules du sommet (26) :

$$(1) \quad X_\omega = v \sqrt{\frac{2}{g}} \sqrt{Y}, \quad (3) \quad V_\omega = \sqrt{v^2 - 2gY},$$

$$(2) \quad T_\omega = \sqrt{\frac{2}{g}} \sqrt{Y}, \quad (4) \quad \tan \omega = \sqrt{2g} \sqrt{\frac{Y}{v}}.$$

2° *Pointage.* — Le projectile atteindra le but s'il est lâché lorsque le but est vu de l'aéroplane sous l'angle de site  $\sigma$ , tel que  $\tan \sigma = \frac{Y}{X_\omega}$ , ce qui s'exprime, en fonction de Y et de  $v$ , par la formule

$$(5) \quad \tan \sigma = \sqrt{\frac{g}{2}} \frac{\sqrt{Y}}{v}.$$

La hausse qui permettra de pointer sera donc constituée par un *guidon*, porté par une traverse horizontale graduée proportionnellement à  $v$ , et par un *cillet*, porté par une tige verticale graduée proportionnellement à  $\sqrt{\frac{gY}{2}}$ .

3° On établira facilement les trois théorèmes suivants :

a. Pendant la chute, la bombe reste toujours sur la verticale de l'aéroplane;

b. On a, entre  $\omega$  et  $\sigma$ , la relation  $\tan \omega = 2 \tan \sigma$ ;

c. Le lieu des points du plan vertical d'où l'on peut atteindre le même but est la parabole  $y = \frac{gx^2}{2v^2}$ , ayant son sommet au but.

4° *Formules des erreurs.* — A quelle distance  $\partial X_\omega$  du but tombera



la bombe, si l'on commet, sur l'appréciation de la valeur actuelle des deux variables  $v$  et  $Y$ , des erreurs  $\partial v$  et  $\partial Y$ ?

D'après la formule (1) :

$$X_{\omega} = \sqrt{\frac{2}{g}} v \sqrt{Y},$$

on a d'abord

$$\frac{\partial X_{\omega}}{X_{\omega}} = \frac{\partial v}{v}.$$

Quant à l'erreur  $\partial X_{\omega}$  due à une erreur  $\partial Y$  sur l'altitude, remarquons que l'aviateur, ayant donné à sa ligne de mire l'inclinaison

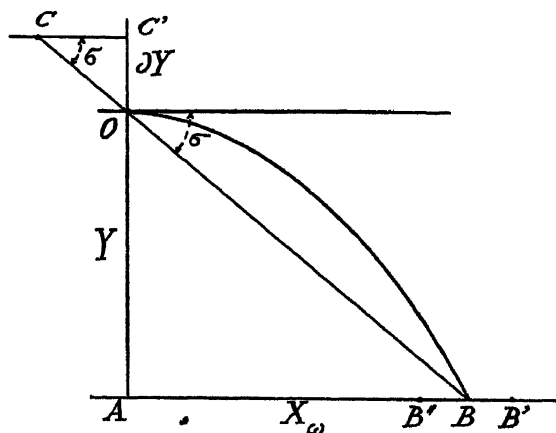
$$\text{tang } \sigma = \sqrt{\frac{g}{2}} \frac{\sqrt{Y}}{v},$$

lâchera sa bombe au point C où il croquera la ligne de site COB, d'inclinaison  $\sigma$  qu'il s'est définie lui-même.

S'il lâchait la bombe en C', en différenciant la formule (1), on aurait

$$\frac{(\partial X_{\omega})'}{X_{\omega}} = \frac{1}{2} \frac{\partial Y}{Y}.$$

Fig. 71.



Le projectile tomberait en B'; on a

$$BB' = (\partial X_{\omega})'.$$

Comme il la lance en C, le projectile tombera en B', point tel que  $B'B' = CC' = \partial Y \cot \sigma$ .

On aura donc

$$BB'' = \partial X_{\omega} = (B'B' - BB') = (\partial X_{\omega})' - \partial Y \cot \sigma.$$

Donc

$$\frac{\partial X_{\omega}}{X_{\omega}} = \frac{1}{2} \frac{\partial Y}{Y} - \frac{\partial Y}{X_{\omega}} \cot \sigma.$$

Mais on a

$$\frac{\cot \sigma}{X_{\omega}} = \frac{1}{Y}.$$

On a donc, pour l'erreur  $\partial Y_{\omega}$  cherchée,

$$\frac{\partial X_{\omega}}{X_{\omega}} = -\frac{1}{2} \frac{\partial Y}{Y},$$

c'est-à-dire

$$BB' = -BB'.$$

La formule générale est donc

$$\frac{\partial X_{\omega}}{X_{\omega}} = \frac{\partial v}{v} - \frac{1}{2} \frac{\partial Y}{Y}.$$

Supposons, par exemple, que  $\partial v$  soit proportionnel à  $v$  et  $\partial Y$  à  $Y$ , c'est-à-dire qu'on ait  $\partial v = m v$ , et  $\partial Y = m' Y$ .

On aura

$$\partial X_{\omega} = \left(m - \frac{m'}{2}\right) \sqrt{\frac{2}{g}} v \sqrt{Y}.$$

On devra donc dire que les dimensions des buts d'égale difficulté, quand  $v$  et  $Y$  varieront, devront être proportionnelles au produit  $v \sqrt{Y}$ .

5° *Erreur due à l'inclinaison de l'aéroplane.* — Il arrivera sans doute assez souvent qu'au moment du lâcher de la bombe, l'axe de l'aéroplane, au lieu d'être horizontal, sera incliné d'un petit angle  $\eta$ . Il s'agit d'évaluer l'erreur qui résultera de ce fait.

La trajectoire définie par la vitesse initiale  $v$  et l'angle de projection  $\eta$  aura pour équation ( $\eta$  étant très petit)

$$y = x \tan \eta - \frac{g x^2}{2 v^2}.$$

Cherchons, pour la portée  $X_{\omega} = AB$ , l'augmentation de portée  $BC'$  due à l'angle  $\eta$ .

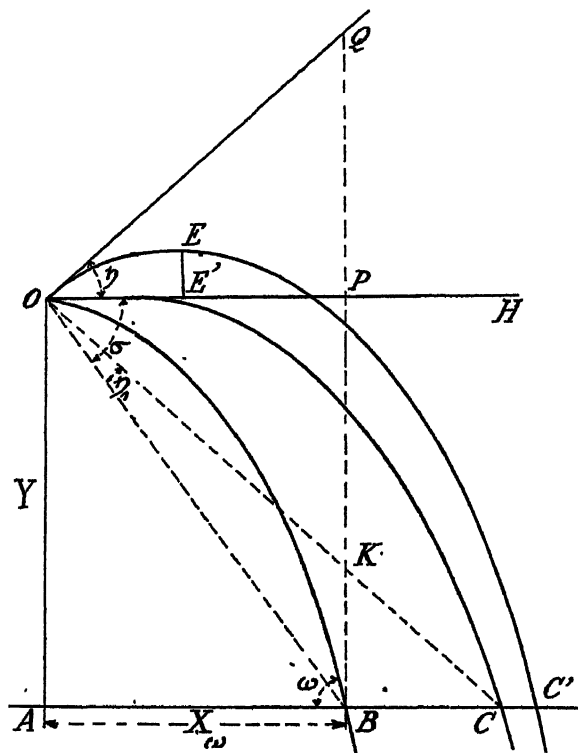
Pour passer de la trajectoire  $OB$  à la trajectoire  $OEC'$ , qui ( $\eta$  étant très petit, de sorte que l'on a  $\cos \eta = 1$  très sensiblement) ont même vitesse  $v$  aux sommets  $O$  et  $E$ , on peut procéder comme il suit :

a. Transporter la trajectoire  $OB$  horizontalement en  $EC'$ , le point  $E$

étant l'abscisse du sommet E. On a alors

$$BC = OE' = \frac{v^2}{g} \tan \eta.$$

Fig. 72.



b. Transporter la trajectoire E/C verticalement en EC'. On a alors

$$CC' = EE' \cot \omega;$$

comme  $EE' = \frac{v^2}{2g} \tan^2 \eta$ , on aura

$$CC' = \frac{v^2}{2g} \tan^2 \eta \cot \omega.$$

Donc, quand l'ordonnée Y sera suffisamment grande,  $\omega$  tendra vers  $\frac{\pi}{2}$ , et CC' vers zéro.

On aura, par suite, la formule simple

$$dX_\omega = \frac{v^2}{g} \tan \eta.$$

L'erreur ne dépend donc pas sensiblement de l'altitude.

Voici, d'ailleurs, comment on pourrait corriger cette erreur.

Supposons qu'on maintienne toujours horizontale la traverse OH de la hausse qui porte les graduations en vitesse. Le point C étant le point atteint, c'est ce point qu'il faut viser, et, pour cela, on doit donner à la ligne de mire l'inclinaison  $(\sigma - \eta_1)$ , au lieu de l'inclinaison  $\sigma$ .

On a

$$Y = X_{\omega} \tan \sigma \quad \text{et} \quad Y = (X_{\omega} + dX_{\omega}) \tan(\sigma - \eta_1);$$

d'où

$$dX_{\omega} = X_{\omega} \frac{\tan \eta_1}{\tan \sigma \cos^2 \sigma}.$$

Mais on a

$$X_{\omega} = \sqrt{\frac{2}{g}} v \sqrt{Y}, \quad \tan \sigma = \sqrt{\frac{g}{2}} \frac{\sqrt{Y}}{v}, \quad dX_{\omega} = \frac{v^2}{g} \tan \eta_1.$$

Il en résulte la relation

$$\tan \eta_1 = \frac{1}{2} \cos^2 \sigma \tan \eta.$$

Sur la figure, on a

$$BK = PB - PK = X_{\omega} [\tan \sigma - \tan(\sigma - \eta_1)] = X_{\omega} \frac{\tan \eta_1}{\cos^2 \sigma} = \frac{1}{2} X_{\omega} \tan \eta.$$

Donc

$$BK = \frac{1}{2} PQ.$$

On pourrait donc corriger automatiquement l'erreur due à l'inclinaison de l'aéroplane en maintenant horizontale la traverse OH de la hausse et en liant le guidon à l'axe OQ de l'aéroplane, de telle sorte qu'il en suive le mouvement, mais diminué de moitié.

6° *Cas d'un but mobile.* — a. Si l'on suppose que le but (troupe, navire) est en marche, avec une vitesse  $u$ , positive dans le sens de la marche de l'aéroplane, il est facile de voir que l'angle  $\sigma_1$ , sous lequel il faut viser le but en mouvement, est tel que

$$\tan \sigma_1 = \frac{v}{v \pm u} \tan \sigma.$$

On a, en effet, sur la figure :

$$\tan \sigma = \frac{Y}{X_{\omega}}, \quad \tan \sigma_1 = \frac{Y}{X_{\omega} - u T_{\omega}},$$

avec

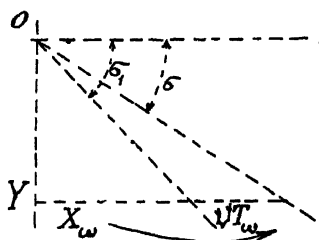
$$X_{\omega} = u T_{\omega}.$$

Cela revient d'ailleurs à dire : Placer la hausse non sur la vitesse  $v$ , mais sur la vitesse  $(v \pm u)$ .

Une erreur sur  $u$  a le même effet qu'une erreur sur  $v$ .

b. Si  $u_2$  est la vitesse du but perpendiculairement à la marche de l'aéroplane, il faut dévier le *guidon*, dans le sens du mouvement du

Fig. 73.

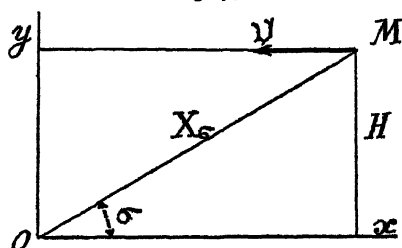


but, d'une quantité égale à  $u_2 T_w$  à l'échelle des  $v$  sur la hausse, c'est-à-dire égale à  $u_2 \sqrt{\frac{2Y}{g}}$ .

67. **Tir sur but mobile.** — Soit un avion qui vole à une altitude  $H$ , avec une vitesse  $u$  dirigée vers la batterie, qui tire sur lui du point  $O$ . A l'instant où l'on fait feu, il est à la distance  $X_\sigma$  comptée sur la ligne de site  $\sigma$ . Quel est l'angle de projection à employer pour l'atteindre?

1° On sait que, si le but est immobile, l'angle de projection  $\alpha$  à em-

Fig. 74.



ployer est donné par l'équation de la trajectoire en coordonnées polaires (29), c'est-à-dire

$$X_\sigma = \frac{2V_0^2}{g} \frac{\cos \alpha}{\cos^2 \sigma} \sin(\alpha - \sigma).$$

D'autre part, le temps  $T_\sigma$  mis par le projectile, pour aller de  $O$  en  $M$ , est donné par la formule (54, 3°)

$$T_\sigma = \frac{2V_0}{g} \frac{\sin(\alpha - \sigma)}{\cos \sigma}.$$

Nous supposons que le chemin parcouru pendant le *temps*  $T_\sigma$ , par l'avion, c'est-à-dire  $u T_\sigma$ , est petit relativement à la distance  $X_\sigma$ , de sorte que  $\partial X_\sigma$ ,  $\partial \sigma$ , et, conséquemment,  $\partial x$ , sont des quantités très petites.

On a,  $x$  étant l'abscisse du point M,

$$x = X_\sigma \cos \sigma,$$

d'où

$$\partial x = \cos \sigma \partial X_\sigma - X_\sigma \sin \sigma \partial \sigma,$$

et, comme  $\partial x = -u T_\sigma$  (la vitesse  $u$  étant dirigée vers la batterie),

$$(1) \quad -u T_\sigma = \cos \sigma \partial X_\sigma - X_\sigma \sin \sigma \partial \sigma.$$

D'autre part,

$$H = X_\sigma \sin \sigma,$$

d'où, puisque  $H$  est une constante,

$$(2) \quad 0 = \sin \sigma \partial X_\sigma + X_\sigma \cos \sigma \partial \sigma.$$

On déduit de ces deux équations

$$(3) \quad \partial X_\sigma = -u T_\sigma \cos \sigma, \quad \partial \sigma = \frac{u T_\sigma}{X_\sigma} \sin \sigma.$$

Différentiant logarithmiquement l'équation de la trajectoire, on aura

$$\frac{\partial X_\sigma}{X_\sigma} = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \partial \alpha + \frac{2 \sin \sigma}{\cos \sigma} \partial \sigma + \frac{\cos(\alpha - \sigma)}{\sin(\alpha - \sigma)} (\partial \alpha - \partial \sigma),$$

d'où

$$\frac{\partial X_\sigma}{X_\sigma} - \frac{1}{\cos \sigma} \left[ \frac{\cos \alpha + \sin \sigma \sin(\alpha - \sigma)}{\sin(\alpha - \sigma)} \right] \partial \sigma = \frac{\cos(\alpha - \sigma)}{\cos \alpha \sin(\alpha - \sigma)} \partial \alpha.$$

Remplaçons  $\partial X_\sigma$  et  $\partial \sigma$  par leurs valeurs, il viendra

$$-\frac{u T_\sigma}{X_\sigma} \sin \alpha = \frac{\cos(\alpha - \sigma)}{\cos \alpha} \partial \alpha.$$

Mais

$$\frac{T_\sigma}{X_\sigma} = \frac{\cos \sigma}{V_0 \cos \alpha}.$$

Donc :

$$(a) \quad \partial \alpha = -\frac{u}{V_0} \frac{\cos \sigma \sin \alpha}{\cos(\alpha - \sigma)}.$$

Telle est la formule cherchée, qui donne la correction  $\partial \alpha$  à faire subir à l'angle de projection pour pouvoir atteindre l'avion en marche.

2° Soit le but se déplaçant sur le plan horizontal (tir contre la cavalerie). On a

$$\partial \alpha = -\frac{u}{V_0} \frac{\sin \alpha}{\cos 2\alpha}.$$

On peut vérifier cette formule au moyen des formules différentielles du point de chute (28).

On a, en effet,

$$dX = \frac{2V_0^2}{g} \cos 2\alpha \, d\alpha,$$

et si

$$dX = -uT = -2u \frac{V_0}{g} \sin \alpha,$$

on aura

$$(b) \quad d\alpha = -\frac{u}{V_0} \frac{\sin \alpha}{\cos 2\alpha}.$$

3° On peut chercher, enfin, quelle est la modification à l'évent qu'il y a lieu d'effectuer pour que le projectile éclate sur l'avion. Il suffira de différentier  $T_\sigma$ , et de remplacer  $d\alpha$  et  $d\sigma$  par leurs valeurs

$$d\alpha = -\frac{u}{V_0} \frac{\sin \alpha \cos \sigma}{\cos(2\alpha - \sigma)}, \quad d\sigma = \frac{u}{V_0} \frac{\cos \sigma}{\cos \alpha} \sin \sigma;$$

on obtient la formule

$$\frac{\partial T_\sigma}{T_\sigma} = \frac{u}{V_0} \frac{\cos \sigma}{\sin(\alpha - \sigma)} \left[ \tan \sigma - \frac{\sin \alpha \cos(\alpha - \sigma)}{\cos(2\alpha - \sigma)} \right].$$

Dans le cas du tir sur le plan horizontal  $\sigma = 0$ , on a

$$\frac{\partial T_\sigma}{T_\sigma} = -\frac{u}{V_0} \frac{\cos \alpha}{\cos 2\alpha}.$$

*Remarques.* — I. Les formules (a) et (b) ne sont naturellement pas applicables au moment où l'avion entre dans le champ de tir du canon, c'est-à-dire à la distance qui correspond à la portée maximum sur la ligne de site  $\sigma$ , telle que  $2\alpha - \sigma = \frac{\pi}{2}$  (§3, 3°).

Pour résoudre complètement le problème, il faudrait prendre un terme de plus dans le développement de la série qui exprime  $dX$  en fonction de  $d\alpha$ .

II. D'ailleurs, dans le cas du tir sur l'horizon ( $\sigma = 0$ ), on peut donner la formule finie que fait connaître l'angle  $\alpha'$  à employer, lorsque l'on connaît la portée  $X$  correspondant à l'angle  $\alpha$  sur but immobile.

On a, en effet, par les propriétés du mouvement projeté horizontalement :

$$V_0 T' \cos \alpha' + u T' = \frac{2V_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha.$$

Mais

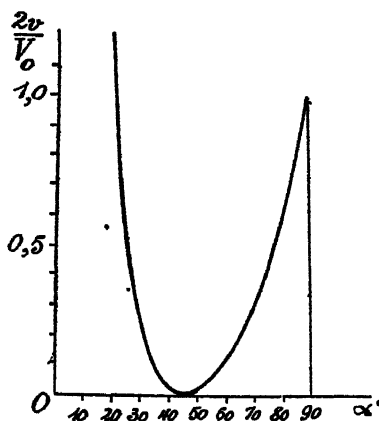
$$T' = \frac{2V_0 \sin \alpha'}{g}.$$

Il vient donc la formule

$$\sin \alpha' \cos \alpha' + \frac{u}{V_0} \sin \alpha' = \sin \alpha \cos \alpha.$$

qui détermine le nouvel angle de projection  $\alpha'$ , quels que soient la valeur du rapport  $\frac{u}{V_0}$  et l'angle de projection  $\alpha$ .

Fig. 75.



Ainsi, supposons  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ; on aura à résoudre l'équation

$$\sin 2\alpha' + 2 \frac{u}{V_0} \sin \alpha' = 1$$

ou

$$\frac{1}{\sin \alpha'} - 2 \cos \alpha' = 2 \frac{u}{V_0}.$$

On peut mettre cette formule sous forme de graphique (fig. 75).

Pour une valeur donnée de  $\frac{u}{V_0}$ , il existe deux angles  $\alpha'$  répondant à la question; l'un pour la trajectoire tendue  $\alpha' < \frac{\pi}{4}$ , l'autre pour la trajectoire courbe  $\alpha' > \frac{\pi}{4}$ .

On pourrait, sur le même abaque, construire aisément des courbes analogues résolvant le même problème, pour des valeurs de  $\alpha$  différentes de  $\frac{\pi}{4}$ .

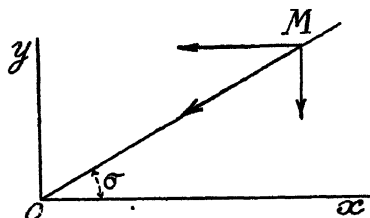
68. Tir des flèches porte-amarre. — 1° Supposons qu'une amarre,



fixée au projectile, soit constamment tendue et dirigée suivant la ligne de site OM.

Une force retardatrice dirigée suivant OM, et proportionnelle à la

Fig. 76.



longueur de cette droite et au poids  $a'$  par unité de longueur de la corde, sera appliquée à chaque instant au projectile. Ses composantes sont :

$$\begin{aligned} -OM a' \cos \sigma &= -a' x && \text{suivant l'axe des } x; \\ -OM a' \sin \sigma &= -a' y && \text{suivant l'axe des } y. \end{aligned}$$

Les équations du mouvement seront donc,  $p$  étant le poids du projectile :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -a' x, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -p - a' y,$$

ou, en posant  $\frac{a'}{m} = a^2$ , on aura

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -a^2 x, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -g - a^2 y.$$

1° On écrira la première :

$$\frac{du}{dt} = -a^2 x \quad \text{ou} \quad \frac{u du}{u dt} = -a^2 x,$$

ce qui donne

$$u du = -a^2 x dx$$

et, par suite,

$$(1) \quad u^2 = u_0^2 - a^2 x^2.$$

La seconde donnera de même,  $w$  étant la vitesse verticale :

$$\frac{dw}{dt} = -g - a^2 y \quad \text{ou} \quad \frac{w dw}{w dt} = -g - a^2 y,$$

c'est-à-dire

$$w dw = -g dy - a^2 y dy.$$

L'intégration conduit à la formule

$$(2) \quad w^2 = V_0^2 \sin^2 \alpha - 2gy - a^2 y^2.$$

Les vitesses sont donc connues en chaque point.

De (1) on tire

$$u = u_0 \sqrt{1 - \frac{a^2}{u_0^2} x^2},$$

et, comme  $u = \frac{dx}{dt}$ , on aura, pour le temps :

$$dt = \frac{dx}{u_0 \sqrt{1 - \frac{a^2}{u_0^2} x^2}} = \frac{1}{a} \left( \frac{a}{u_0} \right) \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{u_0^2} x^2}}.$$

Donc

$$at = \arcsin \frac{ax}{u_0}$$

ou

$$(3) \quad \frac{ax}{u_0} = \sin at.$$

De l'équation (2), on tire

$$w = \frac{dy}{dt} = \sqrt{V_0^2 \sin^2 x - 2gy - a^2 y^2}.$$

En faisant le changement de variable  $y = \zeta - \frac{g}{a^2}$ , et posant

$$V_0^2 \sin^2 x + \frac{g^2}{a^2} = \frac{1}{k^2},$$

on obtient

$$a dt = \frac{ak d\zeta}{\sqrt{1 - k^2 a^2 \zeta^2}},$$

d'où

$$at = \arcsin ka\zeta - C;$$

et comme, pour  $t = y = 0$ , on a  $\zeta_0 = \frac{g}{a^2}$ , la constante C est telle que

$$C = \arcsin \left( \frac{gk}{a} \right).$$

L'équation du mouvement est donc

$$(4) \quad ka \left( y + \frac{g}{a^2} \right) = \sin(C + at).$$

3° L'élimination de  $at$  entre les deux équations (3) et (4) donne l'équation de la trajectoire, qui est une ellipse, dont le centre est au point  $y = -\frac{g}{a^2}$ . C'est le point I.

Le point A correspond à l'annulation de la vitesse horizontale (1) et l'on a, pour ce point :

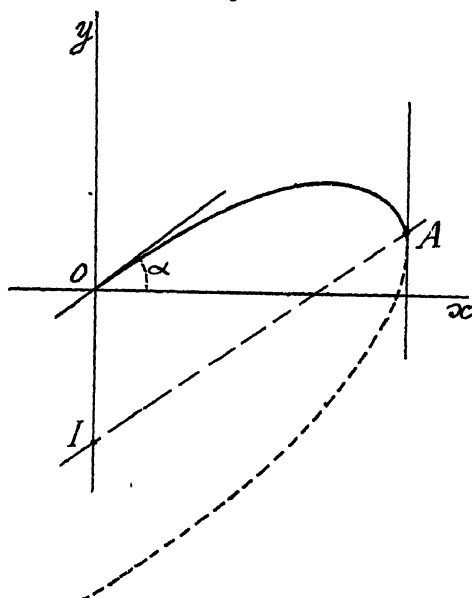
$$x = \frac{u_0}{a} \quad \text{et} \quad at = \frac{\pi}{2}.$$

Alors  $y$  sera donné par la formule

$$ka\left(y + \frac{g}{a^2}\right) = -\cos C$$

La partie de la courbe, à partir du point A, n'est réelle et ne correspond au même problème que si l'on suppose que la corde est toujours

Fig. 77.



maintenue tendue et qu'on exerce une traction proportionnelle à sa longueur.

Ce serait le cas d'une corde élastique de poids négligeable, dont la tension est proportionnelle à l'allongement.

La portée maximum sera obtenue lorsque le point A sera sur O.r ( $y=0$ ). On aura donc

$$\frac{kg}{a} + \cos C = 0.$$

Mais

$$\frac{kg}{a} = \sin C.$$

Donc

$$\sin C + \cos C = 0,$$

d'où

$$C = \frac{3\pi}{4} \quad \text{et} \quad \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On a donc

$$k = \frac{a}{g} \frac{V^2}{2},$$

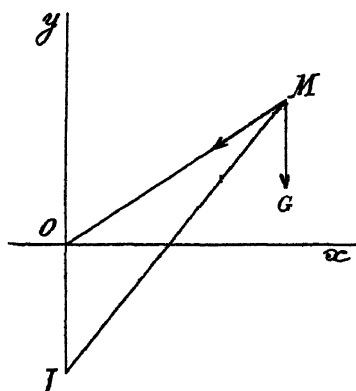
et, en se reportant à la valeur de  $k$ , on trouve

$$V_0 \sin \alpha_m = \frac{g}{a}.$$

C'est la valeur de l'angle de portée maximum.

4° Ce problème n'est autre que celui du mouvement d'un point attiré

Fig. 78.



par un centre fixe proportionnellement à la distance. En effet, la composition des deux forces OM et MG à l'échelle où OM représente l'une d'elles donne la résultante MI qui passe par un point fixe I, puisque la seconde MG est constante. Cette résultante est d'ailleurs IM à l'échelle adoptée. On sait qu'on a

$$OI = \frac{g}{a^2}.$$

**69. Tir pendulaire** (*Lieutenant de vaisseau Le Prieur*). — Examinons un autre cas de *tir guidé*. Pour atteindre le but B par une bombe lancée verticalement de A, on prendra  $PA = PB$  et l'on attachera la bombe par un fil d'acier au point fixe P, milieu de AB.

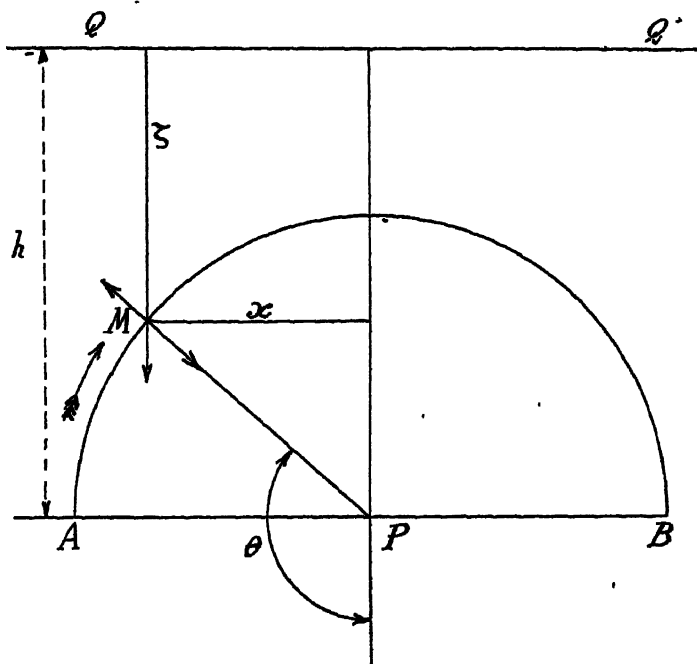
Elle décrira une circonférence et son mouvement est, en première approximation, celui d'un pendule simple autour de P.

Soit  $V_0$  la vitesse initiale verticale en A et soit menée l'horizontale QQ' située à la hauteur  $h = \frac{V_0^2}{2g}$  au-dessus du centre P. On aura, en

désignant par  $\zeta$  et  $x$  les coordonnées du point actuel M :

$$x^2 + (h - \zeta)^2 = R^2,$$

Fig. 79.



où  $R$  est le rayon du cercle décrit; donc :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{h - \zeta}{\sqrt{R^2 - (h - \zeta)^2}} \frac{d\zeta}{dt}$$

et, par suite,

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 = \frac{R^2}{R^2 - (h - \zeta)^2} \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2.$$

L'équation des forces vives donne, d'autre part,  $v^2 = 2g\zeta$ , la constante  $h$  ayant été choisie comme ci-dessus; on a donc, en résolvant, par rapport à  $dt$ , la formule

$$dt = \frac{R d\zeta}{\sqrt{2g\zeta[R^2 - (h - \zeta)^2]}},$$

de sorte que l'équation finie du mouvement dépend, comme on le sait, des fonctions elliptiques.

En faisant la transformation classique, et, par suite, en posant

$$\zeta = h + R \cos \theta, \quad \frac{1}{2} \left( \frac{h}{R} + 1 \right) = k^2, \quad \lambda \sin \varphi = \sin \frac{\theta}{2},$$

on aura la formule

$$\sqrt{\frac{g}{R}} t = - \int \frac{dz}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

L'angle  $\theta$  varie de  $\frac{\pi}{2}$  à  $\frac{3\pi}{2}$ .

Pour que la bombe puisse faire le tour complet de la circonférence, il faut que  $R < h$ . Mais, cette condition n'est suffisante que si le mobile exerce, pendant tout le mouvement, une traction  $A$  sur le fil  $MP$ . Cette traction a pour valeur la somme de la force centrifuge  $\frac{mv^2}{R}$  et de la composante normale de la force appliquée  $mg \frac{\zeta - h}{R}$ . La traction est donc

$$A = \frac{mg}{R} \left( \frac{v^2}{g} + \zeta - h \right),$$

et, en remplaçant  $v^2$  par sa valeur  $v^2 = 2g\zeta$ , on a

$$A = \frac{mg}{R} (3\zeta - h).$$

Cette traction s'annule pour  $\zeta = \frac{h}{3}$ . Le projectile n'exerce donc une traction permanente sur le fil que si le point le plus haut, dont l'ordonnée est  $(h - R)$ , se trouve au-dessous de l'horizontale  $\zeta = \frac{h}{3}$ , d'où

$$h - R > \frac{h}{3} \quad \text{ou} \quad h > \frac{3}{2} R.$$

On a donc

$$V_0^2 > 3gR.$$

Le Tableau suivant indique les valeurs limites du rayon  $R$ , en regard des vitesses de la bombe :

$V_0$ .	$R$ limite.
50.....	85
100 .. . . .	340
150.....	765
200.....	1360

Si l'on prend ces valeurs limites, la traction du fil, qui est maximum en  $A$  et  $B$ , est égale à

$$A = 2 \frac{mg}{R} h = 2 \frac{mg}{R} \frac{3}{2} R = 3mg,$$

c'est-à-dire trois fois le poids de la bombe.

Dans le cas général, pour la traction en A, on a

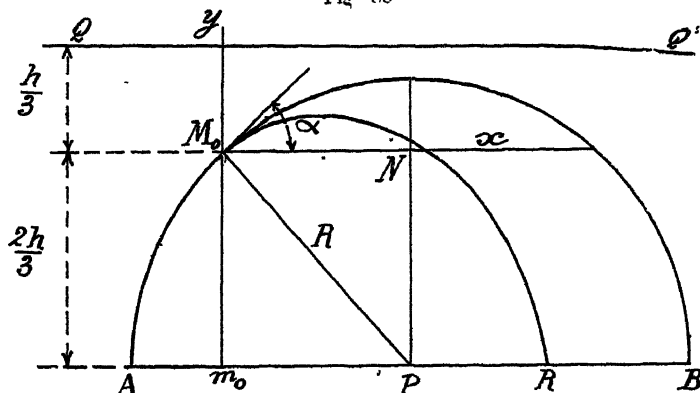
$$A_0 = \frac{m V_0^2}{R}.$$

Si, avec  $V_0 = 100^m$ , on prend  $R = 100^m$ , on a

$$A_0 = 10, > mg.$$

*Théorème.* — Si  $R > \frac{2h}{3}$ , le projectile quitte la circonférence au point  $r = \frac{h}{3}$  et décrit une parabole; démontrer qu'il retombera au delà du point fixe P, si  $R < \frac{2h}{3}$ , et en deçà, si  $R > \frac{2h}{3}$ .

Fig 80



L'équation de la parabole  $M_0R$  est

$$y = x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha)$$

avec

$$\cos \alpha = \frac{2h}{3R} \quad \text{et} \quad v_0^2 = \frac{2gh}{3}.$$

Faisant  $y = \frac{2h}{3}$ , on trouve

$$x = m_0 R = \frac{2h}{3} \frac{\tan \alpha + \sqrt{2 + 3 \tan^2 \alpha}}{1 + \tan^2 \alpha},$$

d'où

$$PR = m_0 R - m_0 P = \frac{2h}{3} \left[ \frac{\tan \alpha + \sqrt{2 + 3 \tan^2 \alpha}}{1 + \tan^2 \alpha} - \tan \alpha \right].$$

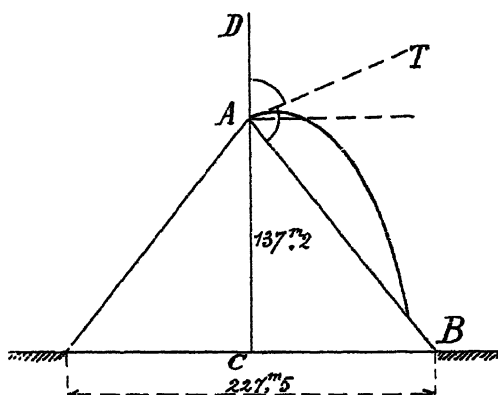
On a  $PR = 0$ , si  $\tan \alpha = \sqrt{2}$ , et, par suite, si  $R = \frac{2h}{\sqrt{2}}$ .

**70. Problèmes divers.** — 1° Est-il possible, du sommet de la pyramide

de Chéops, de lancer une pierre qui atteigne la base de la pyramide sur le sol? (Cranz.)

La hauteur de la pyramide est  $137^m,2$ . La longueur d'un côté de la base carrée est  $227^m,5$ ; d'où l'on obtient pour l'angle de site

Fig. 81.



$\widehat{ABC} = 50^0,21$ . Pour obtenir la portée maximum sur la *ligne de site* AB, il faut, du sommet A, lancer la pierre dans une direction AT qui soit la bissectrice de l'angle BAD du plan incliné et de la verticale.

Donc

$$\widehat{DAT} = \frac{1}{2} (90^0 + 50^0,21) = 70^0,10.$$

L'angle de projection est ainsi  $\alpha = 19^0,50$ .

La vitesse initiale  $V_0$  pour le lancer est d'environ  $24^m$  (moyenne de 30 essais avec différentes personnes). L'équation de la trajectoire est

$$y = x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2 V_0^2 \cos^2 \alpha}$$

et la question est de connaître  $y$  quand  $x$  prend la valeur  $\frac{227,5}{2} = 113,7$ .

On a

$$y = 113,7 \tan(19^0,50) - \frac{(113,7)^2 \cdot 9,81}{2 \cdot 24^2 \cos^2(19^0,50)} = -83,3$$

(avec  $V_0 = 22^m$ , on a  $y = -106^m,9$ ; avec  $V_0 = 20^m$ , on a  $y = -137^m,9$ ).

La réponse est donc : la solution est possible avec quelque habileté.

2° Un même but  $(x, y)$  est simultanément atteint par deux projectiles, dont les vitesses sont  $V_0$  et  $V'_0$  et les angles de projection  $\alpha$  et  $\alpha'$ . Quelle est la différence  $(t - t')$  des durées de trajet?



Réponse :

$$t - t' = \frac{2}{g} \frac{V_0 V_0' \sin(x - x')}{V_0 \cos x - V_0' \cos x'} \quad \text{ou} \quad t - t' = \frac{2}{g} \frac{u_0 u_0' - u_0' u_0}{u_0 + u_0'}.$$

3° Un mortier est dirigé sur le sommet d'une tour; le projectile atteint le pied de la tour dans le plan horizontal de la bouche à feu après  $t$  secondes. Un deuxième coup, avec une autre charge et un angle de projection double, atteint le sommet de la tour après  $t'$  secondes. Quelle est la distance  $D$  de la tour (la grandeur des angles de projection et les vitesses sont inconnues) ?

Réponse :

$$D = \frac{1}{2} g t^2 \sqrt{\frac{t'^2 + t^2}{t'^2 - t^2}}.$$

4° Un projectile est lancé sous une inclinaison connue  $\alpha$  avec une vitesse telle que sa trajectoire passe en un point donné  $A$ ; on sait que la droite qui joint le point de départ au point  $A$  fait avec l'horizon un angle  $\sigma$ , et que le corps parcourerait cette droite en  $\theta$  secondes s'il se mouvait uniformément avec la vitesse initiale. Déterminer l'instant où le projectile atteindra le point  $A$ .

On a

$$t = \theta \frac{\cos \sigma}{\cos \alpha}.$$

5° Déterminer le temps  $t$  qu'un projectile emploie à parcourir un arc donné de sa trajectoire parabolique, en fonction des vitesses  $v_0$  et  $v_1$  aux extrémités de cet arc, de la vitesse  $V_s$  au sommet de la parabole et de l'angle  $(\tau_0 - \tau_1)$  que font entre elles les tangentes aux extrémités de l'arc.

On trouve

$$t = \frac{v_0 v_1}{g V_s} \sin(\tau_0 - \tau_1).$$

6° Une petite bille, d'élasticité donnée, lancée dans une direction connue au-dessus d'un plan incliné qui passe par le point de départ, parcourt ce plan en bondissant. Déterminer les angles d'incidence et de réflexion aux différents chocs.

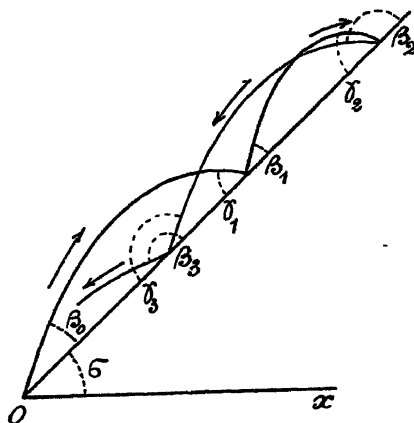
Soient  $\eta$  l'élasticité de la bille,  $\sigma$  l'inclinaison du plan,  $\beta_0$  l'angle que fait la direction du mouvement initial avec le plan,  $\beta_m$  et  $\gamma_m$  les angles de réflexion et d'incidence au  $m^{\text{ième}}$  choc compté à partir du plan.

On trouve

$$\tan \beta_m = \eta \tan \gamma_m = \frac{(1 - \eta) \eta^m \tan \beta_0}{1 - \eta - 2(1 - \eta)^m \tan \sigma \tan \beta_0} \quad (\text{Bordoni, 1816}).$$

7° Les données sont les mêmes que dans le problème précédent. On demande de trouver la relation qui existe entre l'élasticité de la bille et les portées de trois bonds successifs mesurées sur le plan, et de déterminer la distance de la bille à son point de départ, lorsqu'elle commence à glisser en cessant de bondir.

Fig 82.



Conservons les notations du problème précédent, et nommons  $V_0$  la vitesse initiale,  $R_1, R_2, \dots, R_m, R_{m+1}, R_{m+2}$  les portées des arcs successifs et  $S$  la distance de la bille à son point de départ, lorsqu'elle commence à glisser; ces distances  $R_1, R_2, \dots$  et  $S$  seront positives en remontant le plan et négatives en descendant. On trouve la relation

$$R_{m+2} - (\eta + \eta^2) R_{m+1} + \eta^3 R_m = 0,$$

d'où l'on voit que les portées des arcs successifs seront les coefficients des puissances successives de l'indéterminée  $Z$  dans le développement de la fraction

$$\frac{R_1 - (\eta + \eta^2) R_1 - R_2}{1 - (\eta + \eta^2) Z + \eta^3 Z^2},$$

suivant les puissances ascendantes de  $Z$ . Il suit de là, en faisant  $Z = 1$ :

$$S = \frac{R_1(1 - \eta - \eta^2) + R_2}{(1 - \eta)^2(1 + \eta)},$$

$$S = \frac{2V_0^2 \sin \beta_0}{g \cos^2 \sigma} \left[ \frac{\cos \beta_0 \cos \sigma}{1 - \eta} - \frac{\sin \beta_0 \sin \sigma}{(1 - \eta)^2} \right],$$

et, si l'on pose  $(1 - \eta) \cot \sigma = \cot \psi$ , on a :

$$S = \frac{2V_0^2 \sin \beta_0 \sin \psi \cos(\frac{\beta_0}{2} + \psi)}{g \sin \sigma \cos^2 \psi}.$$

Si  $\tau_1 = 1$  (vide), on trouve

$$R_m = m R_1 - (m - 1) R_1 \quad (36).$$

Le nombre de bonds, en montant un plan incliné avant la descente, est donc

$$m = \frac{R_1}{R_1 - R_2} \quad (\text{W. Walton. 1842}).$$

8° *Pelote basque*. — D'un point A, la balle est lancée avec une vitesse  $V_0$  constante, mais sous des angles  $\alpha$  variables; elle rebondit sur un mur vertical. Étant imparfaitement élastique, sa vitesse horizontale  $u$ , normale au mur, devient  $\tau_1 u$ ,  $\tau_1$  étant une fraction comprise entre 0 et 1. Quelle sera la trajectoire de la balle après le choc?

On trouve, pour équation de la trajectoire rebondie :

$$y = \frac{x}{\tau_1} \left( \tan \alpha - \frac{g x_0}{u_0^2} \right) - \frac{g x^2}{2 \tau_1^2 u_0^2}.$$

Elle coupe l'horizontale du point A en un point situé de l'autre côté du mur à une distance  $\tau_1 x_0$ .

La bille retombe au point  $x_0$ , d'où on l'a lancée, si

$$\sin 2\alpha = \frac{g x_0}{V_0^2} \left( 1 + \frac{1}{\tau_1} \right).$$

9° On considère deux trajectoires voisines  $\alpha$  et  $(\alpha + d\alpha)$  qui se coupent en E et touchent la parabole de sécurité aux points  $M_1$  et  $M_2$ . Démontrer :

a. Que la différence des abscisses des points  $M_1$  et  $M_2$  est égale à

$$\frac{2h \partial \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

et celle des ordonnées à

$$\frac{2h \cos \alpha \partial \alpha}{\sin^2 \alpha};$$

b. Que le point de rencontre E se trouve au point milieu de la corde  $M_1, M_2$ .

10° Quelle pente faudrait-il donner au dernier rail d'une voie ferrée pour faire franchir à la locomotive le plus grand espace possible sans toucher le sol?

$V_0$  étant la vitesse sur une voie horizontale,  $V_0 \cos \alpha$  sera la composante suivant la pente. On aura donc

$$X = 2h \sin 2\alpha \cos^2 \alpha,$$

d'où, pour le maximum,

$$\sin \gamma = \frac{1}{2}, \quad \alpha = 30^\circ.$$

Si l'on fait  $V_0 = 30^m$  ( $108^m$  à l'heure), on trouve  $\lambda_M = 59^m, 6$ . La flèche de la trajectoire est  $8^m, 60$  (Baillis).

11° Un projectile laisse tomber des particules sans masse, qui, instantanément, perdent la vitesse due au projectile et descendent verticalement avec une vitesse constante.

Le lieu de ces particules, à chaque instant, est une parabole à axe vertical qui se déplace verticalement.

12° Problème analogue d'un projectile fumigène : la traînée de fumée emportée par un vent horizontal de vitesse constante est une parabole à axe vertical se déplaçant horizontalement.

13° Un avion, animé de la vitesse horizontale  $v$ , tire horizontalement du même point, dans tous les azimuts une arme qui donne au projectile une vitesse initiale  $V_0$ . Démontrer que les points d'impact sur le sol sont sur une circonférence de cercle.

14° Si l'on considère les deux trajectoires conjuguées du point de chute (41) :

a. Trouver le lieu du point milieu de la position des deux projectiles au même instant;

b. Trouver la longueur de la droite qui joint les deux projectiles;

c. Étudier le cas où l'on fait  $\alpha = 0$  et où les deux trajectoires conjuguées sont la verticale et la parabole tangente à l'axe des  $x$ ;

d. Démontrer que la droite qui joint les points de même  $\tau$  passe toujours par le même point  $y = h$ ,  $x = \lambda_1$ .

15° *Généralisation des théorèmes n° 41.* — Étant données deux trajectoires quelconques  $(V_0, \alpha)$ ,  $(V_0, \beta)$ , démontrer que la droite qui joint, à chaque instant, les positions des deux projectiles partis au temps zéro, a une direction fixe, perpendiculaire à la bissectrice des deux angles  $\alpha$  et  $\beta$ .

16° Étant données deux trajectoires  $(V_0, \alpha)$ ,  $(V_0, \beta)$ , démontrer que les coordonnées de leur point de rencontre sont données par les formules :

$$x = h \frac{1}{\tan \alpha + \tan \beta}, \quad y = -4h \frac{\cot(\alpha + \beta)}{(\tan \alpha + \tan \beta)}.$$

## II. — LA GERBE BALISTIQUE.

71. **Formules différentielles pour un point quelconque.** — 1° Pour certains problèmes, on peut avoir besoin des formules différentielles donnant, en fonction des variations  $\partial V_0$  et  $\partial x$ , les variations ou perturbations de l'extrémité d'un arc de trajectoire de coordonnées  $(x, y)$  quelconques.

On partira d'un des systèmes de formules du n° 19, par exemple de

$$\begin{aligned} \tan \tau &= \tan \sigma - \frac{gt}{u_0}, & u &= u_0, \\ x &= u_0 t, & w &= u_0 \tan \alpha - gt, \\ y &= u_0 t \tan \alpha - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned}$$

Différentiant par rapport à chacune des lettres, constantes [excepté  $g$  ( $8^\circ$ )] comprises, on obtiendra le système suivant, où l'on a fait  $\partial u_0 = \cos \alpha \partial V_0 - V_0 \sin \alpha \partial x$  :

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\cos^2 \tau} + \frac{g dt}{u_0} &= \frac{gt}{u_0} \frac{\partial V_0}{V_0} + \left[ 1 - \frac{gt}{V_0} \sin \alpha \right] \frac{\partial x}{\cos^2 \alpha}, \\ \partial x - u_0 dt &= t \cos \alpha \partial V_0 - V_0 t \sin \alpha \partial x, \\ \partial y - (V_0 \sin \alpha - gt) dt &= t \sin \alpha \partial V_0 + V_0 t \cos \alpha \partial x, \\ \partial u &= \cos \alpha \partial V_0 - V_0 \sin \alpha \partial x, \\ \partial w + g dt &= \sin \alpha \partial V_0 + V_0 \cos \alpha \partial x, \\ v \partial v + w g dt &= (V_0 - gt \sin \alpha) \partial V_0 - gt V_0 \cos \alpha \partial x. \end{aligned} \right.$$

Exceptant la quatrième équation qui est indépendante des autres, on a ainsi un système de cinq équations à six inconnues ( $\partial \tau$ ,  $\partial x$ ,  $\partial y$ ,  $\partial w$ ,  $\partial v$ ,  $\partial t$ ).

En se donnant une relation supplémentaire entre elles, le problème sera déterminé.

2° Ainsi, supposons qu'on tire sur un écran fixe ; on fera  $\partial x = 0$ . Les variations des éléments de la fin de l'arc, qui a pour extrémité cet écran, seront alors données en tirant  $\partial t$  de la deuxième équation où l'on aura fait  $\partial x = 0$ , et en portant cette valeur  $\partial t$  dans toutes les autres.

Il vient ainsi :

$$(II) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\cos^2 \tau} &= \frac{2gt}{u_0} \frac{\partial V_0}{V_0} - \left( 1 - \frac{2gt}{V_0} \sin z \right) \frac{\partial x}{\cos^2 x}, \\ \partial t &= -t \frac{\partial V_0}{V_0} + t \tan z \, \partial x, \\ \partial y &= gt^2 \frac{\partial V_0}{V_0} + (V_0 t - gt^2 \sin z) \frac{\partial x}{\cos x}, \\ \partial u &= \cos x \, \partial V_0 - V_0 \sin x \, \partial x, \\ \partial v &= (V_0 \sin x + gt) \frac{\partial V_0}{V_0} + (V_0 \cos x - gt \tan x) \, \partial x, \\ v \, \partial v &= (V_0^2 - g^2 t^2) \frac{\partial V_0}{V_0} - (V_0 - gt \sin x) \frac{\partial x}{\cos x}. \end{aligned} \right.$$

3° Les *perturbations à temps constant* sont particulièrement simples; elles sont données dans le Tableau (III) :

$$(III) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\cos^2 \tau} &= \frac{gt}{u_0} \frac{\partial V_0}{V_0} + \left( 1 - \frac{gt}{V_0} \sin x \right) \frac{\partial x}{\cos^2 x}, \\ \partial x &= x \frac{\partial V_0}{V_0} - x \tan x \, \partial \tau, \\ \partial y &= x \tan x \frac{\partial V_0}{V_0} + x \, \partial \tau, \\ \partial u &= \cos x \, \partial V_0 - V_0 \sin x \, \partial x, \\ \partial v &= \sin x \, \partial V_0 - V_0 \cos x \, \partial x, \\ v \, \partial v &= (V_0 - gt \sin x) \, \partial V_0 - gt \cos x \, \partial x. \end{aligned} \right.$$

4° Les *formules différentielles du point de chute* (28) correspondent, dans le système général (I), aux hypothèses  $y = 0$ ,  $\partial y = 0$ .

Les *formules différentielles du sommet* correspondent, dans (I), à  $\tau = 0$  et  $\partial \tau = 0$ .

5° *Relations entre les perturbations à arguments divers.* — Supposons connues les perturbations à  $t$  constant (système III) que nous désignerons par l'indice  $t$  ( $\partial x_t, \partial y_t, \dots$ ) : comment pourra-t-on passer directement aux perturbations à  $\tau$  constant  $\partial x_\tau, \partial y_\tau, \dots$ .

Soient M et N les deux points correspondant à  $t$  constant, M et P les deux points correspondant à  $\tau$  constant. On a

$$Mp = Mn - pn \quad \text{ou} \quad \partial x_\tau = \partial x_t - pn.$$

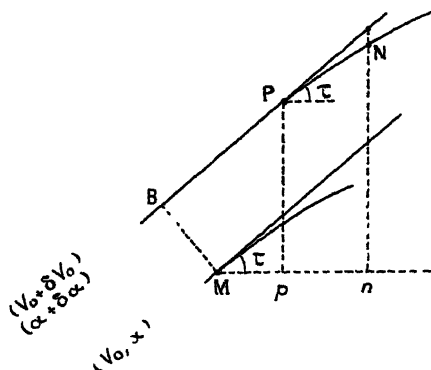
Mais de N en P la variation de  $\tau$  a été  $\partial \tau_t$  et, par suite, la variation correspondante de l'abscisse a été  $\left( \frac{\partial x}{\partial \tau} \right) \partial \tau_t$ .

On a, par suite, la formule

$$\partial x_\tau = \partial x_t - \left( \frac{\partial x}{\partial \tau} \right) \partial \tau_t$$

D'une manière plus générale, pour un élément  $e$  considéré par rapport

Fig. 83



à deux arguments  $a$  et  $b$ , on a

$$\partial e_a = \partial e_b - \left( \frac{de}{da} \right) \partial a.$$

Vérifier cette formule pour les systèmes (II) et (III).

Faire l'application à  $\partial t$ ,  $\partial \gamma$ ,  $\partial w$ ,  $\partial \sigma = 0$ .

6° Soit MB la normale en M comprise entre les deux trajectoires infiniment voisines. Démontrer qu'on a, en désignant par  $\partial N_r = MB$  et  $\partial t$ , les perturbations dites *intrinsèques* du point M :

$$\begin{aligned} \partial N_r &= V_0 t \left[ \sin(\alpha - \tau) \frac{\partial V_0}{V_0} + \cos(\alpha - \tau) \partial \alpha \right], \\ \frac{\partial t}{t} &= -[\cos \alpha + \sin \tau \sin(\alpha - \tau)] \frac{\partial V_0}{V_0} + [\sin \alpha - \sin \tau \cos(\alpha - \tau)] \frac{\partial \alpha}{\cos \alpha}. \end{aligned}$$

7° Considérons les deux trajectoires  $V_0$  et  $(V_0 + \partial V_0)$  et cherchons les points correspondants du point M sur la deuxième trajectoire. On aura le Tableau suivant :

A .....	$\partial y = 0$
B.....	point correspondant à $\partial N_r$ (angle CMB = $\tau$ )
C.....	$\partial x = 0$
D .....	$\partial t = 0$ (angle DMM' = $\alpha$ )
E.....	$\partial \tau = 0$ (angle EMM' = $\sigma$ )

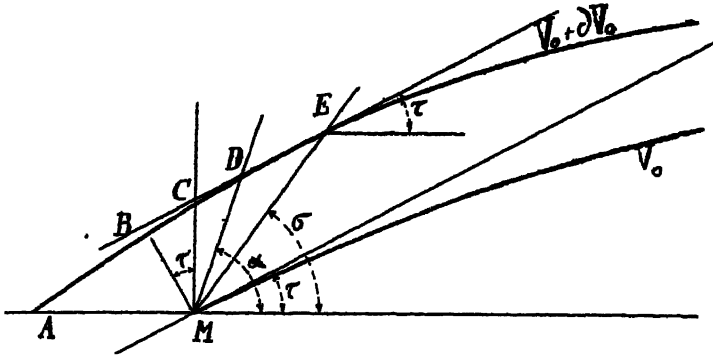
On pourra étudier le même problème pour les deux trajectoires  $\alpha$  et  $(\alpha + \partial \alpha)$ .

On remarquera que la distance MF des deux trajectoires comptée suivant la tangente ne s'exprime pas linéairement en fonction de  $\partial \alpha$  et

de  $\partial V_0$ . On a, en effet :

$$MF = \frac{x\sqrt{2}}{\cos^2\tau} \sqrt{\left(\frac{V_0^2}{g} - \tan^2\alpha\right) dz + \frac{\partial V_0^2}{V_0}}.$$

Fig. 84.



8° *Variation de la gravité.* — Nous donnons, enfin, les formules différentielles qui correspondent, en un point quelconque, à une variation  $\partial g$  de la gravité  $g$ .

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial\tau}{\cos^2\tau} &= -\frac{t}{u_0} \partial g - g \frac{\partial t}{u_0}, & \partial y &= (u_0 \tan\alpha - gt) \partial t - \frac{t^2}{2} \partial g, \\ \partial x &= u_0 \partial t, & \partial u &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, sur un écran fixe  $\partial x = 0$ , on a

$$\partial t = 0, \quad \partial\tau = -\frac{t \cos^2\tau}{u_0} \partial g, \quad \partial y = -\frac{t^2}{2} \partial g.$$

Au point de chute  $y = 0$ ,  $\partial y = 0$ , on trouve

$$\frac{\partial X}{X} = \frac{\partial T}{T} = -\frac{\partial g}{g}.$$

72. *Définition de la gerbe balistique.* — Si un canon tire un grand nombre de coups, dans les mêmes conditions fixées, c'est-à-dire avec une vitesse initiale  $V_0$  et un angle de projection  $\alpha$ , l'observation montre que les points de chute couvrent une certaine longueur sur le plan horizontal en s'y répartissant suivant les lois de probabilité ordinaires des événements accidentels. Cette répartition des points de chute, qui implique un éparpillement des trajectoires particulières autour de la trajectoire moyenne, doit être rapportée à des variations accidentelles des deux paramètres, ou données initiales,  $V_0$  et  $\alpha$ .

Dans la gerbe de trajectoires ainsi formée, on doit distinguer un groupe dû aux variations accidentelles  $\partial V_0$  et un groupe dû aux varia-



tions accidentelles  $\partial x$ , dont les effets s'ajouteront d'après les lois ordinaires du calcul des probabilités.

La précision d'une bouche à feu, dans le cas du vide, sera donc caractérisée, par exemple, par une valeur  $\partial V_0$  correspondant à l'écart probable des vitesses et qui donne lieu à une gerbe balistique  $\partial V_0$  et, une valeur  $\partial x$  correspondant à l'écart probable des angles de projection et donnant lieu à une gerbe balistique  $\partial x$ .

Les équations qui définissent la gerbe balistique du vide ( $\partial V_0, \partial x$ ) sont celles qui viennent d'être établies ci-dessus (système I).

Étudions, par exemple, l'allure de ces gerbes en considérant leur intersection avec un écran vertical que nous supposons se déplaçant suivant l'axe des  $x$ , le long de la trajectoire moyenne.

Le système (II) (tir à l'écran), en y remplaçant  $t$  par  $\frac{x}{u_0}$ , deviendra :

$$\frac{\partial \tau}{\cos^2 \alpha} = \frac{2gx}{u_0^2} \frac{\partial V_0}{V_0} + \left(1 - \frac{2gx}{V_0^2} \tan \alpha\right) \frac{\partial x}{\cos^2 \alpha},$$

$$\partial t = \frac{x}{u_0} \frac{\partial V_0}{V_0} + \frac{x}{V_0} \sin \alpha \frac{\partial x}{\cos^2 \alpha},$$

$$\partial y = \frac{gx^2}{u_0^2} \frac{\partial V_0}{V_0} + x \left(1 - \frac{gx}{V_0^2} \tan \alpha\right) \frac{\partial x}{\cos^2 \alpha},$$

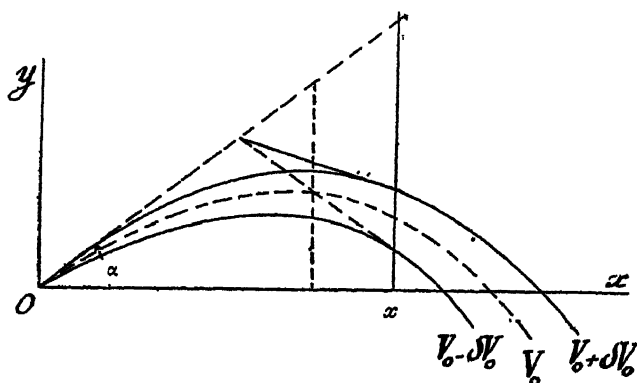
$$\partial u = \cos \alpha \partial V_0 - V_0 \sin \alpha \partial x,$$

$$\partial w = \left(\sin \alpha + \frac{gx}{V_0^2 \cos \alpha}\right) \partial V_0 + \left(V_0 \cos^3 \alpha - \frac{gx}{V_0} \sin \alpha\right) \frac{\partial x}{\cos^2 \alpha}.$$

*Gerbe balistique  $\partial V_0$ .* — On a

$$\partial y = \frac{gx^2}{u_0^2} \frac{\partial V_0}{V_0}.$$

Fig. 85.



Donc la hauteur ou épaisseur de la gerbe croît comme le carré de la distance de l'écran à la bouche ou encore comme l'abaissement  $y$  du

point  $x$ ; on sait que les tangentes à toutes les trajectoires de la gerbe concourent en un même point de la tangente initiale. L'épaisseur minimum  $\partial N$  de la gerbe au point  $x$  est comptée suivant la normale : c'est  $\partial N = \partial y \cos \tau$  (71, 6°).

*Gerbe balistique  $\partial x$ .* — On a

$$\partial y = x \left( 1 - \frac{g x}{V_0^2} \tan^2 \tau \right) \frac{\partial x}{\cos^2 \alpha}.$$

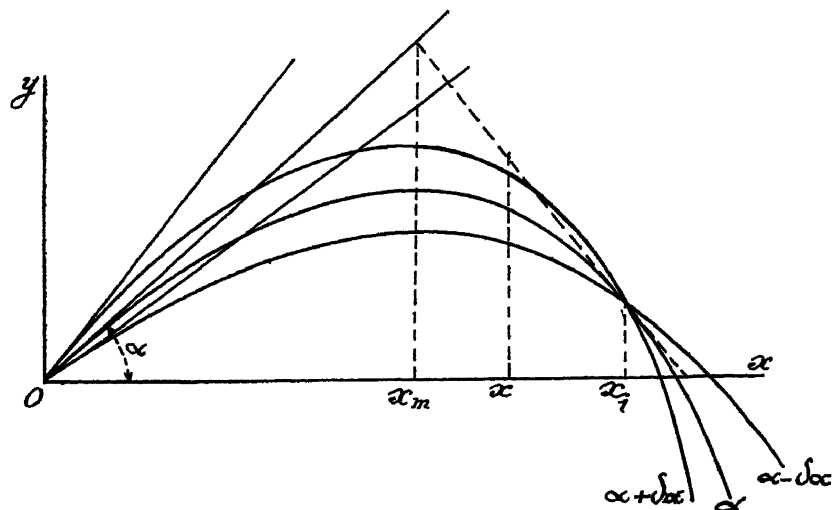
La gerbe  $\partial x$  présente un point où toutes les trajectoires de cette gerbe convergent; c'est le point  $x_1 = \frac{V_0^2}{g} \cot \alpha$  qui n'est autre que le point de contact de la trajectoire  $\alpha$  avec la parabole de sécurité (39).

En amont de ce point  $x_1$ , la trajectoire  $(\alpha + \partial \alpha)$  est au-dessus de la trajectoire  $\alpha$ ; elle est au-dessous en aval. L'épaisseur verticale  $\partial y$  de la gerbe présente un maximum au point  $x_m$ , défini par  $\frac{\partial(\partial y)}{\partial x} = 0$ , ce qui donne  $x_m = \frac{x_1}{2}$ .

La courbe  $(x, \partial y)$  est une parabole à axe vertical dont la tangente à l'origine a pour coefficient angulaire  $\frac{\partial x}{\cos^2 \alpha}$ .

**THÉOREME.** — *Il existe une verticale  $x_\tau$  que toutes les trajectoires*

Fig. 86.



de la gerbe  $\partial \alpha$  traversent sous la même inclinaison  $\tau$ . La première équation du n° 71 (1) donne, en effet,  $\partial \tau = 0$ , si  $1 = \frac{2gt}{V_0} \sin \alpha$ ; et,

comme  $x = u_0 t$ , il vient

$$x_\tau = \frac{V_0^2}{2g} \cot \alpha$$

C'est le point  $x_m$  déjà déterminé, où  $\partial y$  est maximum.

Comme on a

$$\tan \tau = \tan \alpha - \frac{gt}{u_0},$$

il viendra, en prenant  $t = \frac{V_0}{2g} \sin \alpha$ , la valeur

$$\tan \tau = \tan \alpha - \frac{1}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = -\cot 2\alpha.$$

Donc

$$2\alpha - \tau = \frac{\pi}{2}, \quad \text{d'où} \quad \tau = 2\alpha - \frac{\pi}{2}.$$

Au point  $x_i$ , on a  $\tau_i = \frac{\pi}{2} - \alpha$  : la tangente est perpendiculaire sur la tangente initiale ; l'ouverture angulaire de la gerbe au point  $x_i$ , qui a pour expression  $\frac{\partial \tau_i}{\cos^2 \tau_i} = -\frac{\partial \alpha}{\cos^2 \alpha}$ , est

$$\partial \tau_i = \tan^2 \alpha \partial \alpha.$$

**THÉORÈME.** — *Il existe une verticale  $x_w$  que toutes les trajectoires de la gerbe  $\partial \alpha$  traversent avec la même vitesse verticale  $w$ .*

On a [71 (I)] pour ce point

$$t = \frac{V_0 \cos^2 \alpha}{g \sin \alpha}.$$

Donc

$$x_w = \frac{V_0^2}{g} \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha}.$$

**73. Intersection de deux trajectoires voisines.** — Comme autre exemple, cherchons l'intersection de deux trajectoires voisines  $(V_0, \alpha)$  et  $(V_0 + \partial V_0, \alpha + \partial \alpha)$ . Faisons donc, dans le système (I) du n° 71,  $\partial x = \partial y = 0$ , il viendra :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\cos^2 \tau} + \frac{gt}{u_0} &= \frac{gt}{u_0} \frac{\partial V_0}{V_0} + \left(1 - \frac{gt \sin \alpha}{V_0}\right) \frac{\partial \alpha}{\cos^2 \alpha} \\ -u_0 \partial t &= t \cos \alpha \partial V_0 - V_0 t \sin \alpha \partial \alpha, \\ -(V_0 \sin \alpha - gt) \partial t &= t \sin \alpha \partial V_0 + V_0 t \sin \alpha \partial \alpha, \\ \partial u &= \cos \alpha \partial V_0 - V_0 \sin \alpha \partial \alpha, \end{aligned}$$

d'où l'on tire, des deux du milieu, en éliminant  $\partial t$  :

$$\frac{gt}{u_0} = t \operatorname{ang} - \frac{\sin \alpha \partial V_0 + V_0 \cos \alpha \partial \alpha}{\cos \alpha \partial V_0 - V_0 \sin \alpha \partial \alpha}$$

ou

$$t = - \frac{V_0^2}{g} \frac{1}{\cos \alpha \left( \frac{\partial V_0}{\partial \alpha} \right) - V_0 \sin \alpha}.$$

Ce temps  $t$  définit le second point d'intersection des deux trajectoires. Il n'est positif que si  $\frac{\partial V_0}{\partial \alpha} < V_0 \tan \alpha$ .

On a  $x = u_0 t$  pour l'abscisse du point de rencontre, c'est-à-dire

$$x = - \frac{V_0^3}{g} \frac{1}{\left( \frac{\partial V_0}{\partial \alpha} \right) - V_0 \tan \alpha}.$$

1° La rencontre se fait au point de chute, si l'on a

$$\frac{2 V_0^3 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = - \frac{V_0^3}{g} \frac{1}{\left( \frac{\partial V_0}{\partial \alpha} \right) - V_0 \tan \alpha},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial V_0}{V_0 \partial \alpha} = \frac{2 \sin^2 \alpha - 1}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = - \cot 2 \alpha.$$

Elle se fera au sommet si

$$\frac{\partial V_0}{V_0 \partial \alpha} = - \cot \alpha.$$

Le point de rencontre se fait sur la parabole de sécurité si  $\frac{\partial V_0}{\partial \alpha} = 0$ ; si  $\frac{\partial V_0}{\partial \alpha} < 0$ , le point de rencontre est en amont du précédent; si

$$0 < \frac{\partial V_0}{V_0 \partial \alpha} < \tan \alpha,$$

le point de rencontre est en aval de ce même point.

2° Au point de rencontre des deux trajectoires, le projectile, qui parcourt la trajectoire  $(V_0 + \partial V_0)$ ,  $(\alpha + \partial \alpha)$ , aura une avance

$$\partial t = t \left( - \frac{\partial V_0}{V_0} + \tan \alpha \partial \alpha \right) = - t \left[ \left( \frac{\partial V_0}{\partial \alpha} \right) \cos \alpha - V_0 \sin \alpha \right] \frac{\partial \alpha}{V_0 \cos \alpha},$$

d'où, en remplaçant  $t$  par sa valeur au point commun :

$$\partial t = \frac{V_0}{g} \frac{\partial \alpha}{\cos \alpha}.$$

La différence des inclinaisons au point de rencontre se calculera à l'aide de la première équation. On trouve

$$\frac{\partial \tau}{\cos^2 \tau} = - \frac{\partial \alpha}{\cos^2 \alpha}.$$

3° On peut trouver aisément le lieu des points de rencontre de deux trajectoires, dans la famille  $V_0 = \text{const.}$  ( $\frac{\partial V_0}{\partial \gamma} = \text{const.}$ ) en éliminant  $\tan \alpha$  entre les deux équations

$$x = -\frac{V_0^2}{g} \frac{1}{\left(\frac{\partial V_0}{\partial \gamma}\right) - V_0 \tan \alpha} \quad \text{et} \quad y = x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2 V_0^2} (1 + \tan^2 \alpha).$$

On trouve la parabole

$$y = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g}{2V_0^2} \left[ \left( \frac{\partial V_0}{\partial \alpha} \right)^2 + V_0^2 \right] x^2.$$

Pour  $\partial V_0 = 0$ , on a la parabole de sécurité.

4° *Fauchage vertical.* — Soit la tangente à l'origine (canon d'une mitrailleuse) animée d'une petite vitesse sinusoidale, telle que  $\partial \alpha = A \sin mt$ .

La forme instantanée de la trajectoire, lieu actuel de toutes les balles, est donnée par la formule

$$y = x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2 u_0^2} + \frac{\Lambda x}{\cos^2 \gamma} \left( 1 - \frac{g x}{V_0^2} \tan \alpha \right) \sin mt,$$

qu'on obtient en éliminant  $\partial \alpha$  entre

$$x = V_0 t \cos(\alpha + \partial \alpha), \quad y = V_0 t \sin(\alpha + \partial \alpha) - \frac{1}{2} g t^2, \quad \partial \alpha = A \sin mt.$$

Il existe un point immobile  $x = \frac{V_0^2}{g} \cot \alpha$ , où passent toutes les balles. Au point de chute, on a

$$X = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g} (1 + 2A \cot 2\alpha \sin mt).$$

La zone battue par le fauchage est donc égale à

$$4AX \cot 2\alpha \quad \text{ou} \quad 4A \frac{V_0^2}{g} \cos 2\alpha.$$

Si l'on suppose que la vitesse de l'extrémité du canon de la mitrailleuse, due au fauchage, qui est de la forme  $A \sin mt$  ( $l$  longueur du canon), n'est pas très petite par rapport à la vitesse initiale des balles  $V_0$ , il en résulte un *angle de relèvement*  $\partial \alpha = \frac{A l m}{V_0} \cos mt$  qui viendra s'ajouter au précédent, de sorte que l'équation de la trajectoire sera

$$y = x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2 u_0^2} + \frac{\Lambda x}{\cos^2 \alpha} \left( 1 - \frac{g x}{V_0^2} \tan \alpha \right) \left( \sin mt + \frac{ml}{V_0} \cos mt \right).$$

5° *Problèmes.* — En deux points correspondants ( $\partial x, \partial y, \partial t = 0$ , etc.) de deux trajectoires ( $\alpha, V_0$ ) et ( $\alpha + \partial\alpha, V_0 + \partial V_0$ ) on mène les tangentes : lieu de leurs points d'intersection.

Même problème pour les normales.

6° On peut encore résoudre le même problème en partant de l'équation de la trajectoire en coordonnées polaires (29)

$$X_\sigma = \frac{2 V_0^2}{g} \frac{\cos \alpha}{\cos^2 \sigma} \sin(\alpha - \sigma).$$

On trouve que le site où se fait la rencontre des deux trajectoires ( $V_0, \alpha$ ) et ( $V_0 + \partial V_0, \alpha + \partial\alpha$ ) est défini par la relation

$$\cot(\alpha - \sigma) = \tan \alpha - \frac{2}{V_0} \left( \frac{\partial V_0}{\partial \alpha} \right).$$

74. *Applications.* — 1° *Le problème du réglage des lignes de mire à bord.* — Un canon de bord a été étudié à terre, dans le polygone d'expériences, et sa table de tir ( $X, \alpha$ ) a été calculée avec exactitude. On le met à bord et, par suite de l'installation sur un affût marin et dans une tourelle, ses conditions balistiques initiales changent : un angle de relèvement inconnu  $\partial\alpha$  affecte toutes les inclinaisons. D'autre part, la vitesse initiale  $V_0$ , qui a servi pour établir les tables, n'est pas exactement réalisée le jour de l'épreuve ; une différence  $\partial V_0$  inconnue existe.

On se propose, par des tirs en mer, où l'on relèvera avec exactitude les portées, de déterminer cet angle de relèvement  $\partial\alpha$  et cet écart de vitesse  $\partial V_0$ .

On partira de la formule différentielle du point de chute (28) :

$$\partial X = \frac{2 V_0^2}{g} \left( \sin 2\alpha \frac{\partial V_0}{V_0} + \cos 2\alpha \partial\alpha \right);$$

$\partial X$  représente la différence observée expérimentalement entre la portée en mer et la portée inscrite dans la table de tir.

On voit tout d'abord que, si la mesure de  $\partial X$  pouvait être faite avec une égale précision, quelle que soit la distance, il faudrait tirer sous de très petits angles pour éliminer  $\frac{\partial V_0}{V_0}$  ; l'angle de relèvement  $\partial\alpha$  serait ainsi mieux déterminé.

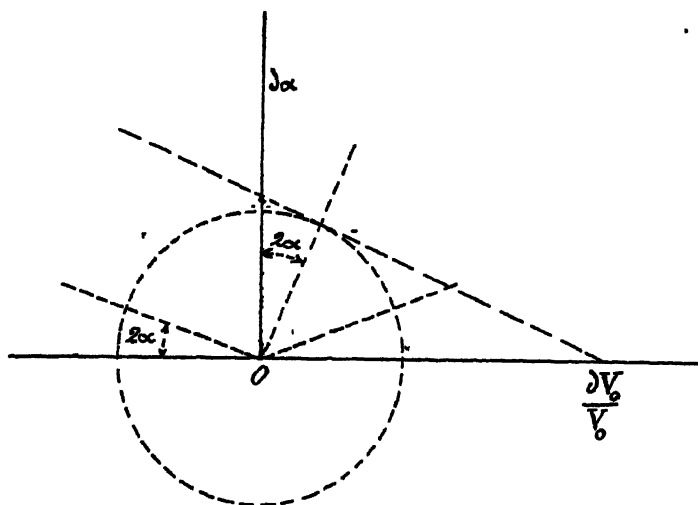
Écrivons l'équation

$$\sin 2\alpha \left( \frac{\partial V_0}{V_0} \right) + \cos 2\alpha \partial\alpha = \frac{g}{2 V_0^2} \partial X.$$

Supposons que l'on considère des valeurs de  $\partial X$  constantes ; prenons deux

axes rectangulaires, sur lesquels nous porterons les valeurs  $\frac{\partial V_0}{V_0}$  et  $\partial \alpha$ ; dans ce système d'axes, l'équation précédente représente une droite dont l'inclinaison sur l'axe  $\frac{\partial V_0}{V_0}$  est  $-2\alpha$ .

Fig. 87.



Si  $\partial X$  reste constant, ces droites, lorsque  $\alpha$  varie, admettent une enveloppe qu'on obtient en dérivant l'équation de la droite par rapport à  $\alpha$  et éliminant  $\alpha$  entre les deux équations; on obtient ainsi la circonférence

$$\left(\frac{\partial V_0}{V_0}\right)^2 + (\partial \alpha)^2 = \left(\frac{g}{2V_0^2} \partial X\right)^2.$$

Supposons donc qu'on ait tracé une série de circonférences correspondant à des valeurs de  $\partial X$  croissantes 50<sup>m</sup>, 100<sup>m</sup>, ..., 500<sup>m</sup> et ayant pour rayons  $\frac{g}{2V_0^2} \partial X$ .

Sous l'angle  $\alpha_1$ , on a obtenu une valeur  $(\partial X)_1 = 250^m$ . On mène un rayon faisant avec la verticale un angle  $2\alpha$ , puis la tangente  $T_1T$  à la circonférence  $(\partial X)_1, 250^m$ .

Sous l'angle  $\alpha_2$ , pour une valeur  $(\partial X)_2 = 350^m$ , la même construction donne la droite  $T_2T$ . L'intersection  $T$ , par ses coordonnées, donne les valeurs des inconnues  $\frac{\partial V_0}{V_0}$  et  $\partial \alpha$ .

Si l'on fait état de plus de deux tirs, toutes les droites  $T_1, T_2, \dots, T_n$  concourent au même point  $T$ . Le lieu des points  $T_1, T_2, \dots, T_n$  est une circonférence de diamètre  $OT$ . Les circonférences de la figure doivent





le plan horizontal de l'origine, et cherchons quelle variation  $\partial\tau$  de l'angle en A correspondra à des variations  $\partial V_0$  et  $\partial\alpha$  de la vitesse initiale  $V_0$  et de l'angle de projection  $\alpha$ .

Le point A est défini par la relation

$$y = (x + \alpha) \tan \tau,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{y}{\sin \tau \cos \tau} \partial \tau = \partial y - \partial x \tan \tau,$$

pour exprimer la condition que la tangente passe toujours par le point A.

On formera  $\partial y - \partial x \tan \tau$ , d'après les formules générales du n° 71 (système I). On voit que  $\partial t$  disparaît, et il reste

$$\partial \tau = \frac{V_0 t \sin \tau}{y} \left[ \sin(\alpha - \tau) \frac{\partial V_0}{V_0} + \cos(\alpha - \tau) \partial \alpha \right]$$

ou encore

$$\partial \tau = \frac{\sin 2\tau}{\sin(\alpha + \tau)} \left[ \sin(\alpha - \tau) \frac{\partial V_0}{V_0} + \cos(\alpha - \tau) \partial \alpha \right].$$

Ainsi  $(\partial \tau)_{V_0}$ , nul à l'origine, est encore nul au sommet; il y a donc une position optimum pour l'observateur;  $(\partial \tau)_\alpha$ , à l'origine, part de la valeur  $\partial \alpha$  et est nul au sommet.

b. Même problème pour un point de visée B situé sur l'axe des  $y$ .

Trouver le maximum de  $(\partial \tau)_{V_0}$  et de  $(\partial \tau)_\alpha$ ; dans ce cas  $\left(\tau = \frac{\alpha}{2}\right)$ .

c. Démontrer que si  $M_1$  est l'abscisse du point de contact M de la tangente menée à la trajectoire du point A, en désignant la portée par OP, on a

$$\overline{AM_1}^2 = AO \cdot AP.$$

3° *Problème.* — Une fusée parfaite éclate au bout d'un temps  $t$ . On observe les coordonnées relatives  $(\partial x, \partial y)$  du point d'éclatement réel sur la trajectoire  $(\alpha + \partial \alpha, V_0 + \partial V_0)$  et du point d'éclatement correspondant à la durée  $t$  sur la trajectoire  $(\alpha, V_0)$ .

Trouver  $\partial \alpha$  et  $\partial V_0$  (formule du n° 71, 4°;  $\alpha, \partial t = 0$ ).

On a

$$\frac{\partial V_0}{V_0} = \frac{\cos^2 \alpha}{x} (\partial x + \partial y \tan \alpha),$$

$$\frac{\partial \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{x} (\partial y - \partial x \tan \alpha).$$

5° *Régla par coups fusants hauts.* — Une trajectoire  $(V_0, \alpha)$

passer par le but P, situé à la portée X sur l'horizontale de la bouche. On détermine, sur cette trajectoire, par coups fusants hauts, un certain point M de coordonnées polaires  $\sigma$  et  $X_\sigma$ . Le lendemain, on règle le tir sur ce point M. Mais la vitesse initiale est devenue  $V_0 + \partial V_0$ . Quelle erreur  $\partial X$  commet-on sur la portée X ?

Réponse :

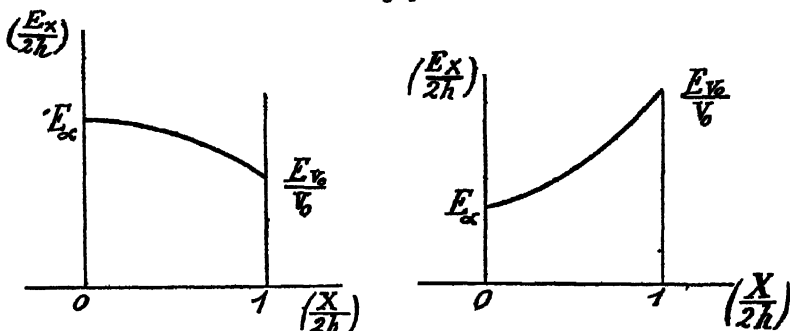
$$\frac{\partial X}{X} = -2 \frac{\partial V_0}{V_0} \frac{\sin \sigma}{\tan \sigma \cos(2\sigma - \tau)}.$$

75. **L'écart moyen en portée.** — Les *écarts moyens en portée*  $E_x$  ne peuvent, dans le vide, provenir que des deux écarts moyens des vitesses initiales  $E_v$ , et des angles de projection  $E_\alpha$ , le premier qui caractérise le lot de poudre employé et, le second, la régularité du départ du projectile hors du canon.

On a la formule générale

$$E_x^2 = E_v^2 \left( \frac{\partial X}{\partial V_0} \right)^2 + E_\alpha^2 \left( \frac{\partial X}{\partial \alpha} \right)^2.$$

Fig. 90.



On peut étudier l'allure de la fonction  $E_x$  quand l'angle de projection varie, puisque l'on connaît l'expression de

$$\frac{\partial X}{\partial V_0} = 4h \frac{\sin 2\alpha}{V_0} \quad \text{et de} \quad \frac{\partial X}{\partial \alpha} = 4h \cos 2\alpha.$$

On a donc

$$\left( \frac{E_x}{2h} \right)^2 = E_v^2 \frac{\sin^2 2\alpha}{V_0^2} + E_\alpha^2 \cos^2 2\alpha,$$

ce qui, en fonction de la portée  $X = 2h \sin 2\alpha$ , s'écrira

$$\left( \frac{E_x}{2h} \right)^2 + \left( E_\alpha^2 - \frac{E_v^2}{V_0^2} \right) \left( \frac{X}{2h} \right)^2 = E_\alpha^2.$$

La courbe  $(E_x, X)$  est un arc d'ellipse ou un arc d'hyperbole suivant

le signe du coefficient de

$$\left(\frac{X}{2h}\right)^2$$

On étudierait, de la même façon, l'écart moyen  $E_T$  des durées de trajet, par la formule

$$\left(\frac{g E_T}{2 V_0}\right)^2 = E_\alpha^2 \frac{\sin^2 \alpha}{V_0^2} + E_\alpha^2 \cos^2 \alpha$$

ou

$$\left(\frac{g E_T}{2 V_0}\right)^2 + \left(E_\alpha^2 - \frac{E_{V_0}^2}{V_0^2}\right) \left(\frac{g T}{2 V_0}\right)^2 = E_\alpha^2$$

C'est la même courbe que celle des écarts moyens en portée.

**76. Les ellipses d'éclatement des shrapnels.** — 1° Dans le tir fusant, où un mécanisme fait éclater le projectile au bout d'un certain temps  $\theta$  après le départ (fusées à temps fixé), la répartition accidentelle des coups, autour du point moyen d'éclatement, est réglée par trois facteurs : 1° les erreurs accidentelles  $\partial\theta$  sur la durée de combustion de la fusée ; 2° les erreurs accidentelles  $\partial V_0$  sur la vitesse initiale  $V_0$  ; 3° les erreurs accidentelles  $\partial\alpha$  sur l'angle de projection  $\alpha$ .

Supposons d'abord  $\partial\theta = 0$ , c'est-à-dire la fusée parfaite.

Les trajectoires  $(\alpha + \partial\alpha)$ , et  $(V_0 + \partial V_0)$  forment une double gerbe et, sur chacune d'elles, considérée isolément, le point d'éclatement variera avec  $\partial\alpha$  et avec  $\partial V_0$ . Nous supposons que l'éclatement se produit au point de chute.

Ainsi considérons la famille des trajectoires  $V_0 = \text{const.}$  Nous savons (46) que le lieu des points d'éclatement  $\hat{\theta} = \text{const.}$  est une circonférence, dont le centre R est situé à une distance  $\frac{1}{2} g \hat{\theta}^2$  au-dessous de l'origine et dont le rayon est  $V_0 \hat{\theta}$ .

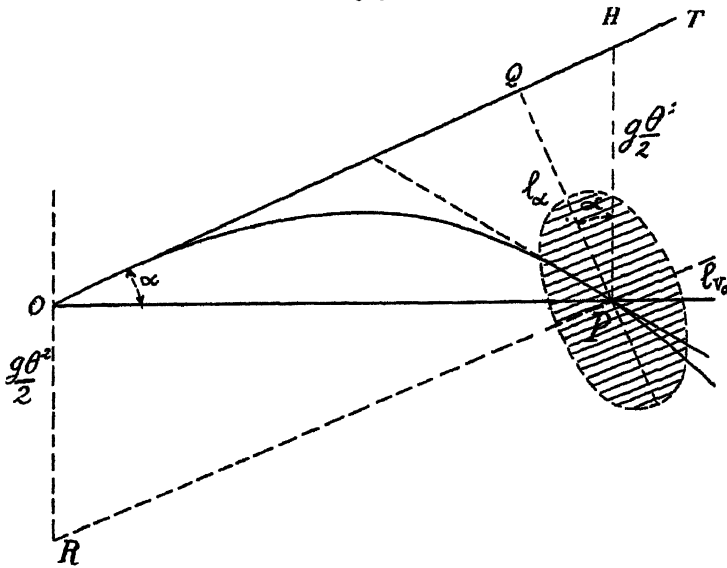
S'il s'agit du point de chute, dont l'abaissement est égal à  $\frac{1}{2} g \theta^2$ , la tangente au lieu des points  $\hat{\theta} = \text{const.}$  est la perpendiculaire PQ à la tangente initiale OT, menée par le point de chute P.

D'autre part, nous savons (57, 4°) que, dans la famille  $\alpha = \text{const.}$ , lorsque  $V_0$  varie, le lieu des points d'éclatement est une parallèle à la tangente initiale ; c'est donc PR.

Si maintenant  $\partial V_0$  et  $\partial\alpha$  sont les limites extrêmes comprenant, par exemple,  $\frac{9.9}{100}$  des coups, les trajectoires limites  $\partial V_0$  et  $\partial\alpha$  interceptent respectivement sur PR et PQ des longueurs limites  $l_v$  et  $l_\alpha$ . Et, si ces deux causes d'erreurs se produisent simultanément,  $\frac{9.9}{100}$  des points d'éclatement se trouveront à l'intérieur d'une ellipse ayant les deux directions rectangulaires  $l_\alpha$  et  $l_v$  pour axes. C'est l'ellipse d'éclatement. De la

grandeur de cette ellipse dépendent la précision du tir fusant et la facilité du réglage.

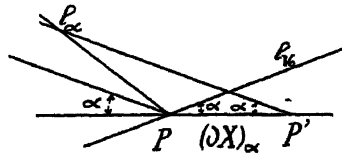
Fig. 91.



On calculera ainsi qu'il suit les longueurs  $l_x$  et  $l_v$ .

On considère les deux trajectoires  $\alpha$  et  $(\alpha + d\alpha)$  auxquelles corres-

Fig. 92.



pond une variation de portée  $(\partial X)_\alpha$ , et, dans le triangle  $PP'l_\alpha$ , on a

$$\frac{l_\alpha}{\sin \alpha} = \frac{(\partial X)_\alpha}{\cos 2\alpha}.$$

Mais

$$(\partial X)_\alpha = \frac{2X}{\tan 2\alpha} d\alpha = 4h(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) d\alpha.$$

Donc

$$l_\alpha = 4h \sin \alpha d\alpha.$$

Pour  $l_v$ , on trouve  $\frac{l_v}{\sin \alpha} = \frac{(\partial X)_{v_0}}{\sin 2\alpha}$ , et, puisque

$$(\partial X)_{v_0} = 8h \sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial V_0}{V},$$

il vient

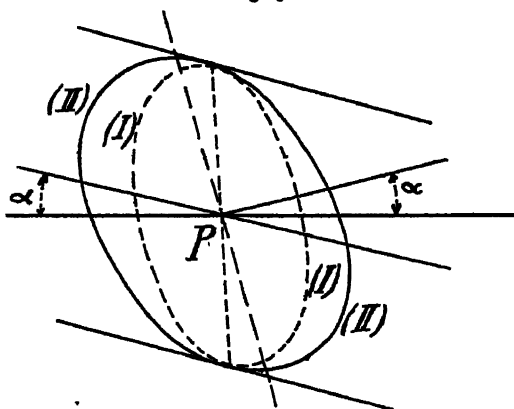
$$l_{v_1} = 4h \sin \alpha \frac{\partial V_0}{V_0}.$$

Si, maintenant, on introduit l'erreur accidentelle  $\partial\theta$  de la durée de combustion, cette erreur déplacera le point d'éclatement sur la trajectoire moyenne du faisceau ( $\alpha + \partial\alpha$ ,  $V_0 + \partial V_0$ ), c'est-à-dire sur la tangente au point de chute. Soit  $l_\theta$  la longueur couverte sur la trajectoire par l'effet de l'erreur  $\partial\theta$ .

Dans l'ellipse  $l_\alpha$  et  $l_{v_1}$ , on considérera la direction de la trajectoire moyenne comme un diamètre de longueur  $L$ . L'ellipse d'éclatement résultant des trois erreurs ( $\partial\alpha$ ,  $\partial V_0$ ,  $\partial\theta$ ) (ellipse II), aura pour diamètres conjugués : 1° sur la tangente au point de chute  $\sqrt{L^2 + l_\theta^2}$ ; 2° l'autre diamètre conjugué de l'ellipse (I) ( $l_{v_1}$ ,  $l_\alpha$ ).

2° Mais, toutes les fusées ne sont pas basées sur le principe d'un fonctionnement au bout d'un temps  $\theta$ , comme sont les fusées à combustion

Fig. 93.



ou les fusées à rotation qui éclatent au bout d'un nombre donné de révolutions du projectile dans l'air. Il existe d'autres espèces de fusées qui, par exemple, éclatent après un certain parcours dans l'air (fusées à parcours fixé).

Supposons une telle fusée parfaite et cherchons si, tirée dans les mêmes conditions pratiques que la précédente, c'est-à-dire  $\partial V_0$  et  $\partial\alpha$  étant les mêmes, l'ellipse d'éclatement sera plus ramassée. La perfection compatible avec l'existence des erreurs  $\partial V_0$  et  $\partial\alpha$  serait évidemment réalisée si les axes  $l_\alpha$  et  $l_{v_1}$  avaient toujours même direction; car l'efficacité d'un tir réglé en serait considérablement accrue puisqu'on

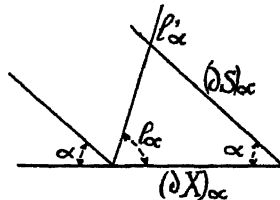
n'aurait plus à se preoccuper que d'une ligne d'éclatement au lieu d'une surface.

Dans ce cas, les axes  $l'_x$  et  $l'_y$  correspondent aux tangentes, au point de chute, des lieux des arcs de longueur constante dans les familles  $V_0 = \text{const.}$  et  $z = \text{const.}$

On a, soit pour  $\partial z$ , soit pour  $\partial V_0$  :

$$\frac{l'}{\sin z} = \frac{\partial S}{\sin i} = \frac{\partial X}{\sin(z+i)}.$$

Fig. 94.



On en tire

$$\cot i = \cot z \left( \frac{1}{\cos z} \frac{\partial X}{\partial S} - 1 \right).$$

Mais on a (44)

$$S = 4h \xi_2 z \cos^2 z,$$

où

$$\xi_2 z = \int_0^z \frac{d\tau}{\cos^3 \tau}.$$

On en déduit

$$\frac{\partial S}{\partial z} = \frac{4h}{\cos z} (1 - \xi_2 z \cos^2 z \sin z),$$

$$\frac{\partial S}{\partial V_0} = \frac{8h}{V_0} \xi_2 z \cos^2 z.$$

Combinant avec les valeurs correspondantes de  $\frac{\partial X}{\partial z} = 4h \cos 2z \partial z$ , et de  $\frac{\partial X}{\partial V_0} = \frac{8h}{V_0} \sin z \cos z$ , il viendra

$$\cot i_\alpha = \cot \alpha \left( \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{1 - 2 \xi_2 z \cos^2 \alpha \sin \alpha} - 1 \right),$$

$$\cot i_{V_0} = \cot z \left( \frac{\sin z}{\xi_2 z \cos^2 z} - 1 \right).$$

Nous allons discuter ces valeurs.

*Variations de  $i_\alpha$ .* — On a

$$\frac{d\xi_2}{d\tau} = \frac{1}{\cos^3 \tau} = \frac{1}{1 - \frac{3\tau^2}{2} + \dots} = 1 + \frac{3\tau^2}{2} + \dots$$

Donc

$$\xi_2 \tau = \tau + \frac{\tau^2}{2} + \dots$$

Portant dans l'expression de  $\cot i_\alpha$  les valeurs, pour  $\alpha$  voisin de zéro :

$$\sin \alpha = \alpha \left( 1 - \frac{\alpha^2}{6} \dots \right), \quad \cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \dots, \quad \xi_2 \alpha = \alpha \left( 1 + \frac{\alpha^2}{2} + \dots \right),$$

on voit que  $\cot i_\alpha$  est de l'ordre de  $\alpha^3$ ; donc  $i_\alpha$  est égal à  $\frac{\pi}{2}$ . Cette forte multiplicité de l'angle  $i_\alpha$  relativement à  $\alpha$  montre que cette direction se maintiendra longtemps sans grand changement.

Pour des valeurs croissantes de  $\alpha$ , l'angle  $i_\alpha$  est plus grand que  $\frac{\pi}{2}$ , car le deuxième membre de l'équation qui donne  $\cot i_\alpha$  est négatif. Ainsi, pour  $\alpha = 30^\circ$ , on trouve, au moyen de la table de la fonction  $\xi_2 \alpha$ , que  $i_\alpha = \frac{\pi}{2} + 41^\circ, 33$ .

Pour  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ , on a

$$\cot i_\alpha = -\cot \alpha = -1.$$

La droite  $P''$  est dirigée suivant la tangente de la trajectoire au point de chute; cette conclusion est évidente puisque, dans ce cas, la portée étant maximum, la trajectoire ne change pas dans le voisinage du point de chute quand on accroît l'angle de  $\partial \alpha$ ; la variation de l'arc  $\partial S$ , qui résulte de la variation  $\partial \alpha$ , se porte intégralement sur la trajectoire elle-même, qui reste immobile.

Pour  $\xi_2 \alpha = \frac{1}{2 \cos^2 \alpha \sin \alpha}$ , nous savons (44, 1°) que, à cette valeur, correspond un maximum de l'arc  $S$ . Donc, pour de petites variations de  $\alpha$ , la portée est modifiée, tandis que la longueur de l'arc reste fixe; donc la direction de  $l'_\alpha$  est l'horizontale. L'angle d'arc maximum est égal à  $56^\circ 30'$ . Le crochet ne peut s'annuler que pour  $\alpha = 0$ .

Enfin, pour  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , on voit aisément que  $i_\alpha$  redevient égal à  $\frac{\pi}{2}$ .

*Variations de  $i_v$ .* — On a

$$\cot i_v = \frac{1}{\xi_2 \alpha \cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \alpha \left( \frac{\sin \alpha}{\xi_2 \alpha \cos^2 \alpha} - 1 \right).$$

Dans le voisinage de zéro, on a

$$\frac{\sin \alpha}{\xi_2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{\alpha \left( 1 - \frac{\alpha^2}{6} \right)}{\alpha (1 - \alpha^2) \left( 1 + \frac{\alpha^2}{2} \right)} = 1 + \frac{\alpha^2}{3} + \dots;$$

par suite,

$$\cot i_{V_0} = 0.$$

Donc  $i_{V_0}$  a pour valeur initiale  $\frac{\pi}{2}$ . Le crochet s'annule pour

$$\xi_2 \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha},$$

qui n'a pas d'autre solution que  $\alpha = 0$ .

L'angle  $i_V$  n'a que de très faibles variations. Il admet un minimum correspondant à l'équation

$$\xi_2 \alpha = \frac{\sin \alpha \sqrt{4 + \sin^2 \alpha} - \sin^3 \alpha}{2 \cos^2 \alpha},$$

qui est satisfaite pour une valeur  $\alpha$  très voisine de  $60^\circ$ . Pour cette valeur,  $i_V$  est égal à  $75^\circ 24'$ .

Donc  $i_{V_0}$ , partant de  $\frac{\pi}{2}$ , descend jusqu'à cette valeur et remonte ensuite jusqu'à  $\frac{\pi}{2}$ , pour  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

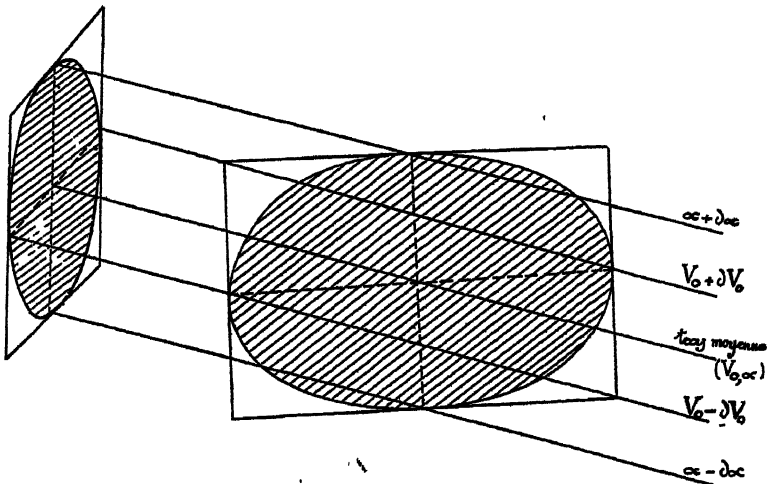
*Résumé.* — Ainsi donc, tant qu'on s'en tiendra aux angles de pro-

Fig. 95.

*Ellipse des éclatements.*

A parcours fixé.

A durée fixée.



jection  $\alpha$  assez faibles, l'ellipse d'éclatement d'une fusée à parcours fixé aura ses deux diamètres conjugués presque confondus. Pour  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ,



l'écartement des diamètres serait de  $58^\circ$ . Ils deviennent perpendiculaires pour un angle compris entre  $45^\circ$  et  $56^\circ,30$ .

Par suite, il y aura avantage à employer une fusée à parcours fixé plutôt qu'une fusée à temps, et cet avantage sera surtout important quand on n'emploiera que de petits angles de projection.

*Remarques.* — 1° On peut imaginer des fusées dont le fonctionnement dépende d'autres sortes de mécanismes, plus ou moins compliqués, qui lieront leur éclatement à telles ou telles variables de la trajectoire ou du mouvement : par exemple des fusées fonctionnant à une altitude  $y$  fixée, des fusées fonctionnant à une vitesse restante  $v$  fixée, des fusées fonctionnant à une inclinaison  $\tau$  fixée, etc.

Les ellipses d'éclatement correspondant à ces diverses fusées pourront être étudiées d'après les mêmes principes que les deux que nous avons prises comme exemple.

2° Les formules données au n° 1 pour le calcul au point de chute des deux axes  $l_v$  et  $l_\alpha$  sont des cas particuliers de celles qu'il est aisé d'établir pour un point quelconque de la trajectoire. On a, en effet, d'après les formules du n° 71 ( $\partial t = 0$ ), les expressions

$$l_v = K \frac{x}{\cos \alpha} \frac{\partial V_0}{V_0}, \quad l_\alpha = K' \frac{x}{\cos \alpha} \partial \alpha.$$

La surface de l'ellipse d'éclatement est donc proportionnelle à  $\frac{x^2}{\cos^2 \alpha}$  c'est-à-dire au carré du temps.

### III. — LE TIR D'ALTITUDE.

**77. Problème du tir d'altitude.** — Étant donnée la position du but, défini soit par ses coordonnées  $(x_1, y_1)$ , soit par son *site*  $\sigma$  et sa *distance télémétrée*  $X_\sigma$ , on a donné la formule qui permet, dans le cas de la famille  $V_0 = \text{const.}$ , de calculer l'*angle de projection*  $\alpha$  sous lequel le projectile tiré atteindra le but (§3).

Si, au point de vue théorique, le problème paraît dès lors se borner à l'étude des meilleurs procédés à employer pour la transformation des formules rigoureuses en *tables* ou en *abaques* usuels, il se présente sous une forme différente quand on considère l'application pratique au *pointage* des bouches à feu.

En effet, le tir sur but élevé, surtout si ce but est en mouvement, exige, en pratique, que l'on dirige sur l'objectif une ligne visuelle avec

laquelle on le suit constamment. C'est par rapport à cette *ligne de site* matérialisée que l'on donne une inclinaison au canon, qui est l'*angle  $\gamma$  de la hausse*.

L'*angle de hausse*, tel que  $\gamma = \tau - \sigma$ , est, évidemment, connu par la même formule que celle qui donne l'angle de projection. Mais, pour le réaliser matériellement, il faut soit des appareils de pointage à cames ou à abaques d'un maniement délicat, soit des calculs plus ou moins compliqués, souvent incompatibles avec la rapidité nécessaire dans ce genre de tir.

Aussi, de nombreux essais ont-ils été faits pour simplifier le problème et le rendre pratique ; les plus naturels ont consisté dans l'emploi du *tir à la hausse*, plus ou moins modifié, en vue du tir sur but élevé.

La hausse est graduée pour donner l'angle de projection  $\alpha$ , qui permet d'atteindre un but, en tous points du site  $o$ . C'est, en général, la seule donnée qui figure dans les Tables de tir et, pour l'extension au tir dans les autres sites, c'est souvent la seule donnée expérimentale que l'on possède. Existe-t-il un procédé simple permettant de déduire de  $\alpha_0$  (site  $o$ ) l'angle  $\alpha$  (site  $\sigma$ ) ? Tel est le problème pratique qu'il serait intéressant de résoudre, et, pour pouvoir en faire l'application et l'extension au cas de l'air, il est nécessaire d'étudier la valeur de ce procédé dans le cas du vide, où la solution rigoureuse peut être obtenue assez facilement.

Tout cet ensemble de problèmes, d'un caractère pratique, a été réuni dans ce paragraphe sous la dénomination de *Tir d'altitude*.

**78. Tir à hausse fixe.** — Pour pointer, par le procédé ordinaire, les canons à la hausse, on opère comme suit : Soit  $M$  le but, à la distance  $OM = D$  de l'origine, vu de l'origine  $O$  sous l'*angle de site  $\sigma$* , tel que  $\text{tang } \sigma = \frac{y_1}{x_1}$ .

*Wantant atteindre le point  $M$ , on tirera sous l'angle  $\alpha = \alpha_0 + \sigma$ , l'angle  $\alpha_0$  étant celui qui permettrait d'atteindre le point  $M_0$  situé à la distance horizontale  $D$  sur l'axe des  $x$ .*

La hausse constante est donc, dans ce cas,  $\gamma = \alpha_0$ .

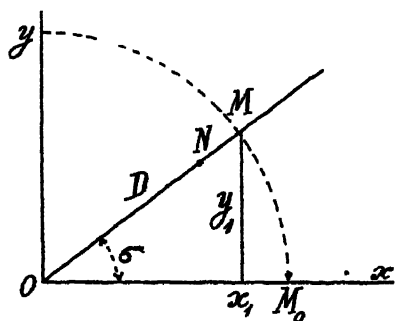
On a donné (§3) la formule qui permet de calculer le véritable angle  $\alpha$  à employer pour atteindre le point  $M$ , à savoir :

$$\text{tang } \alpha = \frac{2h}{x_1} \pm \sqrt{\frac{4h(h-r_1)}{x_1^2} - 1}.$$

La discussion qui suit, et qui porte sur l'étude de la différence  $[\alpha - (\alpha_0 + \sigma)]$  permet de se rendre compte dans quel cas l'emploi du

tir à la hausse sera légitime : le commandant Mannheim, le général Percin, le capitaine Perrin ont contribué à la solution du problème qui nous occupe.

Fig. 96.



1° Supposons que le but se déplace sur une circonférence de centre O et de rayon D. Il est vu ainsi, successivement, sous des *angles de site*  $\sigma$ , qui varieront de zéro à  $\frac{\pi}{2}$  pour les angles positifs, de  $\frac{3\pi}{2}$  à  $2\pi$  pour les angles négatifs (§3).

L'*angle de projection* donné par la hausse, pour chaque position du but, est  $(\alpha_0 + \sigma)$ . Nous allons chercher le lieu des *points de chute* N de chaque trajectoire  $(\alpha_0 + \sigma)$  sur la *ligne de site* correspondante  $\sigma$ .

Ce lieu sera dit *ligne d'égale hausse* ou, suivant le langage courant, *d'équi-hausse*.

A cet effet, il suffira d'éliminer  $\sigma$  entre l'équation de la ligne de site  $y = x \tan \sigma$  et l'équation de la trajectoire  $(\alpha_0 + \sigma)$  :

$$y = x \tan(\alpha_0 + \sigma) - \frac{x^2}{4h \cos^2(\alpha_0 + \sigma)}.$$

On obtient aisément la formule

$$y = x \cot \alpha_0 - \frac{x^2}{4h \sin^2 \alpha_0}.$$

Donc la *ligne d'équi-hausse* est la *trajectoire conjuguée* de la trajectoire  $\alpha_0$  (41).

Ce théorème résulte géométriquement de la propriété démontrée au n° 50 (2°). Les deux angles  $\gamma_1$  de la ligne de projection avec la ligne de site, et  $\gamma_2$  de la verticale avec la tangente à l'origine de la trajectoire conjuguée, sont égaux. Le premier de ces deux angles restant constant dans le tir à la hausse, le second définit la trajectoire conjuguée comme lieu des points de chute sur la ligne de site.

2° Quand on visera le point M, l'erreur commise sera la distance MN. Pour discuter cette erreur, cherchons l'intersection de la parabole, lieu des points N, et du cercle  $x^2 + y^2 = 4h^2 \sin^2 \alpha_0$ .

En coordonnées polaires  $X_\sigma$  et  $\sigma$ , la parabole s'écrit (29),

$$X_\sigma = 4h \frac{\sin \alpha_0 \cos(\alpha_0 + \sigma)}{\cos^2 \sigma},$$

et le cercle

$$D = 2h \sin 2\alpha_0.$$

On aura, pour déterminer les valeurs  $\sigma$  de rencontre des deux courbes ( $X_\sigma = D$ ), l'équation

$$\cos \alpha_0 \cos^2 \sigma = \cos(\alpha_0 + \sigma).$$

Cette équation peut se mettre sous d'autres formes, par exemple :

$$\tan \alpha_0 = \cos \sigma \tan \frac{\sigma}{2}, \quad 1 - \tan \alpha_0 \tan \sigma = \cos \sigma,$$

$$\tan \alpha_0 = \sin \sigma - \tan \frac{\sigma}{2}, \quad \cos^3 \sigma - \cos^2 \sigma + \cos \sigma \tan^2 \alpha_0 + \tan^2 \alpha_0 = 0.$$

En prenant  $X_\sigma$  sous la forme équivalente

$$X_\sigma = 2h \sin \alpha_0 \frac{1 - \tan \sigma \tan \alpha_0}{\cos \sigma},$$

on arrive, enfin, à une autre forme d'équation déterminant  $\sigma$  :

$$\tan^3 \sigma - \frac{2 \tan^2 \sigma}{\tan \alpha_0} + \frac{1 + \tan^2 \alpha_0}{\tan^2 \alpha_0} \tan \sigma - \frac{2}{\tan \alpha_0} = 0$$

(équation du commandant Mannheim).

Cette équation détermine trois points de rencontre  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$ .

3° Pour discuter les conditions de réalité des racines, cherchons pour quelle valeur  $\alpha'_0$  de  $\alpha_0$  deux points de rencontre  $M_1$  et  $M_2$  coïncident ; les racines seront  $\sigma_{12}$  et  $\sigma_3$ , la racine  $\sigma_{12}$  étant double. On aura

$$(\cos \sigma - \cos \sigma_{12})^2 (\cos \sigma - \cos \sigma_3) = 0.$$

En développant et identifiant avec l'équation du troisième degré en  $\cos \sigma$ , il viendra

$$\begin{aligned} 2 \cos \sigma_{12} + \cos \sigma_3 &= 1, \\ \cos^2 \sigma_{12} + 2 \cos \sigma_{12} \cos \sigma_3 &= \tan^2 \alpha'_0, \\ - \cos \sigma_3 \cos^2 \sigma_{12} &= \tan^2 \alpha'_0. \end{aligned}$$

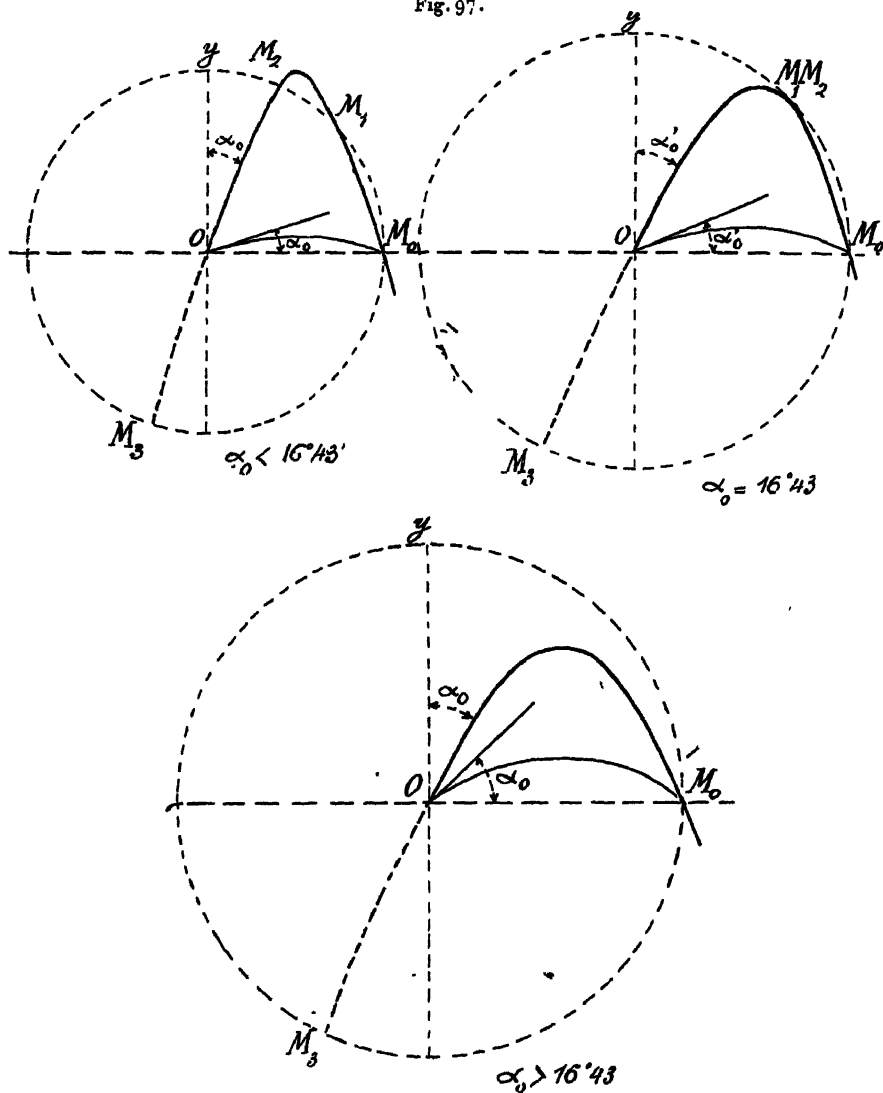
De ces trois équations, à trois inconnues  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_3$ ,  $\alpha'_0$ , on déduit

$$\cos \sigma_{12} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2},$$

d'où  $\sigma_{12} = 51^{\circ} 49' 38''$  (points  $M_1$  et  $M_2$  réunis);

$$\cos \sigma_3 = 2 - \sqrt{5},$$

Fig. 97.



d'où  $\sigma_1 = 76^{\circ} 20' 44''$  (point  $M_3$  correspondant à la racine double);

$$\tan \alpha'_0 = \sqrt{\frac{5\sqrt{5}-11}{2}},$$

d'où  $\alpha'_0 = 16^{\circ} 42' 51''$  (valeur de  $\alpha_0$  correspondant à la racine double).

4° On peut alors discuter complètement le problème.

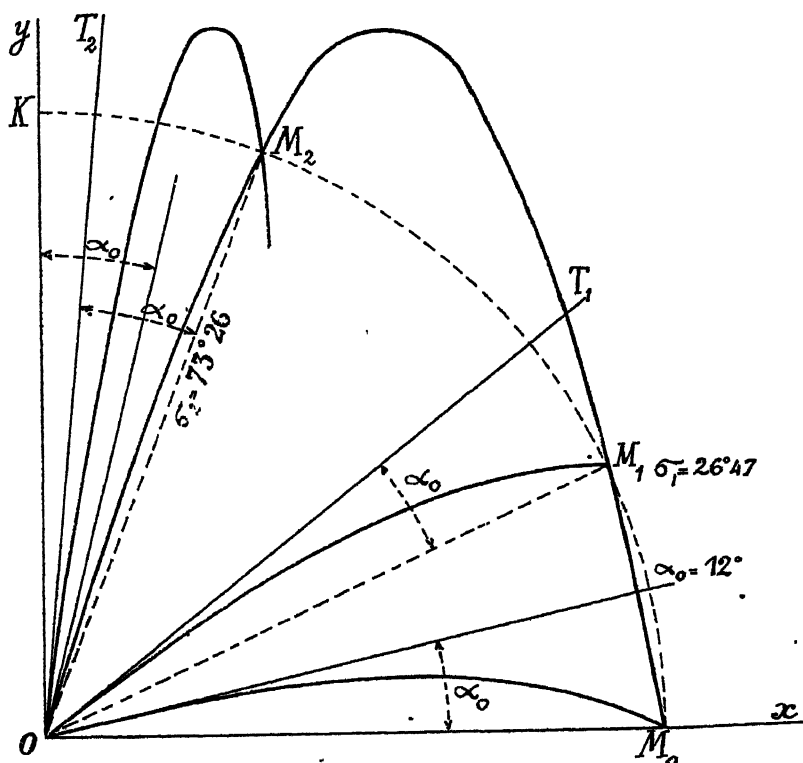
*Premier cas :*  $\alpha_0 < \alpha_0'$ . — Les quatre racines sont réelles et distinctes  $M_0, M_1, M_2, M_3$ . Le sens des coups sera alors le suivant :

$\sigma$	$< 0$	$0$	$< \sigma_1$	$\sigma$	$< \sigma_2$	$\sigma_2$	$> \sigma_2$	$\frac{\pi}{2} - \alpha_0$
Sens des coups.....	—	=	—	=	+	=	—	0

Le Tableau suivant donne les valeurs des deux racines  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ , pour diverses valeurs de  $\alpha_0$  : elles proviennent de la résolution de l'équation du troisième degré qui donne  $\cos \sigma$ .

$\alpha_0 =$	0°.	3°.	6°.	9°.	12°.	15°.	16°.	16°43'.
$\sigma_1 \dots \dots$	0°	5,57	12,12	19,01	26,47	37,10	42,26	51,50
$\sigma_2 \dots \dots$	90	86,51	83,13	78,51	73,26	65,16	60,42	51,50
$\sigma_3 \dots \dots$	90,00	87,40	84,31	80,04	79,46	77,35	76,51	76,21

Fig. 98.



La figure 98 montre comment sont disposées les deux trajectoires  $T_1OM_1$  et  $T_2OM_2$ , correspondant aux angles  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ .

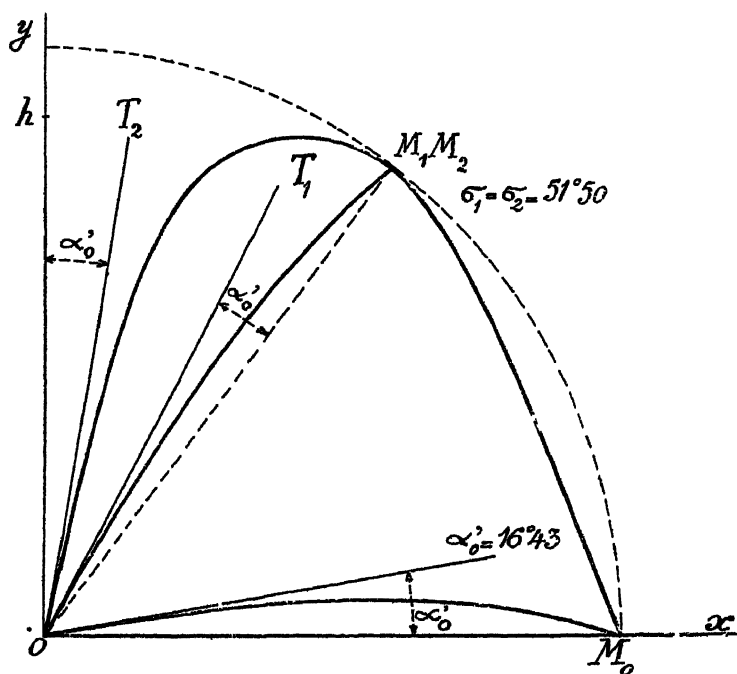
Pour les angles de site  $> \sigma_2$ , la rencontre avec la trajectoire se fera sur la branche  $M_2O$  jusqu'à un angle de site égal à  $(\frac{\pi}{2} - \sigma_0)$ . Pour cet angle, le tir sera vertical. En continuant, quand  $\sigma$  sera  $> \frac{\pi}{2} - \alpha_0$ , l'angle de projection passera dans le deuxième quadrant et la solution n'aura plus de sens pour le problème posé.

*Deuxième cas :*  $\sigma_0 = \alpha_0$ . — Les points  $M_1$  et  $M_2$  sont confondus : La trajectoire conjuguée de  $\sigma_0$  est tangente au cercle en  $M_1M_2$ . On a alors le Tableau suivant :

$\sigma$	$< 0$	$0$	$< \sigma_1$	$\sigma_{12}$	$> \sigma_{12}$	$\frac{\pi}{2} - \alpha_0$
Sens des coups.....	+	=	-	=	-	0

La trajectoire est disposée comme l'indique la figure ci-dessous.

Fig. 99.



On voit comment se fait la transformation de la figure 98 en la figure 99. C'est la trajectoire courbe  $T_2OM_2$  qui vient se confondre avec la parabole d'équi-hausse, tandis que la trajectoire tendue  $T_1OM_1$  conserve son individualité. Dans le cas des deux points  $M_1M_2$  confondus, la trajectoire  $T_2OM_1M_2$  est normale sur le rayon vecteur et, comme on le

sait alors (50. 5°), la trajectoire  $T_1 OM_1 M_2$  a son *sommet* au point  $M_1 M_2$ .

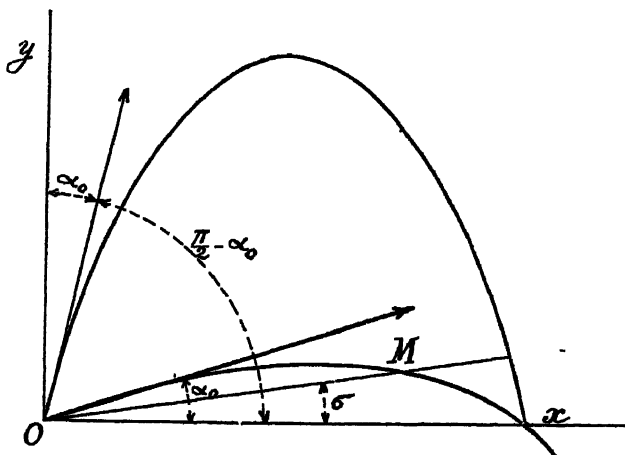
*Troisième cas :  $\alpha_0 > \alpha'_0$ .* — Les points  $M_1 M_2$  sont imaginaires : La parabole ne coupe plus la circonférence qu'aux points  $M_0$  et  $M_3$ , ce dernier ne convenant pas au problème.

$\sigma$	$< 0$	$0$	$> 0$	$\frac{\pi}{2} - \alpha_0$
Sens des coups.....	+	=	-	0

On peut remarquer le cas particulier de  $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$ . Le *tir à la hausse fait tomber tous les coups sur la trajectoire  $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$  elle-même.*

5°  $\alpha$ . Il y a lieu de remarquer que le point  $M_3$ , situé dans le troisième quadrant, ne satisfait pas à l'équation  $\alpha = \alpha_0 + \sigma$ , mais à l'équation  $\alpha = \sigma - \alpha_0$ .

Fig. 100.



*b.* Les deux trajectoires conjuguées  $\alpha_0$  et  $(\frac{\pi}{2} - \alpha_0)$  sont réciproquement *équihausse*. Ainsi, sur la ligne de site  $OM$ , si l'on tire avec l'angle de projection  $\sigma + (\frac{\pi}{2} - \alpha_0)$ , on obtiendra le point  $M$ .

6° On peut se proposer différents problèmes sur la question qui vient d'être traitée. Ainsi on peut chercher, quand l'angle de projection  $\alpha_0$  varie, *quel est, dans le plan, le lieu des points  $M_1 M_2$ , c'est-à-dire des points visés qui peuvent être atteints avec la hausse  $(\alpha_0 + \sigma)$ .*



Il faudra, pour cela, éliminer  $\alpha_0$  entre les deux équations

$$\cos^3 \sigma - \cos^2 \sigma + \cos \sigma \tan^2 \alpha_0 + \tan^2 \alpha_0 = 0,$$

et

$$\rho = 2h \sin 2\alpha_0.$$

On trouve

$$\rho = 4h \frac{\cos \sigma \sin \sigma}{1 + \cos \sigma + \cos^2 \sigma - \cos^3 \sigma}.$$

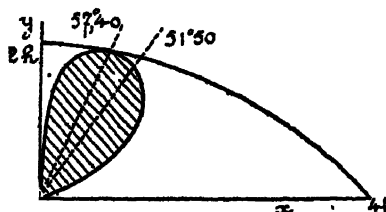
Cette courbe est tangente à l'origine aux deux axes. Elle touche la parabole de sécurité au point défini par  $\alpha_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{\sigma}{2}$ , ce qui, en posant  $\zeta = \tan^2 \frac{\sigma}{2}$ , donne l'équation

$$\zeta^3 + \zeta^2 + \zeta - 1 = 0,$$

d'où l'on tire  $\sigma = 57^\circ, 04$  pour le site du point de contact.

Cette courbe sépare le plan en deux régions; si le but est à l'extérieur, entre la courbe et la parabole de sécurité, les coups tirés avec la hausse  $(\alpha_0 + \sigma)$  sont courts; si le but est à l'intérieur de la boucle, ils sont longs.

Fig. 101.



7° Si l'on débouche l'évent correspondant à l'angle  $\alpha_0$ , les éclatements auront toujours lieu au-dessus de la ligne de site.

On a, en effet,

$$T_{\alpha_0} = \frac{2V_0}{g} \sin \alpha_0,$$

et comme  $\alpha_0 = \alpha - \sigma$ , il vient

$$T_{\alpha_0} = \frac{2V_0}{g} \sin(\alpha - \sigma).$$

Or, la valeur qui correspond à l'éclatement sur la ligne de site est (§4, 1°):

$$T_\sigma = \frac{2V_0}{g} \frac{\sin(\alpha - \sigma)}{\cos \sigma}.$$

Donc,  $T_{\alpha_0} < T_\sigma$ .

*Remarque.* — Il existe diverses variantes du tir à hausse fixe. Dans le problème qui vient d'être examiné, on suppose que le but se déplace

sur une circonférence de rayon  $D$  et l'on choisit la constante  $z_0$  de manière à faire coïncider la portée calculée et la portée vraie pour  $\sigma = 0$ .

On peut choisir, au lieu de  $z_0$ , l'angle de projection  $\alpha_r$  tel que la portée ( $\sigma = 0$ ) correspondant à  $\alpha_r$  soit égale à l'abscisse du but. Celui-ci se déplacera donc, si  $\alpha_r = \text{const.}$ , sur une verticale. Celle-ci sera constamment, pour  $\sigma > 0$ , à l'extérieur de la parabole équi-hausse. L'approximation de ce procédé est inférieure à celle du précédent.

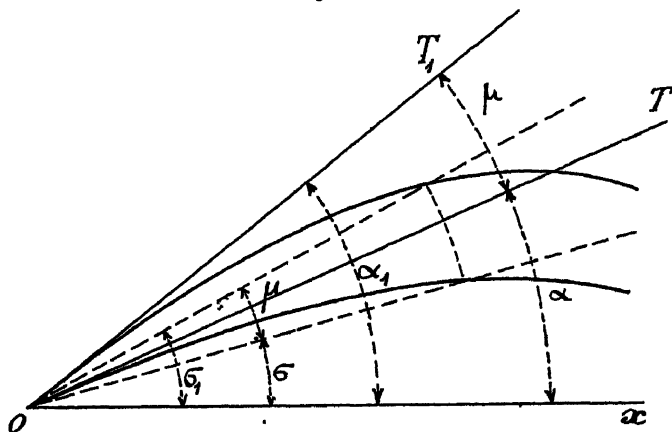
On pourrait choisir la constante en prenant l'angle correspondant à  $\frac{D}{\cos \sigma} = \text{const.}$ ; le but se déplacerait sur une circonférence ayant  $D$  pour diamètre horizontal, etc.

**79. La rigidité de la trajectoire.** — Nous avons vu que le pointage à la hausse ne donnait qu'exceptionnellement au canon l'angle de projection exact pour atteindre un but de site  $\sigma$ , situé à la distance  $D$  du canon. Mais, comme l'emploi de ce tir est courant, au moins pour les petites valeurs de  $\sigma$ , il importe de discuter, dans ce cas particulier, la légitimité de ce mode d'opérer.

Voici comment on peut rendre tout à fait rigoureux les principes de ce pointage :

1° Soit une trajectoire d'angle de projection  $\alpha_1$ , que nous appellerons

Fig. 102.



*trajectoire de la hausse limite.* En coordonnées polaires (29), l'équation de cette trajectoire est

$$(1) \quad X_{\sigma_1} = 4h \frac{\cos \alpha_1}{\cos^2 \sigma_1} \sin(\alpha_1 - \sigma_1).$$

Prenons, d'autre part, une autre trajectoire d'angle de projection  $\alpha$  inférieur à  $\alpha_1$ , tel que  $\alpha = \alpha_1 - \mu$ .

Son équation polaire sera .

$$X_\sigma = h \frac{\cos(\alpha_1 - \mu)}{\cos^2 \sigma} \sin(\sigma_1 - \mu - \sigma),$$

comparons cette valeur de  $X_\sigma$  à la valeur  $X_{\sigma_1}$  correspondant, sur la trajectoire (1), à un angle  $\sigma_1$  tel que  $\sigma = \sigma_1 - \mu$ . On aura

$$X_{\sigma_1} = h \frac{\cos \alpha_1}{\cos^2(\sigma_1 + \mu)} \sin(\sigma_1 - \mu - \sigma).$$

Pour comparer les deux valeurs  $X_\sigma$  et  $X_{\sigma_1}$ , on écrira l'erreur relative sous la forme

$$\frac{X_{\sigma_1} - X_\sigma}{X_\sigma} = 1 - \frac{\cos^2 \alpha_1 \cos^2 \sigma}{\cos^2(\sigma_1 + \mu) \cos^2(\sigma_1 - \mu)}.$$

Cette erreur relative, pour  $\sigma = \alpha$ , à l'origine, est égale à  $\left(1 - \frac{\cos^2 \sigma}{\cos^2 \alpha_1}\right)$ ; elle devient minimum au point de chute,  $\sigma = 0$ , où elle prend la valeur

$$1 - \frac{\cos^2 \alpha_1}{\cos^2 \alpha} \frac{1}{\cos^2(\sigma_1 - \alpha)}.$$

Pour  $\sigma = -\alpha_1$ , elle prend la valeur  $\left(1 - \frac{\cos^2 \alpha_1}{\cos^2 \alpha}\right)$ ; pour  $\sigma = -\frac{\pi}{2}$ , elle est maximum et égale à l'unité.

Imposons-nous, comme condition, que l'erreur relative sur le rayon vecteur  $X_\sigma$  ne dépasse pas une certaine grandeur, par exemple  $\frac{a}{1000}$ . On devra avoir

$$\frac{\cos^2 \alpha_1 \cos^2 \sigma}{\cos^2(\sigma_1 + \mu) \cos^2(\sigma_1 - \mu)} \geq 1 - \frac{a}{1000}.$$

Or, cette égalité sera satisfaite, *a fortiori*, si l'on donne au dénominateur sa valeur la plus grande, qui est l'unité.

D'autre part, l'angle de site  $\sigma$  varie de 0 à  $\alpha_1$  ou à  $(-\alpha_1)$ , puisque l'angle  $\alpha_1$  a été pris comme limite. La plus petite valeur de  $\cos \sigma$  est donc  $\cos \alpha_1$ . La condition cherchée est ainsi

$$\cos^2 \alpha_1 \geq 1 - \frac{a}{1000}.$$

L'égalité  $\cos^2 \alpha_1 = 1 - \frac{a}{1000}$  définit l'angle limite de la hausse.

La construction qui a été faite pour obtenir  $X_\sigma$  en partant de  $X_{\sigma_1}$ , et qui est supposée appliquée à tous les points de la trajectoire  $\sigma_1$ , consiste à attribuer même  $X_{\sigma_1}$  à des valeurs  $(\sigma_1 - \mu)$ . Cela revient à faire pivoter

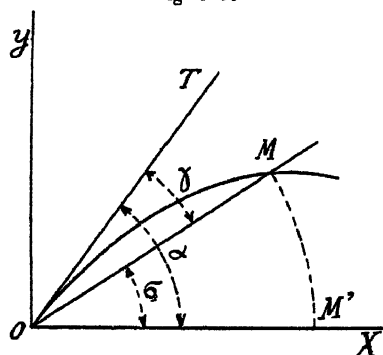
de l'angle  $\alpha$  la trajectoire autour de l'origine comme une courbe rigide.

On dira donc : *Étant fixée, a priori, une certaine approximation relative de la portée mesurée suivant la ligne de site*  $(\frac{\sigma}{1000} N_\sigma)$ , on peut déterminer un angle de projection  $\alpha_1$ , dit angle limite de la hausse, auquel correspond une certaine trajectoire. Pour tous les angles de projection ou de site compris entre  $(-\alpha_1)$  et  $(+\alpha_1)$ , toutes les trajectoires ne sont que la trajectoire  $\alpha_1$  qui a pivoté autour de l'origine comme une courbe rigide.

Tel est l'énoncé correct et complet du théorème de la *rigidité de la trajectoire*, qui comporte, bien entendu, une quantité arbitraire, définissant l'approximation que l'on cherche à obtenir.

2° De ce théorème résulte immédiatement la justification de l'emploi de la hausse dans les limites  $(\pm \alpha_1)$ . En effet, le pivotement de l'arc de parabole OM autour de O, lorsque M vient en M', conserve l'angle  $\gamma$  de

Fig 163.



la tangente OT constant. Cet angle est l'angle de projection  $\alpha_0$  qui correspond à la portée OM' égale à la distance OM du but, mesurée suivant la ligne de site.

3° *Extension du théorème.* — Le théorème de la rigidité de la trajectoire, qui est applicable entre  $(+\alpha_1)$  et  $(-\alpha_1)$  sur toute l'étendue des trajectoires intermédiaires, est également applicable sur certaines des trajectoires  $\alpha > \alpha_1$ , mais non plus alors pour tous les angles de site  $\sigma_1$ , c'est-à-dire sur toute l'étendue des trajectoires  $\alpha$ .

Soit  $\alpha_1$  l'angle limite de la hausse déterminé par la condition  $\cos^2 \alpha_1 = k$ .

Mais cette condition n'est, ainsi qu'on l'a vu, que la limite extrême de la condition réelle  $\cos \alpha \cos \sigma = k$ .

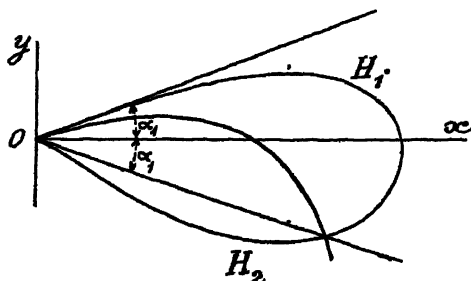
Donc, le théorème de la rigidité de la trajectoire est applicable sur

toute trajectoire d'angle de projection  $\alpha$ , jusqu'à un angle de site limite  $\sigma_1$  donné par la condition

$$\cos^2 \sigma_1 = \frac{\cos^2 \alpha_1}{\cos \alpha}.$$

En éliminant  $\alpha$  entre la relation  $\cos \alpha \cos^2 \sigma = k$  et l'équation polaire de la trajectoire  $X_\sigma = 4h \frac{\cos \alpha \sin(\alpha - \sigma)}{\cos^2 \sigma}$ , on obtient l'équation de la *courbe de la hausse limite*.

Fig. 101.



Cette courbe  $OH_2H_1$  est une courbe fermée, tangente à la droite  $\alpha_1$ ; elle coupe verticalement l'horizontale au point correspondant à la portée sous l'angle  $\alpha$ , tel que  $\cos \alpha = \cos^2 \alpha_1$ .

Elle rencontre la trajectoire  $\alpha_1$  sur la ligne de site  $(-\alpha_1)$  et vient finir tangentiellement à l'origine à la droite  $(-\alpha_1)$ .

On dira donc : *Le théorème de la rigidité de la trajectoire est applicable en dehors des limites  $(\pm \alpha_1)$ , lorsque le point à atteindre se trouve à l'intérieur d'une courbe définie, dans la famille des trajectoires  $V_0 = \text{const.}$ , par la relation*

$$\cos \alpha \cos^2 \sigma = \cos^3 \alpha_1.$$

C'est la *courbe limite d'emploi de la hausse*.

4°. THÉORÈME. — *Dans les limites du tir à la hausse qui viennent d'être définies, on a le droit de remplacer la trajectoire parabolique par une circonférence bitangente, à l'origine et au point de chute, à la trajectoire  $\alpha_1$ .*

En effet, l'équation de la trajectoire parabolique  $\alpha_1$  est, pour l'angle polaire  $\sigma$  :

$$X_{\sigma_1} = 4h \frac{\cos \alpha_1}{\cos^2 \sigma} \sin(\alpha_1 - \sigma),$$

et celle de la circonférence bitangente est

$$X'_{\sigma_1} = 4h \cos \alpha_1 \sin(\alpha_1 - \sigma).$$

En faisant la différence de ces deux rayons vecteurs, il vient

$$\frac{X_{\sigma_1} - X_{\sigma_1'}}{X_{\sigma_1}} = 1 - \cos^2 \sigma.$$

On a toujours  $X_{\sigma_1} > X_{\sigma_1}'$ ; la circonférence est au-dessous de la parabole.

Imposons-nous la condition

$$\frac{X_{\sigma_1} - X_{\sigma_1}'}{X_{\sigma_1}} \leq \frac{a}{1000}$$

comme précédemment; on en déduit

$$\cos^2 \sigma \geq 1 - \frac{a}{1000},$$

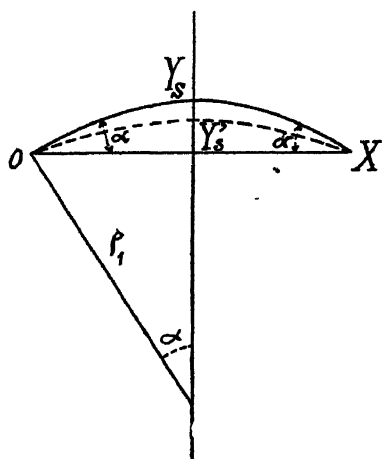
c'est-à-dire  $\cos^2 \sigma \geq \cos^2 \alpha_1$ . Or si l'on a, d'après le théorème précédent  $\cos \alpha \cos^2 \sigma \geq \cos^2 \alpha_1$ , on aura, *a fortiori*:

$$\cos^2 \sigma > \cos^2 \alpha_1$$

Donc, dans tous les cas où le théorème de la rigidité de la trajectoire est applicable, la courbe pivotante peut être considérée comme une circonférence bitangente, à l'origine et au point de chute, à l'une des trajectoires de la famille  $V_0 = \text{const.}$

*Remarques.* — I. Le rayon  $\rho_1$  du cercle substitué à la trajectoire est

Fig. 105.



$\rho_1 = \frac{X}{2 \sin \alpha}$ . Entre les flèches  $Y_s$  de la trajectoire et  $Y_s'$  du cercle, on a

la relation

$$Y_s - Y'_s = \frac{X}{g} \tan \alpha \tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{X}{2} \frac{\tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}},$$

ou, encore, en remplaçant  $X$  par  $\frac{V_0^2}{g} \sin 2\alpha$ , il vient

$$Y_s - Y'_s = 2 \frac{V_0^2}{g^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

ou encore

$$\frac{Y_s - Y'_s}{Y_s} = \tan^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Pour  $\alpha = 15^\circ$ , la différence  $Y_s - Y'_s = \frac{X}{4} \tan \alpha \tan^2 \frac{\alpha}{2}$  n'est que de  $\frac{X}{1000}$  (rigoureusement : 0,00116  $X$ ).

II. La trajectoire  $\alpha = 0$ , qui est  $y = -\frac{g x^2}{2 V_0^2}$ , étant supposée rigide, donne naissance, sous l'angle  $\alpha$ , à la trajectoire

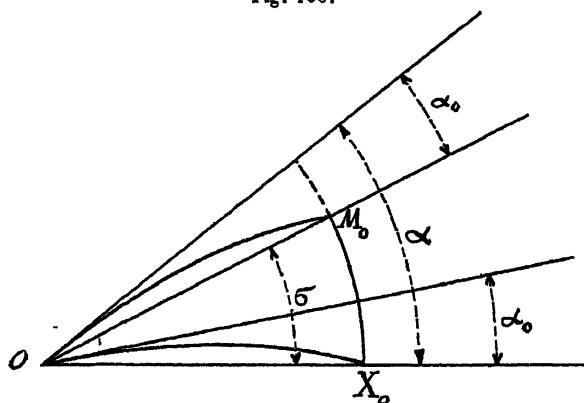
$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = \frac{g}{2 V_0^2} (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2.$$

La portée  $X_r$  est

$$X_r = \frac{2 V_0^2}{g} \frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} = \frac{X}{\cos^3 \alpha}.$$

5° Étant données les Tables de tir d'une bouche à feu, c'est-à-dire, en particulier, la relation  $(X, \alpha)$  entre les portées  $X$  et les angles de projection  $\alpha$ , relation qu'on peut déterminer expérimentalement, le

Fig. 106.



théorème de la rigidité de la trajectoire permet de construire, point par point, la trajectoire complète du projectile, correspondant à un angle de projection  $\alpha$  quelconque.

En effet, pour les valeurs corrélatives  $(X_0, \alpha_0)$  prises dans la table, on obtiendra le point  $M_0$  de la trajectoire  $z$ , en décrivant de  $O$  une circonférence de rayon  $X_0$  et en prenant  $M_0 X_0 = \text{arc } \tau - \alpha_0 = \tau$ .

6° Soit un point  $M_1$  de site  $\tau$ , de la trajectoire  $z$ . Pour amener le point  $M$  sur la trajectoire  $z + dz$ , démontrer qu'il faut faire tourner le site d'un angle  $d\tau$  donné par la formule

$$d\tau = \frac{1 - \tan \alpha \tan \tau}{1 - \tan \tau \tan \sigma} d\sigma.$$

Discuter cette formule.

**80. Les courbes des hausses.** — Après avoir examiné le cas où le problème du *tir d'altitude* peut recevoir une solution mécanique d'une extrême simplicité, et reconnu qu'elle n'était admissible que dans des cas très particuliers, il importe de discuter quelques exemples, où le problème recevra sa solution rigoureuse.

Celle-ci s'appuie sur la relation (29) :

$$(1) \quad X_\sigma = \frac{2V_0^2}{g} \frac{\cos^2 \alpha}{\cos \sigma} (\tan \tau - \tan \sigma),$$

et nous nous proposons, comme type de discussion de ce genre de problèmes, de donner des détails sur l'abaque que l'on construirait si l'on cherchait à représenter, pour une *distance télémétrée*  $X_\sigma$ , la variation de l'*angle de projection*  $\alpha$  et de l'*angle de site*  $\sigma$ . Les tables ou abaques de ce genre qui ont été établis prenant plus volontiers pour variable l'*angle de hausse*  $\gamma = \alpha - \sigma$ , c'est cet angle que nous adopterons dans ce qui va suivre.

Nous poserons

$$\frac{gX_\sigma}{V_0^2} = \sin 2\alpha_0 = K.$$

L'angle  $\alpha_0$  sera donc l'angle de projection qui correspond à la portée  $X_\sigma$  sur le plan horizontal dans le *site* zéro.

Mais comme, pour les angles de site négatifs  $\left(\tau > \frac{3\pi}{2}\right)$ ,  $X_\sigma$ , qui est la distance du but, peut être plus grande que la portée maximum correspondant à  $\sin 2\alpha_0 = 1$ , il faut considérer  $K = \sin 2\alpha_0$ , non comme un sinus, mais comme un simple paramètre pouvant prendre toutes les valeurs positives depuis zéro jusqu'à l'infini.

L'équation (1) devient alors

$$\cos \sigma \sin 2\alpha_0 \tan^2 \alpha - 2 \tan \alpha + \cos \sigma \sin 2\alpha_0 + 2 \tan \sigma = 0,$$



ou, en introduisant l'angle de hausse  $\gamma = \alpha - \sigma$ , d'après la formule  $\tan \alpha = \frac{\tan \gamma + \tan \sigma}{1 - \tan \gamma \tan \sigma}$ , il viendra, pour l'expression de l'angle de hausse, l'équation du second degré :

$$\left[ 1 + \frac{2 \sin \sigma}{\cos^2 \sigma \sin 2\sigma_0} \right] \tan^2 \gamma - \frac{2}{\sin 2\sigma_0 \cos \sigma} \tan \gamma + 1 = 0.$$

On sait que cette équation, comme l'équation en  $\alpha$  (§3, 1°), admettra deux racines  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , telles que  $\gamma_1 + \gamma_2 + \sigma = \frac{\pi}{2}$ , qui pourront se confondre, à la limite, en une seule  $\gamma_{12}$ , qui sera telle que

$$\gamma_{12} + \frac{\sigma}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

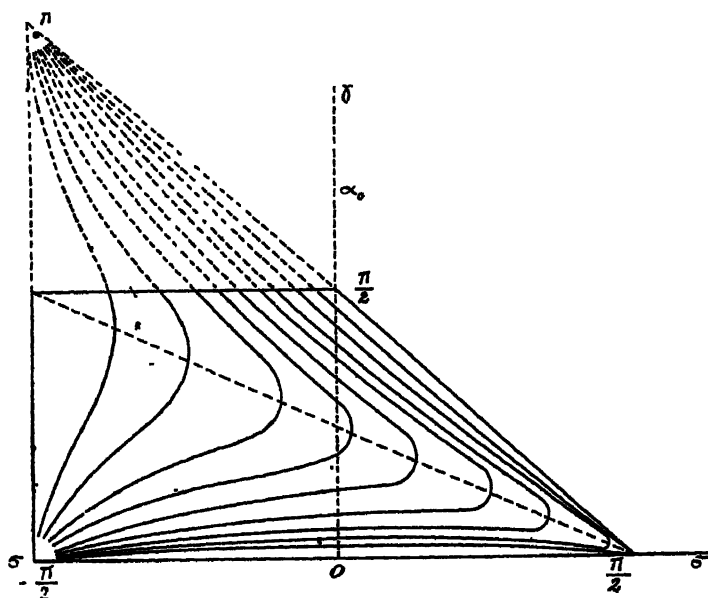
La solution de l'équation du second degré donne

$$\tan \gamma = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2 \sin \sigma \sin 2\sigma_0 - \cos^2 \sigma \sin^2 2\sigma_0}}{2 \tan \sigma + \cos \sigma \sin 2\sigma_0}.$$

Cette équation permet de résoudre complètement le problème. L'abaque se présente sous la forme de la figure ci-dessous.

Pour  $\sigma_0 > 15^\circ$  (correspondant à  $X_{\sigma} > \frac{V_0^2}{2g}$  ou  $X_{\sigma} > h$ ), les courbes,

Fig. 107.



qui partent de  $\sigma = -\frac{\pi}{2}$  et  $\gamma = \pi$  et aboutissent au point  $\sigma = \frac{\pi}{2}$ ,

et  $\gamma = 0$ , présentent une tangente verticale sur la droite

$$\gamma_{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

Quand  $\alpha_0 \cong 15^\circ$ , elles passent toutes par le point  $\sigma = \frac{\pi}{2}$ , une branche allant de  $\sigma = -\frac{\pi}{2}$  à  $\sigma = \frac{\pi}{2}$ , l'autre de  $\sigma = \frac{\pi}{2}$  à  $\gamma = \pi$ .

*Autre problème.* — Dans le tir d'avion contre le sol, une question analogue se pose : *Quelle est, à altitude constante,  $Y_0$ , la relation entre  $\alpha$  et  $\gamma$ ?*

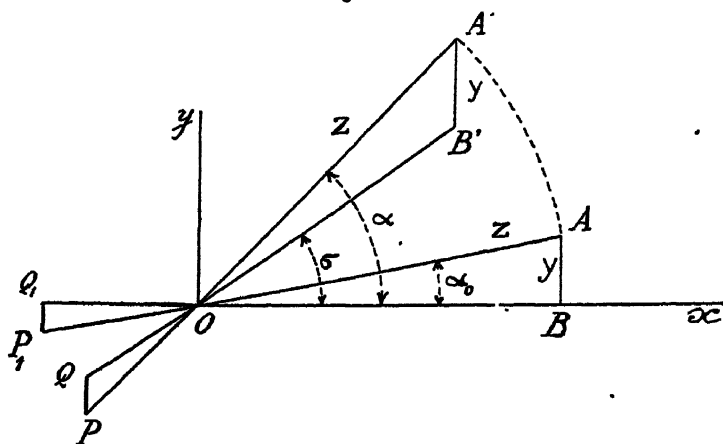
On trouve

$$\frac{\tan \gamma (\tan \alpha - \tan \gamma)}{(1 + \tan \alpha \tan \gamma)^2} = \frac{\sigma Y_0}{2 Y_0^2}.$$

**81. Méthode de Saint-Robert.** — 1<sup>o</sup> Considérons l'angle de projection inconnu  $\alpha$  auquel correspondent, sur la ligne de site  $\sigma$ , une portée  $X_\sigma = OB'$ , un éloignement  $z = OA'$  et un abaissement  $y = A'B'$ .

Appliquons le théorème de l'abaissement constant (43). Considérons

Fig. 108.



donc la trajectoire d'angle  $\alpha$ , qui admet le même abaissement  $y$  et dont la portée est  $OB$ .

Dans le triangle  $A'OB'$ , on écrira

$$\frac{y}{z} = \frac{\sin(\alpha - \sigma)}{\cos \sigma} \quad \text{et} \quad \frac{y}{X_\sigma} = \frac{\sin(z - \sigma)}{\cos z}.$$

D'autre part, dans le triangle  $ABO$ , on a

$$y = z \sin \alpha_1 = X_1 \tan \alpha_1$$

On en déduit les deux équations

$$(1) \quad \begin{cases} \sin(\sigma - \sigma) = \sin \alpha_1 \cos \sigma, \\ X_\sigma = \lambda_1 \tan \alpha_1 \frac{\cos \sigma}{\sin(\sigma - \sigma)}. \end{cases}$$

Mais  $X_1$  et  $\tan \alpha_1$  ne sont pas indépendants, et sont ici supposés liés par la correspondance de la Table de tir, qui peut être purement expérimentale; si l'on suppose la relation  $X_1 = 2h \sin 2\alpha_1$  du vide, en éliminant  $X_1$  et  $\alpha_1$  entre les trois équations, on retrouve l'équation polaire de la trajectoire (29).

Mais les deux relations (1) seules supposent seulement que le théorème de l'abaissement constant est applicable, sans qu'il soit spécifié que c'est dans le vide; c'est-à-dire qu'on suppose simplement qu'on connaît une relation  $X_1 = \varphi(\alpha_1)$ .

Donc, l'angle de site  $\sigma$  étant connu, et la distance du but  $X_\sigma$  étant mesurée par un télémètre, on pourra éliminer  $\alpha_1$  et  $X_1$  entre ces trois relations et, par suite, on pourra déduire de la Table de tir de l'arme une table à double entrée  $(X_\sigma, \sigma)$ , donnant l'angle de projection  $\alpha$  (ou la hausse) à employer pour atteindre le but.

Cette solution du problème du tir sur but élevé a été indiquée par de Saint-Robert; elle a donné lieu à l'établissement de Tables numériques calculées par von Burgsdorff pour le tir du fusil contre les ballons.

**82. Hausse verticale.** — 1° Il est possible d'obtenir mécaniquement le pointage d'une bouche à feu d'après la règle du théorème de l'abaissement constant, par l'emploi de la *hausse verticale*.

La hausse  $P_1 Q_1$  ou  $PQ$  (fig. 108) étant maintenue verticalement au lieu d'être fixée perpendiculairement à l'arme  $OQ_1$  ou  $OQ$ , on a, par hypothèse,  $PQ = P_1 Q_1$ . La similitude des grands et petits triangles de la figure montre que ce procédé réalise le théorème de l'abaissement constant.

Mais le problème pratique n'est pas résolu; car ce que l'on connaît, par le télémètre, par exemple, c'est la distance  $X_\sigma = OB'$ , et ce qu'il est nécessaire de connaître, c'est l'angle  $\alpha_1$ , c'est-à-dire la distance  $OB$ . On sera donc obligé, quand même, d'avoir recours à la table dont il est question ci-dessus.

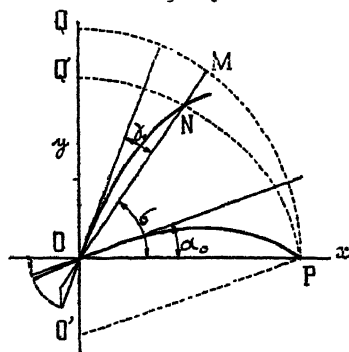
Si cependant  $(\alpha - \sigma)$  et  $\alpha_1$  sont très petits, on a sensiblement  $OB = OB'$  et l'on peut appliquer à ce cas le principe de la *hausse verticale*.

2° Mais si l'on veut discuter, dans toute sa généralité, le problème de

l'emploi de la *hausse verticale*, il faut procéder comme au n° 78 pour le tir à *hausse fixe*.

Si le but M se déplace sur une circonférence OPQ de rayon

Fig. 109.



$OP = D$ , le lieu des points d'impact N sur la *ligne de site* NM est une circonférence O'PQ, dont l'équation est

$$x^2 + y^2 + 8hr \sin^2 \alpha_0 = D^2$$

qui n'est autre que le *lieu des points d'éclatement* des projectiles de la famille  $V_0 = \text{const.}$  pour une durée  $\theta = \frac{2V_0}{g} \sin \alpha$  correspondant au point de chute P de la trajectoire  $\alpha_0$  (46).

Si  $\alpha_0$  est très petit, on peut négliger le terme en  $\sin^2 \alpha_0$  et, par suite, on a sensiblement

$$x^2 + y^2 = D^2.$$

L'emploi de la hausse verticale est donc justifié dans ce cas.

**83. Abaque du Capitaine Pravaz.** — *a.* Cherchons tout d'abord, lorsque l'angle de projection  $\alpha$  varie, le lieu du point A, éloignement du point de chute. En éliminant  $\alpha$  entre l'équation de la portée  $X = 4h \sin \alpha \cos \alpha$  et l'équation de l'abaissement au point de chute  $y_w = \lambda \tan \alpha$ , on obtient la circonférence

$$X^2 + y_w^2 = 4h y_w;$$

la courbe  $(X, y_w)$ , courbe (I), peut d'ailleurs, dans l'air, être tracée à l'aide de la Table de tir  $(X, \alpha)$ .

*b.* Considérons une ligne de site OE, d'angle de site  $\sigma$ . A cette ligne de site  $\sigma$  correspond une certaine courbe OA', analogue à la circonfé-

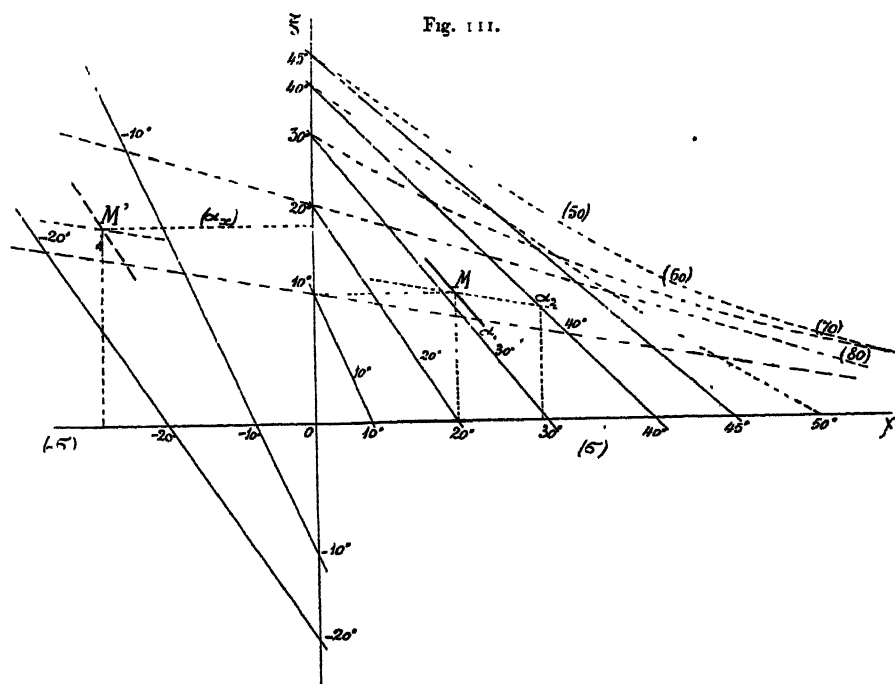


ticale qui, composée avec  $OA_1$ , donne la vitesse restante  $OA_1$ , fig. 51.

Transportant à l'angle de site  $\sigma$ , la longueur  $OA' = OA$  est la vitesse initiale;  $A'A_1 = AA_1$  est la vitesse verticale et  $OA_1$  représente la vitesse restante au point de chute, à l'échelle où  $OA' = V_0$ .

En combinant l'abaque du capitaine Pravaz avec l'abaque des durées de trajet correspondant à l'angle de site  $\sigma$  (51, 4°), on aura tous les éléments de pointage nécessaires pour régler le tir sur les avions.

**81. Abaque à droites cotées** (colonel Henry et capitaine Right). -- Les solutions les plus simples du problème du tir d'altitude paraissent celles qui sont basées sur les principes de la Nomographie de M. d'Oragne et qui prennent, comme argument, l'angle de projection  $\alpha$ , qui donne une portée égale à l'abscisse  $x$  du but.



L'équation qui sert de point de départ est celle que nous avons établie au n° 34, 3°, qu'on peut écrire

$$(1) \quad \sin(2\alpha - \sigma) - \sin 2\alpha \cos \sigma - \sin \sigma = 0$$

On la transforme aisément en la suivante :

$$(2) \quad (1 + \cos 2\alpha) \tan \sigma + \sin 2\alpha - \sin 2\alpha = 0.$$

On posera

$$\chi = k_1 \operatorname{tang} \tau \quad \text{et} \quad \xi = k_2 \sin 2\alpha,$$

( $k_1$  et  $k_2$  étant deux nombres arbitraires) et l'on graduera, suivant ces lois, deux échelles rectangulaires  $\chi$  et  $\xi$ . Prenons, par exemple,  $k_1 = k_2 = 1$ .

La ligne droite cotée ( $\alpha$ ) aura pour équation

$$(3) \quad \chi(1 + \cos 2\alpha) + \xi - \sin 2\alpha = 0.$$

Pour  $\xi = 0$ , on a

$$\chi_0 = \operatorname{tang} \alpha;$$

Pour  $\chi = 0$ , on a

$$\xi_0 = \sin 2\alpha.$$

Donc, la droite cotée ( $\alpha$ ) rencontre les deux axes aux points qui sont également cotés ( $\alpha$ ). Ainsi, pour  $\sigma = 20^\circ$  et  $\alpha_r = 10^\circ$ , on aura le point M sur la ligne cotée  $\alpha = 32^\circ$  (environ).

En pointillé sur la figure, sont représentées les droites cotées correspondant aux angles  $\alpha$  supérieurs à  $\frac{\pi}{4}$ . Ainsi, pour  $\sigma = 20^\circ$  et  $\alpha_r = 80^\circ$ , on trouve, au point M,  $\alpha = 76^\circ$  environ.

En éliminant  $\alpha$  entre l'équation (3) et sa dérivée par rapport à  $\alpha$ , on trouve l'enveloppe des droites de la figure, qui est l'hyperbole  $2\chi\xi + \xi^2 = 1$ , ayant son centre à l'origine et pour asymptotes l'axe des  $\chi$  et la droite  $\xi + 2\chi = 0$ .

a. En un point de l'abaque, tel que M, passent ainsi deux droites qu'on peut dire conjuguées, l'une cotée  $\alpha_1$  et l'autre  $\alpha_2$ .

Considérons, au point M, la différence ( $\alpha_1 - \sigma$ ). Je dis que, quand on se déplacera sur la droite  $\alpha_2$ , la différence ( $\alpha_1 - \sigma$ ) restera constante.

En effet, l'équation (1) admet deux racines  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ , entre lesquelles existe la relation (53, 2°)

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2} + \sigma.$$

Donc, en un point de l'abaque, où passe la droite cotée  $\alpha_1$ , passe aussi la droite de cote  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - (\alpha_1 - \sigma)$ .

Cette égalité démontre le théorème : si ( $\alpha_1 - \sigma$ ) est constant,  $\alpha_2$  est constant.

b. Pour les  $\sigma$  négatifs, l'abaque est constitué par le réseau obtenu en joignant les points ( $-\sigma$ ) et ( $-\alpha_r$ ) et par un second réseau, prolongement, vers les  $\sigma$  négatifs, des droites  $45^\circ$  à  $90^\circ$  du réseau des  $\sigma$  et ( $\alpha_1$ ) positifs.

Ainsi, faisant  $\tau = -27''$ ,  $\tau_1 = 15^\circ$ , on aura le point M qui donnera les deux angles de projection

$$\alpha_1 = -15^\circ \text{ environ} \quad \text{et} \quad \alpha_2 = +78' \text{ environ}$$

On a bien

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 63^\circ = \frac{\pi}{2} - 27''.$$

**85. Niveau de pointage du capitaine Sarfati.** — On peut réaliser des instruments de pointage qui permettent, connaissant  $\alpha$ , de diriger convenablement l'axe du canon, c'est-à-dire de le pointer sous l'angle  $\alpha$ , par la simple opération de la visée sur le but.

Tel est le niveau du capitaine Sarfati, dont le principe est le suivant :

Soit un angle droit ABC, dont le bras AB est maintenu constamment horizontal. Soit  $AB = 1$ . Le point A est la charnière d'une droite mobile AD, dirigée constamment vers le but : l'angle de site  $\tau$  est alors  $\widehat{BAD}$ .

Soit, d'autre part, la tige CD reliée à la droite AD et au bras BC de telle manière que  $DC = 1$  et que  $BC = \sin \alpha_x$ . Je dis que, dans ce système articulé, l'angle des droites CD et AB est égal à  $2\alpha$ .

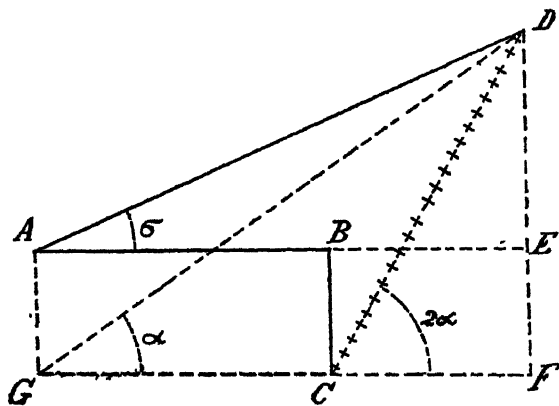
En effet, on a

$$DE = DF - BC = CD \sin \widehat{DCF} - \sin 2\alpha_x$$

D'autre part,

$$DE = (AB + BE) \tan \sigma = (1 + \cos \widehat{DCF}) \tan \sigma.$$

Fig. 112.



Par suite,

$$\tan \sigma (1 + \cos \widehat{DCF}) = \sin \widehat{DCF} - \sin 2\alpha_x.$$



Si l'on compare cette relation avec l'équation (2) du numéro précédent, on voit que  $\widehat{DCF} = 2\alpha$ .

C. Q. F. D.

L'axe du canon prendra la position DG, puisque le triangle DCG est isocèle et qu'on a  $DGC = \frac{DCF}{2} = \alpha$ .

La réalisation mécanique de cet instrument est très simple.

**86. Abaque à points alignés du capitaine Lafay.** — Prenons comme variable l'angle de hausse  $\gamma = \alpha - \sigma$ ; l'équation (2) du n° 84 s'écrira

$$(4) \quad \sin 2\alpha_x + (1 - \cos 2\gamma) \tan \sigma - \sin 2\gamma = 0$$

ou encore

$$\tan \sigma \tan \gamma + \frac{\sin 2\alpha_x}{2} (1 + \tan^2 \gamma) - \tan \gamma = 0$$

Posons

$$x_1 = \sin 2\alpha_x \quad \text{et} \quad x_2 = \tan \sigma.$$

Prenons un système rectangulaire d'axes  $(y, O, x)$ . Sur l'axe  $Ox$ , portons l'échelle des  $x_1 = \sin 2\alpha_x$  et, sur une parallèle à  $Ox$ , menée par le point  $y = 1$ , portons l'échelle des  $x_2 = \tan \sigma$ .

Je dis que, sur la droite  $(x_1, x_2)$ , se trouve aligné le point dont les coordonnées rectangulaires sont :

$$x = \frac{\sin 2\gamma}{2 - \cos 2\gamma}, \quad y = \frac{1 - \cos 2\gamma}{2 - \cos 2\gamma}.$$

En effet, la droite  $(x, y)$ ,  $(x_2, 1)$  coupe l'axe des  $x$  au point

$$x' = x_2 + \frac{x - x_2}{1 - y}.$$

Remplaçant  $(x_2, x, y)$  par leurs valeurs, on trouve

$$x' = \sin 2\gamma + (1 - \cos 2\gamma) \tan \sigma,$$

c'est-à-dire, d'après l'équation (4),

$$x' = \sin 2\alpha_x$$

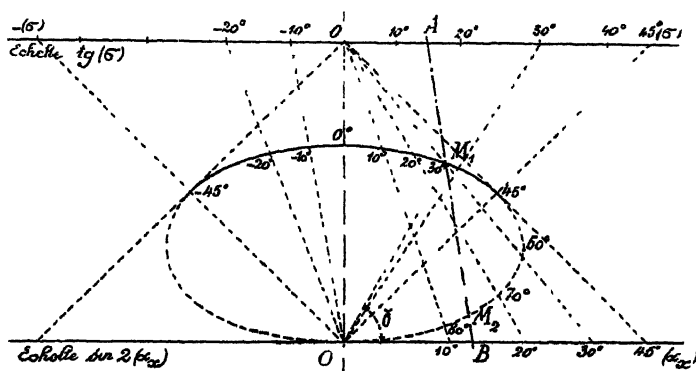
C. Q. F. D.

En éliminant  $\gamma$  entre les expressions de  $x$  et de  $y$ , on trouve l'ellipse  $x^2 + 3y^2 - 2y = 0$ , qui a son centre au point  $(O, \frac{1}{3})$ . Elle portera, pour chaque point, la cote  $\gamma$ .

La graduation de l'ellipse se fait très simplement en joignant le

point  $\tau = 0$  aux points successifs de l'échelle  $(z_r)$  et, en inscrivant les valeurs correspondantes  $\alpha_r$  et  $(\frac{\pi}{2} - \alpha_r)$  sur l'ellipse; ou, inversement, en faisant  $\alpha_r = 0$ , et joignant ce point aux points de l'échelle  $(\tau)$ .

Fig. 113.



Une droite quelconque AB, joignant un point A de l'échelle des  $(\tau)$  à un point B de l'échelle des  $(z_r)$ , coupe l'ellipse en deux points  $M_1$  et  $M_2$  ou un seul ou zéro : on a deux angles de projection répondant à la question dans le premier cas; si la droite est tangente à l'ellipse, l'angle  $\tau$  trouvé correspond à la portée maximum sur la ligne de site. On a, pour les coordonnées du point  $M_1$  :

$$\frac{y}{x} = \frac{1 - \cos 2\gamma}{\sin 2\gamma} = \tan \gamma$$

L'angle  $\gamma$  est donc représenté, sur l'abaque, par l'angle  $M_1OB$ .

**87. L'hypothèse de l'Aide-Mémoire.** — Nous avons dit (81) que les propriétés sur lesquelles on a basé le calcul des tables et la construction des abaques, envisagés aux n<sup>os</sup> 81 et 83, ne supposaient pas explicitement que le tir avait lieu dans le vide, mais seulement que le théorème de l'abaissement constant pour un même éloignement, était exact pour le tir dans l'air.

De même, les constructions des n<sup>os</sup> 84, 85 et 86 subsistent dans l'air, moyennant une certaine hypothèse.

L'*Aide-Mémoire d'Artillerie* formule cette hypothèse dans les termes suivants : *On admet que le rapport de l'abaissement de la trajectoire dans l'air à l'abaissement dans le vide, pour le même projectile, est indépendant de l'angle de projection; de telle sorte*

que, pour un projectile donné, tiré à une vitesse donnée, ce rapport ne dépendrait que de la distance.

Il en résulte que l'équation de la trajectoire dans l'air peut être mise sous la forme

$$y = x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2 V_0^2 \cos^2 \alpha} F(x, V_0),$$

la fonction  $F$  ne renfermant pas l'angle  $\alpha$ .

Soit  $\tau$ , l'angle de projection qui donne la portée  $x$ ; on a

$$0 = \tan \tau_x - \frac{g x}{2 V_0^2 \cos^2 \alpha_x} F(x, V_0),$$

Éliminant  $\frac{g x}{2 V_0^2} F(x, V_0)$  entre ces deux équations, il viendra, en posant  $\frac{y}{x} = \tan \sigma$ , l'équation

$$(1) \quad \tan \sigma = \tan \alpha - \frac{\cos^2 \alpha_x}{\cos^2 \alpha} \tan \alpha_x$$

qui est identique à l'équation

$$(1 + \cos 2\alpha) \tan \sigma + \sin 2\alpha - \sin 2\alpha_x = 0,$$

base de la théorie des abaques ci-dessus.

Mais l'équation (1) peut s'écrire

$$\tan \sigma = \tan \alpha - \frac{1}{2} (1 + \tan^2 \alpha) \sin 2\alpha_x$$

ou, ordonnée par rapport à  $\tan \alpha$ ,

$$\tan^2 \alpha - \frac{2}{\sin 2\alpha_x} \tan \alpha + \frac{2}{\sin 2\alpha_x} \tan \sigma + 1 = 0,$$

d'où l'on tire

$$\tan \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{\cos^2 2\alpha_x - 2 \tan \sigma \sin 2\alpha_x}}{\sin 2\alpha_x}.$$

*Tableaux de l'Aide-Mémoire.* -- Cette formule est réductible en une table numérique à double entrée ( $\sigma$  et  $\alpha_x$ ), qui est donnée dans l'Aide-Mémoire; à l'intersection d'une ligne  $\sigma$  et d'une colonne  $\alpha_x$ , on trouve l'angle de projection cherché  $\alpha$ ; un abaque construit d'après ces mêmes données numériques peut remplacer le tableau. On pourra en étudier les propriétés d'après l'équation qui donne  $\tan \alpha$ , en fonction de  $\alpha_x$  et de  $\sigma$ .

*Autres éléments de la trajectoire.* — L'hypothèse de l'Aide-Mémoire conduira immédiatement, pour les autres éléments d'un point

quelconque de la trajectoire, aux formules suivantes :

$$\begin{aligned} \tan \sigma &= \tan \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \tan \omega_x, & t &= t_x \frac{\cos \alpha}{\cos \sigma}, \\ y &= \frac{x}{2 \cos^2 \alpha} (\sin^2 \alpha - \sin 2 \alpha_x), & u &= u \frac{\cos \alpha}{\cos \sigma}. \end{aligned}$$

**88. Tir à angle fixe.** — Dans l'ancienne artillerie, et même dans certaines pièces de l'artillerie moderne de tranchée, le tir courbe des mortiers s'effectue parfois sous des angles de projection fixés à l'avance et peu nombreux, et, pour régler le tir, on agit sur la vitesse initiale, c'est-à-dire sur la charge de poudre ou la capacité de la chambre à poudre.

Les Tables de tir donnent donc alors, pour certaines valeurs fixes de  $\alpha$ , la charge (ou la vitesse initiale) correspondant aux différentes portées  $X$ .

1° Soit un but dont l'abscisse est  $x$  et l'angle de site  $\sigma$ . Prenons l'équation de la trajectoire qui passe au point  $(x, \sigma)$  sous la forme

$$\frac{x}{X} = \frac{\tan \alpha - \tan \sigma}{\tan \alpha}.$$

Si l'on possède une table donnant les valeurs de la fonction  $\frac{\tan \alpha - \tan \sigma}{\tan \alpha}$ , avec les deux arguments  $\alpha$  et  $\sigma$ , on saura en déduire, pour le tir à angle fixe donné,  $\alpha = 60^\circ$  par exemple, la portée  $X$  de la trajectoire cherchée, qui passe par le point  $(x, \sigma)$ .

La Table de tir fera alors connaître, pour les données  $\alpha$  et  $X$ , la charge employée, c'est-à-dire la vitesse initiale.

2° *Abaque de M. Pesci.* — Nous avons établi, au n° 34, l'équation (6) de la trajectoire :

$$y = x \left( 1 - \frac{V_x^2}{V_0^2} \right) \tan \alpha$$

ou bien

$$\tan \sigma = \left( 1 - \frac{V_x^2}{V_0^2} \right) \tan \alpha.$$

Dans cette équation,  $V_x$  représente la vitesse initiale prise dans la Table de tir, qui donne la portée égale à l'abscisse du but ; l'inconnue est  $V_0$ .

On mettra cette équation sous la forme

$$V_0^2 \tan \sigma + V_x^2 \tan \alpha - V_0^2 \tan \alpha = 0.$$

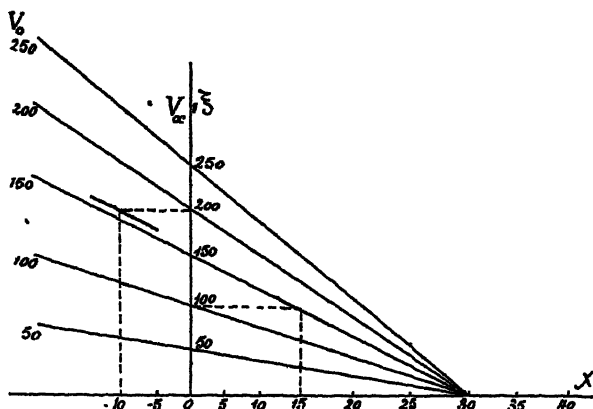
Posons

$$\gamma = k_1 \tan \sigma \quad \text{et} \quad \xi = k_2 V_x^2.$$

On aura un *abaque* à lignes cotées  $V_0$  dont les droites seront

$$\frac{\gamma}{\lambda_1} V_0^2 + \frac{\xi}{\lambda_2} \tan \alpha - V_0^2 \tan \alpha = 0.$$

Fig. 114.



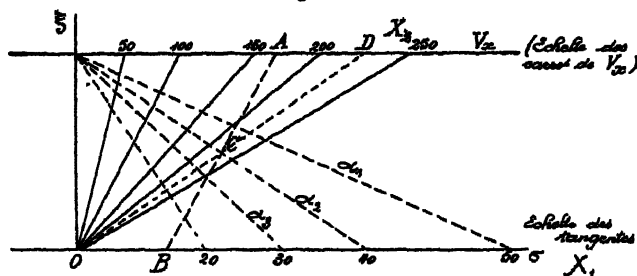
Elles partent toutes du point coté  $\alpha$  sur l'axe des  $\gamma$ , et passent, sur l'axe des  $\xi$ , aux points de l'échelle des  $(V_r)$ .

3° *Abaque général de M. Pesci.* — Au lieu de considérer seulement, comme dans l'abaque précédent, trois variables ( $\sigma$ ,  $V_r$ ,  $V_0$ ), considérons, en plus, la variable  $\alpha$ .

Prenons deux axes rectangulaires ( $\xi_0$ ,  $\gamma_1$ ) et une parallèle  $\gamma_2$  à  $O\gamma_1$ , à la distance  $\xi = 1$ . Portons, sur  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , les échelles

$$\gamma_1 = \tan \sigma, \quad \gamma_2 = V_0^2.$$

Fig. 115.



Il est facile de vérifier que les trois points  $(\gamma_1, 0)$ ,  $(\gamma_2, 1)$  et

$$\gamma = \frac{V_0^2 \tan \alpha}{V_0^2 + \tan \alpha}, \quad \xi = \frac{\tan \alpha}{V_0^2 + \tan \alpha}$$

sont alignés en vertu de l'équation

$$V_0^2 \tan z + V_1^2 \tan z - V_0^2 \tan z = 0.$$

Eliminant entre  $\gamma$  et  $\xi$ , d'abord  $V_0$ , puis  $\tan z$ , on aura

$$\gamma + \xi \tan z - \tan z = 0. \quad \gamma - V_0^2 \xi = 0$$

Les lignes cotées  $z$  sont donc des droites concourant au point  $\gamma = 0, \xi = 1$ .

Les lignes cotées  $V_0^2$  partent du point O et aboutissent aux divisions  $V_x^2$  sur  $(\gamma, 1)$ .

Ainsi, étant donnés  $V_1$  et  $\tau$ , on joindra les deux points représentatifs A et B. On cherchera l'intersection C avec la ligne cotée  $z$ , et l'on joindra CO, qui coupe l'axe des  $\gamma$  au point  $V_0$  cherché.





---

## LIVRE II.

### LA BALISTIQUE RECTILIGNE.

---

## CHAPITRE I.

### MOUVEMENT RECTILIGNE HORIZONTAL.

---

#### I. — FORMULES DU MOUVEMENT HORIZONTAL.

89. **Hypothèses.** — L'hypothèse, inverse de celle du mouvement dans le vide, s'obtiendra en supposant que, des deux forces qui agissent sur le projectile, savoir : la *gravité*  $g$  et l'*accélération*  $c F(v)$  de la *résistance de l'air*, la première  $g$  est nulle. C'est le second *cas-limite* du problème balistique.

Cette hypothèse se réalisera, en pratique, avec une approximation plus ou moins grande, dans trois cas distincts :

1° Le mouvement est rectiligne quand la perte de poids du projectile, plongé dans le milieu, est égale à son poids. Ce sera, par exemple, le cas du mouvement horizontal d'un corps flottant sur un liquide en repos ;

2° Le mouvement est rectiligne, en première approximation tout au moins, lorsque  $g$  sera très petit devant  $c F(v)$  : très fort *coefficient balistique*  $c$ , très grande vitesse  $v$  ;

3° Enfin, le mouvement est encore rectiligne, en première approximation, lorsque l'on considère un arc de la trajectoire très voisin du sommet de cette courbe, et tel que les inclinaisons  $\tau$  aient des valeurs extrêmement voisines de zéro. La vitesse en un point et la résistance tangentielle se projettent alors, très approximativement, en vraie grandeur, sur une horizontale, et l'arc de trajectoire diffère infiniment peu de la corde horizontale qui le sous-tend. Ce cas doit donc être



considère comme un cas-limite du problème balistique, correspondant à l'hypothèse  $\tau = 0$ .

90. **Equations du mouvement.** — Soit  $cF(v)$  l'accélération de la résistance du milieu, supposée tangentielle ( $\frac{1}{2}$ ). Prenons, pour axe des  $x$ , la direction du mouvement. On aura, pour définir ce mouvement, la seule équation différentielle

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -cF(v).$$

Comme, par définition de la vitesse  $v$ , on a  $v = \frac{dx}{dt}$ , l'équation différentielle pourra s'écrire

$$\frac{dv}{dt} = -cF(v),$$

d'où l'on déduira le temps  $t$  par l'intégrale

$$t = -\frac{1}{c} \int_{V_0}^v \frac{dv}{F(v)},$$

en désignant par  $v$  la vitesse au temps  $t$ , et par  $V_0$  la vitesse initiale, pour laquelle on suppose  $t = 0$ .

Pour avoir l'abscisse  $x$ , on écrira

$$\frac{v}{v} \frac{dv}{dt} = -cF(v) \quad \text{ou} \quad \frac{v}{dx} \frac{dv}{dx} = -cF(v),$$

ce qui donnera  $x$  par l'intégrale

$$x = -\frac{1}{c} \int_{V_0}^v \frac{v}{F(v)} dv,$$

en prenant  $x = 0$ , pour  $t = 0$  et pour  $v = V_0$ .

91. **Fonctions  $S(v)$  et  $D(v)$ .** — Le problème est donc résolu, moyennant les deux quadratures indiquées. Avec la fonction  $F(v)$  donnée, soit par une expression analytique, soit par une table numérique, on saura toujours calculer, une fois pour toutes, les tables de ces deux intégrales. Ces tables seront à simple entrée et feront connaître, en regard de la vitesse  $v$ , les produits  $ct$  et  $cx$ .

Supposons ces tables construites, et représentons les deux intégrales par les notations suivantes :

$$S(v) = -\int_V^v \frac{dv}{F(v)}, \quad D(v) = -\int_V^v \frac{v}{F(v)} dv.$$

La vitesse  $V$ , choisie pour origine des tables, est arbitraire, et l'on suppose  $S(V) = 0$  et  $D(V) = 0$ . La vitesse  $V$  sera avantageusement prise en dehors des limites des vitesses qu'on aura à utiliser en pratique : les nombres de la table seront ainsi toujours de même signe.

Les équations qui donnent  $t$  et  $x$  seront alors

$$t = \frac{S(v) - S(V_0)}{c}, \quad x = \frac{D(v) - D(V_0)}{c}$$

ou encore, par abréviation,

$$t = \frac{S - S_0}{c}, \quad x = \frac{D - D_0}{c}.$$

Les fonctions  $S(v)$  et  $D(v)$  sont deux des *fonctions balistiques* dites de *Siacci*.

*Théorèmes.* — Les théorèmes qui suivent résultent immédiatement des formules établies ci-dessus :

1° Si deux projectiles, de coefficients balistiques  $c$  et  $c'$ , sont lancés avec une même vitesse initiale  $V_0$ , les abscisses  $x$  et  $x'$  et les temps  $t$  et  $t'$ , au bout desquels leur vitesse sera devenue  $v$ , sont inversement proportionnels à leurs coefficients balistiques : on a  $cx = c'x'$  et  $ct = c't'$ .

3° La table de la fonction  $S(v)$  donne lieu, pour le *temps*, à une propriété analogue.

## II. — DISCUSSION DU MOUVEMENT.

92. **Fin du mouvement.** — Nous supposons que  $F(v)$  est une fonction continue, essentiellement positive et croissante avec  $v$ . Donc on aura  $F'(v) > 0$ . Pour  $v = 0$ , la fonction  $F(v)$  prend une valeur finie, qui peut être zéro ou un nombre positif.

Considérons, à partir de l'origine  $V_0$ , le temps total  $T_0$  écoulé et l'abscisse totale  $X_0$  parcourue lorsque, la vitesse  $v$  étant devenue égale à zéro, le mouvement se trouve éteint.

Introduisons, ainsi qu'il est dit au n° 13, le degré  $n$  de la résistance ; le degré correspondant à  $v = 0$  est désigné par  $n_0$ .

Soit donc  $n_0$  un exposant tel que  $\frac{F(v)}{v^{n_0}}$  ait, pour limite, une quantité finie quand  $v$  tend vers zéro. Cela revient, dans le voisinage de  $v = 0$ , à poser  $F(v) = v^{n_0} [B_{n_0} + B\psi(v)]$ , la fonction  $\psi(v)$  tendant vers zéro avec  $v^{n_0}$ .

Comme on a  $\frac{dv}{dt} = -vF(v)$ , la vitesse  $v$  décroîtra indéfiniment avec le temps, puisque sa dérivée ne peut changer de signe. On arrivera donc à une certaine vitesse  $v_0$ , assez voisine de zéro pour que le développement  $F(v) = v^n [B_n + B' \Psi_1(v)]$  s'applique à partir de  $v_0$ . De  $V_0$  à  $v_0$ , le temps et l'espace sont finis, puisque, dans ces limites, le dénominateur  $F(v)$  des intégrales **S** et **D** ne s'annule pas.

Entre  $v_0$  et  $v$ , on aura d'une manière générale, pour un exposant quelconque :

$$ct_0 = - \int_{v_0}^v \frac{dv}{F(v)} = - \int_{v_0}^v \frac{dv}{B_n v^n} = \frac{1}{B_n(1-n)} (v_0^{1-n} - v^{1-n}),$$

$$cx_0 = - \int_{v_0}^v \frac{v dv}{F(v)} = - \int_{v_0}^v \frac{dv}{B_n v^{n-1}} = \frac{1}{B_n(2-n)} (v_0^{2-n} - v^{2-n}).$$

Faisons tendre maintenant  $v$  vers zéro et  $n$  vers  $n_0$ . Les quantités  $T_0$  et  $X_0$  seront finies ou infinies en même temps que  $t_0$  et  $x_0$ .

Différents cas se présenteront donc suivant la valeur de l'exposant  $n_0$ , qui doit être supposé d'ailleurs  $\geq 0$ , d'après l'hypothèse  $F'(v) \geq 0$  faite sur la fonction  $F(v)$ . Ils sont resumés dans le Tableau suivant :

$n_0$	0.	< 1.	= 1.	< 2.	= 2.	> 2.
$T_0$	fini	fini	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$X_0$	fini	fini	fini	fini	$\infty$	$\infty$

« Puisque l'expérience nous apprend que les corps, qui se meuvent sur une surface plane solide ou qui flottent sur un liquide, s'arrêtent après un temps fini, on pourrait en conclure que la fonction de la vitesse, qui, en pareil cas, représente la résistance, doit contenir un terme de degré inférieur au premier » (de Saint-Robert).

**93. Origine du mouvement.** — Le projectile, qui possède à un point initial donné la vitesse  $V_0$ , doit être considéré, analytiquement tout au moins, comme ayant été animé, en amont de ce point, de vitesses sans cesse croissantes, jusqu'à  $v = \infty$ ; la variation de ces vitesses est réglée par la loi  $F(v)$  générale de la résistance.

Mais le temps  $T_\infty$  et l'abscisse  $X_\infty$  seront-ils finis ou infinis, depuis cette vitesse infinie jusqu'à une vitesse  $V_0$  finie?

Ce problème se résout tout à fait de la même manière que le problème précédent, en posant, pour de très grandes valeurs de  $v$ , la formule

$$F(v) = v^{n_\infty} [B_{n_\infty} + B' \Psi_1(v)].$$

l'exposant  $n_\infty$  étant tel que  $\frac{F(v)}{v^{n_\infty}}$  ait une valeur finie pour  $v = \infty$ , et que  $\Gamma_1(\infty) = 0$ .

Prenons, en amont de  $V_0$ , une vitesse que nous designerons par  $v_1$  et à partir de laquelle, jusqu'à  $v = \infty$ , la formule précédente soit applicable. De  $v_1$  à  $V_0$ , le temps et l'abscisse seront finis.

Intégrons depuis  $v$ , limite supérieure de l'intégrale, jusqu'à  $v_1$ , limite inférieure; on aura, en désignant par  $t_\infty$  et  $x_\infty$  le temps et l'abscisse correspondants :

$$ct_\infty = - \int_{v_1}^{\infty} \frac{dv}{F(v)} \quad \text{et} \quad cx_\infty = - \int_{v_1}^{\infty} \frac{v dv}{F(v)}.$$

Pour un exposant  $n$  quelconque, on aura

$$ct_\infty = \frac{1}{B_n(1-n)} (v^{1-n} - v_1^{1-n}),$$

$$cx_\infty = \frac{1}{B_n(2-n)} (v^{2-n} - v_1^{2-n}).$$

Mais  $T_\infty$  et  $X_\infty$  seront finis ou infinis en même temps que  $t_\infty$  et  $x_\infty$ . Faisons donc, dans ces formules,  $v = \infty$  et  $n = n_\infty$ ; suivant les valeurs de l'exposant  $n_\infty$ , on pourra dresser le Tableau suivant :

$n_\infty$	0.	< 1.	= 1.	< 2.	= 2.	> 2.
$T_\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	fini	fini	fini
$X_\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	fini

**94. Application.** — Supposons que la fonction  $F(v)$  puisse être mise sous la forme d'un polynôme ordonné suivant les puissances descendantes de  $v$  :

$$F(v) = B_n v^n + B_{n-1} v^{n-1} + \dots + B_{n-m} v^{n-m},$$

avec  $m$  positif et  $\leq n$ .

On a

$$n = n_\infty \quad \text{et} \quad n - m = n_0.$$

1° Pour que l'abscisse totale parcourue  $X_\infty^0$ , depuis  $V_0 = \infty$  jusqu'à  $v = 0$ , soit finie, il faut que  $n_0 < 2$  et  $n_\infty > 2$ .

Par exemple :

$$F(v) = B_1 v + B_3 v^3.$$

2° Pour que le temps total  $T_\infty^0$ , de  $V_0 = \infty$  à  $v = 0$ , soit fini, il faut que  $n_0 < 1$  et  $n_\infty > 1$ .

Par exemple :

$$F(v) = B_0 + B_2 v^2.$$

3<sup>o</sup> Enfin, pour que, à la fois, le temps  $T_x^0$  et l'abscisse  $\Lambda_x^0$  soient finis, il faut que  $n_0 < 1$  et  $n_x = 0$ .

Par exemple :

$$F(v) = B_0 + B_1 v^2 + B_2 v^3.$$

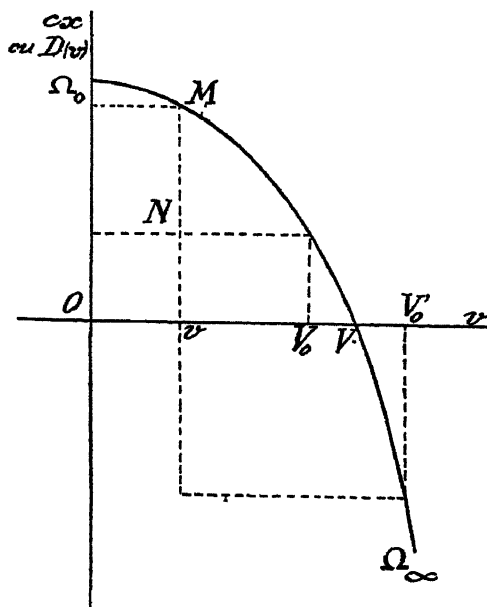
[1] A remarquer le cas de  $1 = n_\infty < 2$ , où l'abscisse  $\Lambda_\infty$  est infinie, tandis que le temps est fini.

95. **Etude de la courbe des espaces. Fonction  $D(v)$ .** — Le mouvement rectiligne horizontal sera représenté par une courbe dont les abscisses sont les vitesses  $v$  allant de 0 à  $\infty$ , et les ordonnées le produit  $cx$ . Ce sera aussi la courbe représentative de la fonction  $D(v)$  en fonction de  $v$ ; elle coupera l'axe des  $v$  au point  $V$  choisi arbitrairement.

Entre les vitesses initiale  $V_0$  et restante  $v$ , la différence  $MN$  des ordonnées de la courbe représente le produit  $cx$ .

Si le point  $V$  tombe entre  $V_0$  et  $v$ , le produit  $cx$  est représenté par la somme des ordonnées des points  $V_0'$  et  $v$ .

Fig. 116.



Nous savons (92) que si, pour  $v = 0$ , on a  $n_0 < 2$ , le point  $\Omega_0$ , où la courbe rencontre l'axe des  $cx$ , est à distance finie.

Le point  $\Omega_\infty$ , autre extrémité de la courbe qui correspond à  $v = \infty$ , n'est à distance finie que si  $n_\infty > 2$  (93).

Cherchons l'expression de la tangente en un point de la courbe ;  
On a :

$$\frac{c \, dr}{dt} = - \frac{r}{F \, r^n}.$$

Soit  $n$  le degré de la résistance en un point courant.

Posant  $F(r) = B_n \, r^n$  et  $c B_n = b_n$ , on aura :

$$b_n \frac{dx}{dv} = - \, r^{1-n}.$$

*Tangente au point  $\Omega_0$ .* -- Pour  $r = 0$ , c'est-à-dire pour  $n = n_0$ , on aura :

$$\begin{aligned} n_0 &\geq 2, & X_0 &= \infty \text{ (asymptote verticale, qui est l'axe des } cx \text{)}; \\ n_0 &> 1, & X_0 &\text{ fini (tangente verticale)}; \\ n_0 &= 1, & X_0 &\text{ fini } \left[ \text{tangente inclinée : } b_n \left( \frac{dx}{dv} \right)_0 = -1 \right]; \\ n_0 &< 1, & X_0 &\text{ fini (tangente horizontale)}; \\ n_0 &= 0, & X_0 &\text{ fini (tangente horizontale)}. \end{aligned}$$

*Tangente au point  $\Omega_\infty$ .* -- On aura, de même, pour  $r = \infty$  et  $n = n_\infty$  :

$$\begin{aligned} n_\infty &> 2, & X_\infty &\text{ fini (asymptote horizontale)}; \\ n_\infty &= 2, & X_\infty &= \infty \text{ (direction asymptotique horizontale)}; \\ n_\infty &> 1, & X_\infty &= \infty \text{ (direction asymptotique horizontale)}; \\ n_\infty &= 1, & X_\infty &= \infty \left[ \text{asymptote inclinée : } b_n \left( \frac{dx}{dv} \right)_\infty = -1 \right]; \\ n_\infty &< 1, & X_\infty &= \infty \text{ (direction asymptotique verticale)}; \\ n_\infty &= 0, & X_\infty &= \infty \text{ (direction asymptotique verticale)}. \end{aligned}$$

Ainsi donc, la courbe  $(v, cx)$  ou  $D(v)$  peut avoir, vers les vitesses très faibles, les quatre formes ci-après (*Fig. 117*).

Dans la région des vitesses très grandes, les formes possibles de la courbe  $(v, cx)$  ou  $D(v)$  seront les quatre ci-après (*Fig. 118*).

Dans les cas de  $n_\infty = 1$  et de  $n_\infty > 2$ , il existe une asymptote de la branche  $\Omega_\infty$ , inclinée dans le premier cas, horizontale dans le second.

Comme ces formes de la courbe, aux deux extrémités, sont indépendantes l'une de l'autre, il peut arriver qu'une forme quelconque du premier tableau puisse se combiner avec une forme quelconque du second.

Fig. 117.

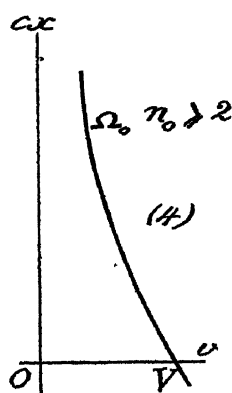
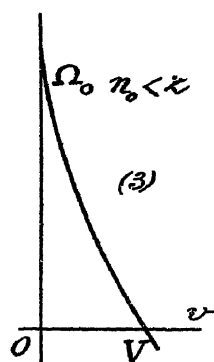
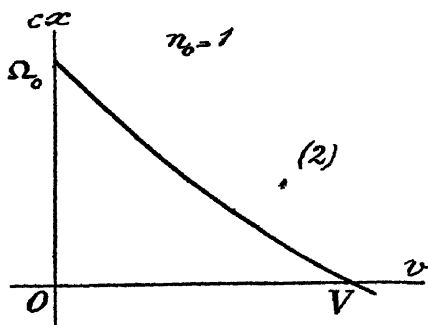
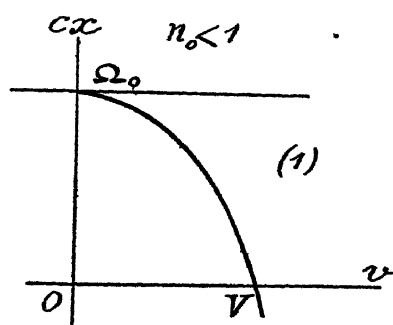
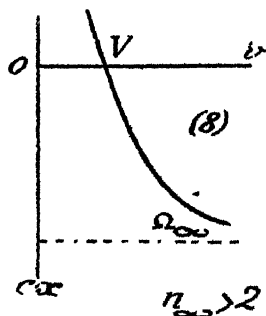
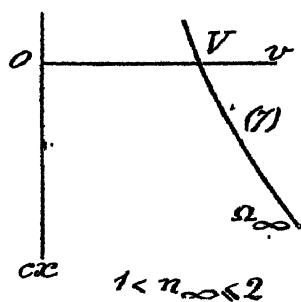
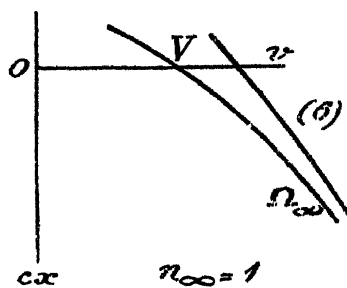
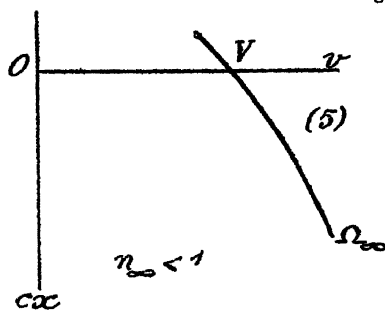


Fig. 118.



*Points d'inflexion.* — Lorsque les courbures au point  $\Omega_0$  et au point  $\Omega_\infty$  sont opposées, les courbes présentent un point d'inflexion ou un nombre impair de ces points. Si elles ont des courbures de même sens aux points  $\Omega_0$  et  $\Omega_\infty$ , elles présentent zéro ou un nombre pair de points d'inflexion.

Dans tous les cas, ces points correspondent aux valeurs de  $v$  qui annulent la dérivée seconde :

$$c \frac{d^2 x}{dv^2} = \frac{v F' - F}{F^2}.$$

Ce sont les points pour lesquels on a  $v F' - F = 0$ , c'est-à-dire ceux où la fonction  $F(v)$  devient proportionnelle à la simple vitesse, ou encore ceux où le degré de résistance devient égal à un (13) : la tangente à la courbe  $F(v)$  passe par l'origine.

Remarquons que, dans le cas d'une résistance linéaire  $F(v) = B_1 v$ , tous les points de la courbe  $(v, cx)$  sont des points d'inflexion : c'est une droite, dont l'équation est  $b_1 x = V_0 - v$ .

Dans le cas d'une résistance constante :  $F(v) = B_0$ , la courbe  $(v, cx)$  est une parabole  $b_0 x = \frac{1}{2} (V_0^2 - v^2)$  (mouvement uniformément retardé).

Si la courbe  $(v, cx)$  est finie, dans un sens ou dans l'autre, on peut prendre pour vitesse  $V$ , origine de la table de la fonction  $\mathbf{D}(v)$ , soit  $V = 0$ , soit  $V = \infty$ , suivant le cas. Mais, dans le cas où  $n_0 \geq 2$  et  $n_\infty \leq 2$ , on ne peut prendre le point de départ des tables à ces extrémités naturelles; on choisit arbitrairement une vitesse  $V$ , pour laquelle on donne une valeur arbitraire à la fonction  $\mathbf{D}(v)$ . La soustraction qu'indique l'opération :  $cx - \mathbf{D}(v) - \mathbf{D}(V_0)$  fait disparaître et l'arbitraire de la vitesse  $V$  et l'arbitraire de la valeur initiale de la fonction  $\mathbf{D}(V)$ .

96. **Étude de la courbe des temps. Fonction  $\mathbf{S}(v)$ .** — On discutera d'une façon tout à fait analogue la courbe des temps  $ct$  ou  $\mathbf{S}(v)$ , en fonction de  $v$ , en considérant la dérivée :

$$\frac{c dt}{dv} = -\frac{1}{F} \quad \text{ou} \quad b_n \frac{dt}{dv} = -\frac{1}{v^n}.$$

*Tangente au point  $\Omega_0$  :*

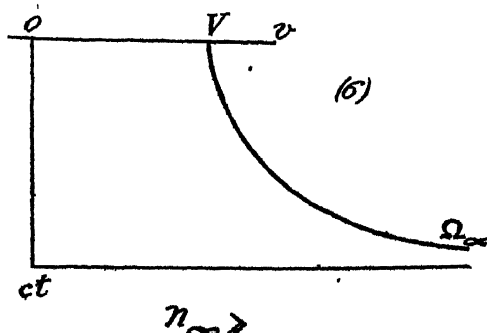
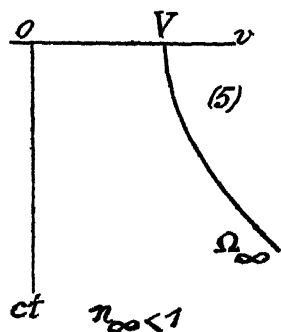
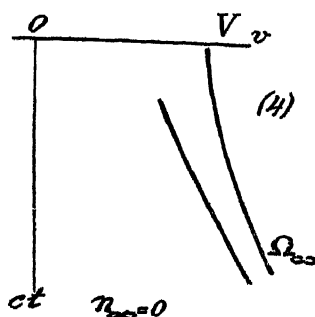
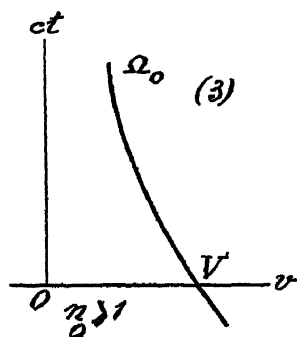
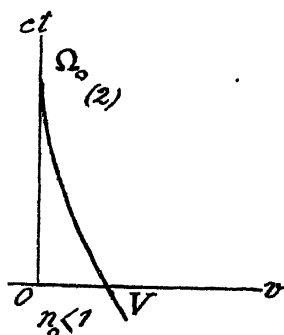
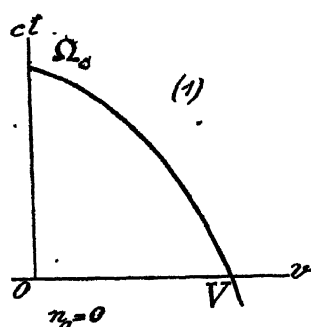
$$\begin{aligned} n_0 > 1, & \quad T_0 = \infty \text{ (asymptote verticale, qui est l'axe des } ct); \\ n_0 < 1, & \quad T_0 \text{ fini (tangente verticale);} \\ n_0 = 0, & \quad T_0 \text{ fini } \left[ \text{tangente inclinée : } b_n \left( \frac{dt}{dv} \right)_0 = -1 \right]. \end{aligned}$$



Tangente au point  $\Omega_\infty$  :

- $n_\infty > 1$ ,  $T_\infty$  fini (asymptote horizontale);  
 $n_\infty \leq 1$ ,  $T_\infty = \infty$  (direction asymptotique horizontale);  
 $n_\infty = 0$ ,  $T_\infty = \infty$  [asymptote inclinée :  $b_n \left( \frac{dt}{dv} \right)_\infty = -1$ ].

Fig. 119.



La dérivée seconde  $\frac{c \, d^2 t}{dv^2} = \frac{F'}{F^2} = \frac{n}{F}$  ne s'annule que pour  $n = 0$ . Donc, il n'existera pas d'inflexion en dehors de ce cas, qui correspond à une

tangente horizontale de la courbe  $F(v)$ , en un point courant de la courbe (13).

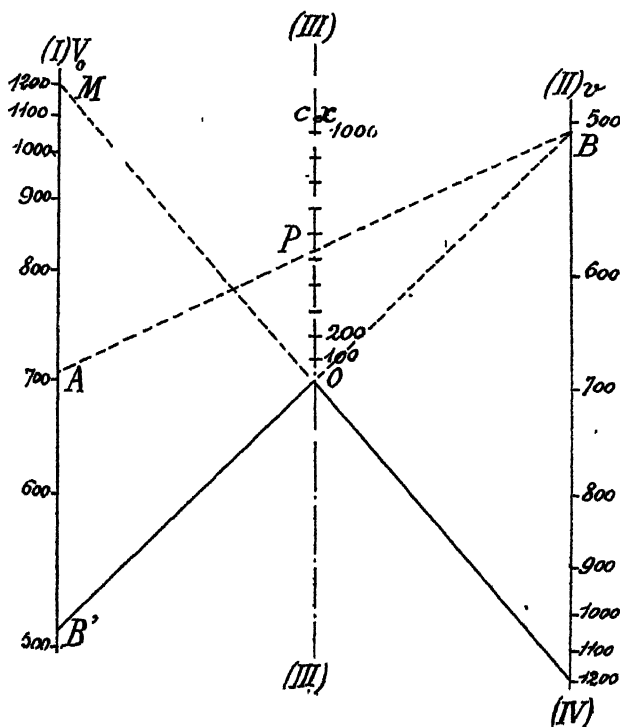
On ne peut prendre pour origine de la table de la fonction  $S(v)$  une de ses extrémités naturelles que si  $n_0 < 1$  ou  $n_\infty > 1$ .

**97. Nomogrammes des fonctions  $D(v)$  et  $S(v)$ .** — On obtiendra la solution graphique des problèmes du mouvement rectiligne horizontal par la représentation nomographique des équations

$$cx = D(v) - D(V_0) \quad \text{et} \quad ct = S(v) - S(V_0).$$

*Première solution.* — Soient deux échelles parallèles (I) et (II) portant chacune les valeurs de la fonction  $D(v)$  graduées en vitesses; elles

Fig. 120



sont disposées en sens inverse l'une de l'autre. Soit (III) l'échelle des  $cx$ , située au milieu de l'intervalle (I) à (II); l'origine de l'échelle  $cx$  est à l'intersection de (III) avec une droite quelconque reliant deux points de même cote des échelles (I) et (II). L'échelle (III) porte une graduation régulière.

En joignant  $V_0$ , sur l'échelle (I), à  $v$  sur l'échelle (II), je dis que la

droite AB coupe l'échelle (III) en un point P tel que  $OP = cx$  satisfait à la relation  $cx = D(v) - D(V_0)$ .

Joignant, en effet, BO (qui coupe (I) en B'); on aura  $MB' = NB = D(v)$ ; comme  $MA = D(V_0)$ , on a

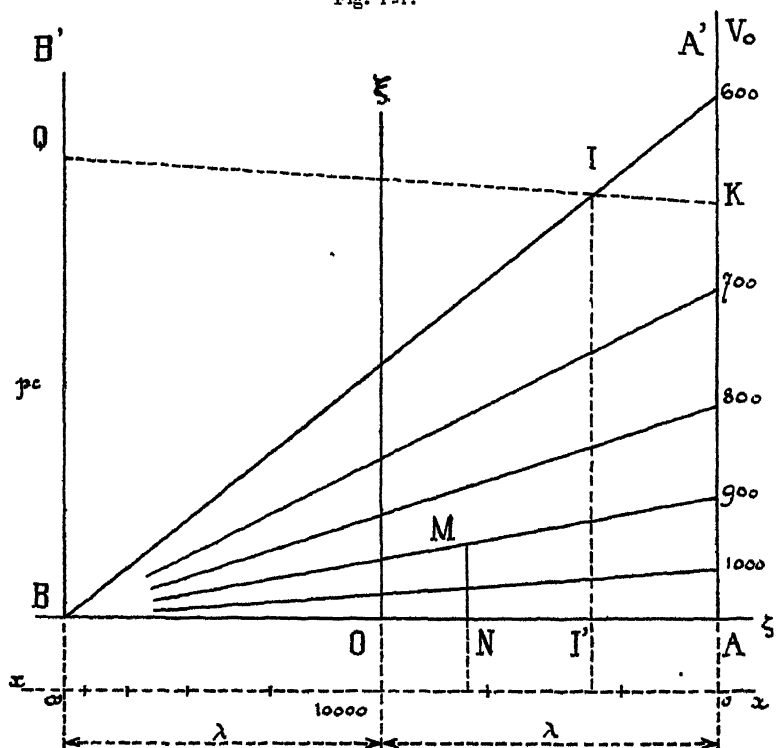
$$AB' = MB' - MA = D(v) - D(V_0).$$

Donc  $AB' = cx$ ; puisque  $OP = \frac{AB'}{2}$ , il aura suffi de graduer régulièrement (III) en fonction de  $cx$  (au lieu de  $\frac{cx}{2}$ ), par la détermination d'un point arbitraire de l'échelle, pour avoir la solution du problème.

On aura un nomogramme du même genre pour  $ct = S(v) - S(V_0)$ .

*Deuxième solution* (Ingénieur général Jacob). — Sur l'échelle AA'

Fig. 121.



porter la fonction  $p D(v)$  graduée en  $v$  ( $p$  étant le module du nomogramme). Prendre  $ON = \lambda \frac{1 - mx}{1 + mx}$ ,  $m$  étant un coefficient arbitraire, déterminé par exemple pour que la graduation de l'axe des  $\xi$  qui est 0 en A soit 10000<sup>m</sup> en O. Alors  $m = \frac{1}{10000}$ . Pour  $x = 50$ , on a  $ON = -\lambda$ .

On marquera  $x$  en  $N$  : prendre  $MN = p \frac{D(v)}{1 + mv}$ . Le lieu de  $M$ , quand  $x$  varie, est une droite passant par  $B$  et par le point  $V_0$  sur l'échelle  $AA'$ . On constitue ainsi un réseau qui forme le nomogramme.

Soit, sur  $BB'$ , pris :  $BQ = pc$ . Joignons  $QK$ ; le point  $K$  correspondant à  $V_0$  sur l'échelle  $AA'$ .

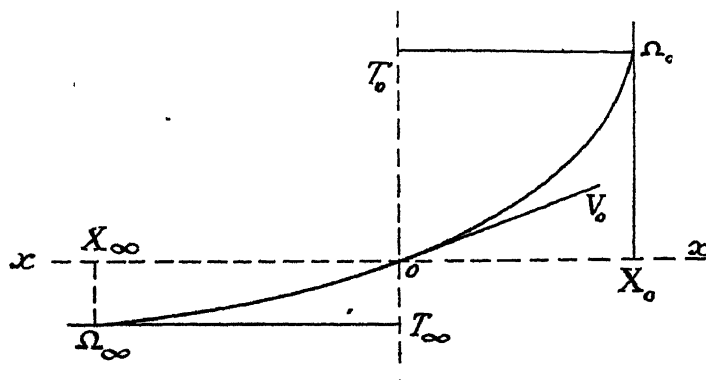
On démontrera aisément que les quatre problèmes possibles entre les quatre variables ( $c, V_0, v, x$ ) sont facilement solubles au moyen de cet abaque. Ainsi, soient donnés ( $c, V_0, x$ ). On mènera par  $I'$ , coté  $x$ , une verticale qui coupe  $QK$  en  $I$ ; la droite  $BI$  coupe l'échelle  $AA'$  au point coté  $v$ , vitesse restante cherchée.

**98. Courbes des espaces en fonction des temps.** — C'est la courbe  $f(x, t, V_0)$ , qu'on obtiendrait si l'on pourrait éliminer  $v$  entre  $D(v)$  et  $S(v)$ .

Soit, à l'origine des temps,  $O$  la position initiale du projectile.

On a, en tout point,  $\frac{dx}{dt} = v$ . Il n'existe pas de point d'inflexion sur la courbe  $f(x, t, V_0)$ , car on a  $\frac{d^2x}{dt^2} = -cF(v)$ , ce qui ne peut s'annuler que pour  $v = 0$ .

Fig. 122.



À l'origine  $O$ , la courbe part avec la vitesse  $V_0$ ; la vitesse diminuant sans cesse, la courbe est convexe vers l'axe des  $x$ . La vitesse s'annulera, c'est-à-dire la tangente deviendra verticale au bout d'un temps  $T_0$ , infini si  $n_0 > 1$ , au bout d'un temps  $T_0$  fini, si  $n_0 = 1$  (92).

L'abscisse  $X_0$  sera finie si  $n_0 > 2$ ; infinie, dans les autres cas, où la forme de la courbe sera parabolique.

Pour les temps négatifs, la tangente à la courbe devient toujours horizontale, pour  $v = \infty$ ; si  $n_0 > 1$ , le temps  $T_\infty$  est fini, et si  $n_0 > 2$ , l'abscisse  $X_\infty$  également.

On aura donc le moyen de discuter la courbe dans chaque cas particulier. La figure représente le cas de  $n_{\infty} = 2$  et de  $n_0 = 1$ , où l'on a  $T_{\infty}^0$  fini et  $X_{\infty}^0$  fini (94). Ce sera, par exemple, le cas de  $F(v) = B_0 + B_1 v + B_2 v^2 + B_3 v^3$ .

**99. Cas d'une résistance monome.** — 1° Dans le cas d'une résistance  $F(v)$  proportionnelle à une puissance  $n$  de la vitesse  $F(v) = B_n v^n$ , les deux intégrales  $S(v)$  et  $D(v)$  s'expriment aisément au moyen de fonctions connues.

On a, en effet :

$$S(v) = - \int_V^v \frac{dv}{F(v)} = - \int_V^v \frac{dv}{B_n v^n} = \frac{1}{B_n(n-1)} (v^{1-n} - V^{1-n}),$$

$$D(v) = - \int_V^v \frac{v dv}{F(v)} = - \int_V^v \frac{v dv}{B_n v^n} = \frac{1}{B_n(n-2)} (v^{2-n} - V^{2-n}).$$

Par  $V$ , on désigne une vitesse quelconque, qui peut, dans ces formules explicites, être la vitesse initiale  $V_0$ .

2° On peut, au moyen de ces formules générales, établir les formules particulières suivantes, où l'on a donné à  $n$  différentes valeurs. On pose  $c B_n = b_n$  :

$n$ .	Temps.	Abscisse.
0. ....	$b_0 t = V_0 - v$	$b_0 x = \frac{1}{2} (V_0^2 - v^2)$
1. ....	$b_1 t = \log \frac{V_0}{v}$	$b_1 x = V_0 - v$
2. ....	$b_2 t = \frac{1}{v} - \frac{1}{V_0}$	$b_2 x = \log \frac{V_0}{v}$
3. ....	$b_3 t = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{v^2} - \frac{1}{V_0^2} \right)$	$b_3 x = \frac{1}{v} - \frac{1}{V_0}$
4. ....	$b_4 t = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{v^3} - \frac{1}{V_0^3} \right)$	$b_4 x = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{v^2} - \frac{1}{V_0^2} \right)$
.....	.....	.....
$n$ . ....	$b_n t = \frac{1}{n-1} (v^{1-n} - V_0^{1-n})$	$b_n x = \frac{1}{n-2} (v^{2-n} - V_0^{2-n})$

On remarquera la relation générale  $b_n t = b_{n+1} x$ .

Pour  $n = 0$ , ce sont les formules d'un mouvement uniformément retardé.

Pour la fin du mouvement (92), on aura :

$$T_0 = \frac{1}{(1-n)b_n V_0^{n-1}}, \quad \text{si } n < 1,$$

$$X_0 = \frac{1}{(2-n)b_n V_0^{n-2}}, \quad \text{si } n < 2.$$

Pour l'origine du mouvement (93), on aura :

$$T_{\infty} = \frac{-1}{(n-1)b_n V_0^{n-1}}, \quad \text{si } n > 1.$$

$$X_{\infty} = \frac{-1}{(n-2)b_n V_0^{n-2}}, \quad \text{si } n > 2.$$

3° *Abscisse en fonction du temps.* -- Entre les formules qui donnent  $b_n t$  et  $b_n x$ , on peut aisément éliminer  $v$  et obtenir l'équation explicite générale qui relie  $(x, t, V_0)$  (98). C'est la relation

$$[1 + (n-1)V_0^{n-1} b_n t]^{\frac{1}{n-1}} = [1 + (n-2)V_0^{n-2} b_n x]^{\frac{1}{n-2}}$$

Posons

$$1 + (n-1)V_0^{n-1} b_n t = P_t,$$

$$1 + (n-2)V_0^{n-2} b_n x = Q_x.$$

On aura

$$P_t^{\frac{1}{1-n}} = Q_x^{\frac{1}{n-2}}.$$

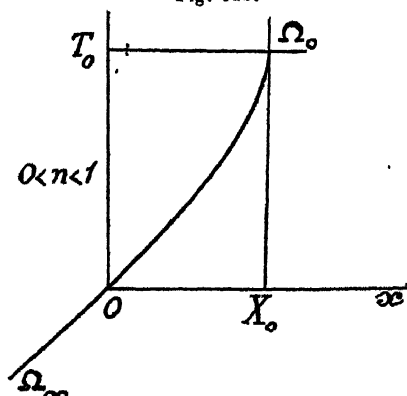
C'est l'équation d'une parabole ou d'une hyperbole générale, dont les droites  $P_t = 0$  et  $Q_x = 0$  sont les asymptotes. Celles-ci ne peuvent donc jamais être inclinées sur les axes  $Ox$  et  $Ot$ .

Pour chercher le degré de cette courbe, posons  $n = \frac{m}{m'}$ ,  $m$  et  $m'$  étant deux nombres entiers positifs. On aura

$$P_t^{m-2m'} = Q_x^{m'-m}.$$

*Premier cas.* -- On a  $0 < n < 1$ . Alors  $m < m'$  et *a fortiori*

Fig. 123.



$m < 2m'$ ; les exposants seront positifs si l'on écrit

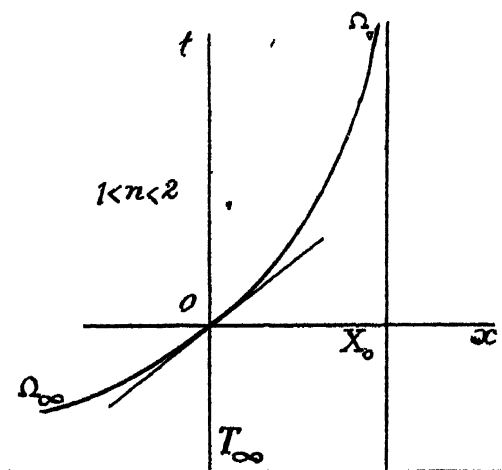
$$P_t^{2m'-m} = Q_x^{m'-m}.$$

Le degré de la courbe sera  $(2m' - m)$  en  $t$ . Exemple :  $n = \frac{1}{2}$ , d'où  $m = 1$ ,  $m' = 2$ . Donc le degré de la courbe est 3. Son équation est  $P_t^3 = Q_x$  (fig. 123).

*Deuxième cas.* — On a  $1 < n < 2$ . Donc  $m' < m < 2m'$ . L'exposant  $(m - 2m')$  est négatif, et  $(m - m')$  est positif. On écrira donc

$$1 = P_t^{2m'-m} Q_x^{m-m'},$$

Fig. 124.



avec deux exposants positifs, dont la somme est égale à  $m'$ . La courbe est une hyperbole de degré  $m'$  (fig. 124).

Ainsi, soit  $n = \frac{3}{2}$ ,  $m = 3$ ,  $m' = 2$ , le degré de la courbe est 2. Son équation est  $1 = P_t Q_x$  ou, explicitement,

$$x = \frac{2V_0 t}{2 + \sqrt{V_0} b t}.$$

Pour  $n = \frac{5}{3}$ , on a

$$1 = P_t Q_x^2.$$

*Troisième cas.* — On a  $n > 2$ . Alors  $m > 2m'$ . Comme  $m - m' > m - 2m'$ , le degré de la courbe est  $(m - m')$  en  $x$  (fig. 125).

Ainsi :

$n = 3,$	$m = 3,$	$m' = 1,$	on a	$P_t = Q_x^2;$
$n = 4,$	$m = 4,$	$m' = 1,$	on a	$P_t^2 = Q_x^3;$
$n = \frac{8}{3},$	$m = 8,$	$m' = 3,$	on a	$P_t^2 = Q_x^5.$

Fig. 125.

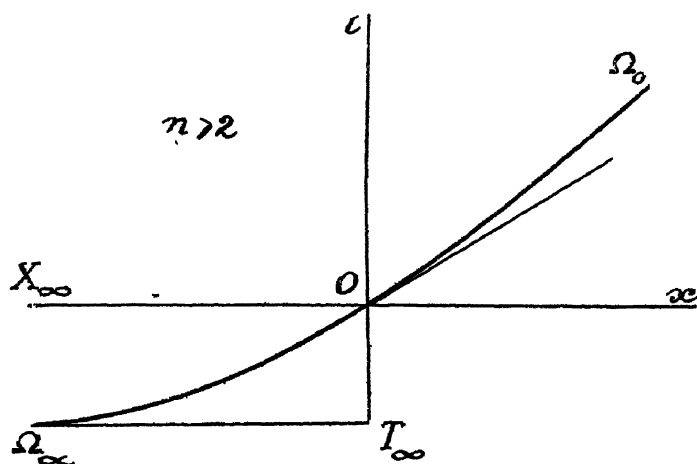


Fig. 126.

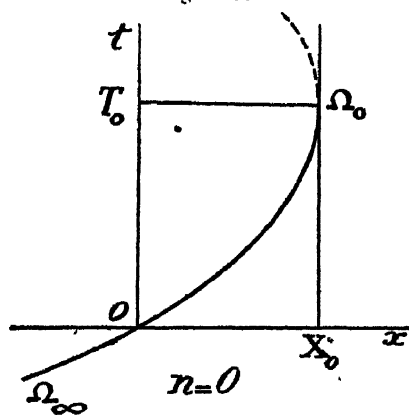


Fig. 127.

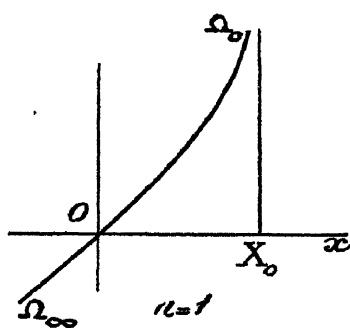
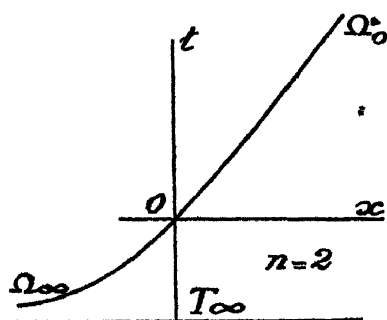


Fig. 128.





Pour  $n$  entier :

$$m = n, \quad m' = 1, \quad \text{on a} \quad P_{\xi}^{n-2} = Q_{\xi}^{n-1}.$$

*Remarque.* — Si  $n = 0$ , la courbe est la parabole  $x = V_0 t - \frac{1}{2} b_0 t^2$ .  
Si  $n = 1$  ou  $n = 2$ , la courbe est transcendante.

On voit que ces deux dernières courbes assurent la continuité des formes de la série des six courbes représentatives du mouvement (fig. 123 à 128).

4° Pour diverses valeurs entières de  $n$ , on obtient les équations suivantes :

$n$ .	Courbe $f(x, t, V_0)$
0.....	$x = V_0 t - \frac{1}{2} b_0 t^2$
1.....	$b_1 x = V_0 (1 - e^{-b_1 t})$
2....	$e^{b_2 x} = 1 + V_0 b_2 t$
3.....	$x + \frac{1}{2} b_3 V_0 x^2 = V_0 t$
4.....	$x + 2 b_4 V_0^2 x^2 + \frac{4}{3} b_4^2 V_0^3 x^3 = V_0 t + \frac{3}{2} b_4 V_0^4 t^2$

5° *Théorèmes de Page.* — Soient trois distances,  $o$ ,  $x$  et  $ax$ , comptées à partir de la bouche du canon. Mesurons les temps  $t$  mis par le projectile de  $o$  à  $x$ , et  $t'$  de  $o$  à  $ax$ , et construisons la courbe  $(t, t')$ , en tirant à des vitesses quelconques.

*a. Si la résistance est quadratique, la courbe  $(t, t')$  est une droite passant par l'origine.* On a, en effet,

$$e^{b_2 x} = 1 + V_0 b_2 t \quad \text{et} \quad e^{ab_2 x} = 1 + V_0 b_2 t';$$

L'élimination de  $V_0$  donne

$$\frac{t}{t'} = \frac{1 - e^{b_2 x}}{1 - e^{ab_2 x}}$$

et le second membre est constant. Le coefficient angulaire de cette droite permet de déterminer le coefficient balistique  $b_2$ .

*b. Si la résistance est cubique, la courbe  $(t, t')$  est une droite ne passant pas par l'origine.* On a, en effet :

$$x + \frac{1}{2} b_3 V_0 x^2 = V_0 t, \quad ax + \frac{a^2}{2} b_3 V_0 x^2 = V_0 t'.$$

L'élimination de  $V_0$  donne

$$t' = at + \frac{a(a-1)}{2} b_3 x^2.$$

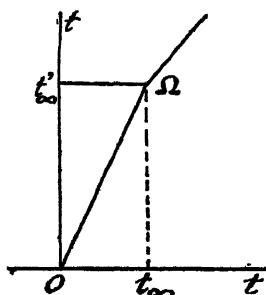
Cette droite finit au point  $\Omega$ , correspondant à  $V_0 = \infty$ , tel que

$$t_\infty = \frac{1}{2} b_3 x^2 \quad \text{et} \quad t_\infty = \frac{a^2}{2} b_3 x^2.$$

Donc

$$\left(\frac{t'}{t}\right)_\infty = a^2.$$

Fig. 129.



6° *Formules différentielles.* — Des deux expressions

$$(n-2)b_n x = v^{2-n} - V_0^{2-n},$$

$$(n-1)b_n t = v^{1-n} - V_0^{1-n},$$

on déduit, en différentiant par rapport à  $(b_n, x, t, v, V_0)$ , les formules différentielles :

$$b_n x \left( \frac{\partial b_n}{\partial b_n} + \frac{\partial x}{\partial x} \right) = \frac{\partial V_0}{V_0^{n-1}} - \frac{\partial v}{v^{n-1}},$$

$$b_n t \left( \frac{\partial b_n}{\partial b_n} + \frac{\partial t}{\partial t} \right) = \frac{\partial V_0}{V_0^n} - \frac{\partial v}{v^n}.$$

Quand trois des cinq  $\partial$  qui figurent dans ces formules seront donnés, les deux autres se trouvent déterminés.

Ces formules pourront servir à résoudre des problèmes comme le suivant :

Une cible est placée à la distance  $x$  du canon. Celui-ci tire des projectiles de poids variable, dans des conditions telles que la force vive initiale  $p V_0^2$  soit constante. Quelles sont les conditions de tir,  $b_n$  et  $V_0$ , qui donnent la plus grande vitesse restante, à la distance  $x$  ?

On a (7)

$$b_n = i \Delta \frac{a^2}{p} B_n.$$

Donc, la condition de la constance de la force vive initiale est

$$V_0^2 = k b_n, \quad \text{d'où} \quad \frac{2 \partial V_0}{V_0} = \frac{\partial b_n}{b_n}.$$

D'autre part, la première formule différentielle, en faisant  $\partial x = \partial v = 0$ , donnera

$$x \partial b_n = V_0^{1-n} \partial V_0$$

On a donc, en réunissant les deux conditions :

$$V_0^n = \frac{k}{2x}, \quad b_n = \frac{1}{k} \left( \frac{k}{2x} \right)^{\frac{2}{n}},$$

et la vitesse restante maximum  $v$  est telle que

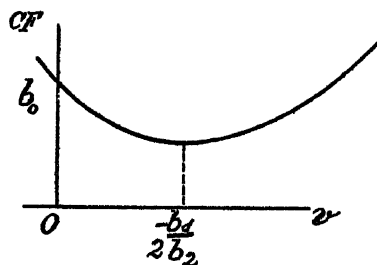
$$\left( \frac{v}{V_0} \right)^{2-n} = \frac{n}{2}.$$

Quand  $n = 2$ , on trouve  $\left( \frac{V_0}{v} \right)^2 = e$ .

**100. Loi de résistance :**  $cF(v) = b_0 + b_1 v + b_2 v^2$ . — Le coefficient  $b_2$  est toujours supposé différent de zéro ; il doit être positif, sans quoi, pour  $v = \infty$ , la résistance serait négative ; de même  $b_0$  doit être positif, car on aurait une résistance négative pour  $v = 0$ .

Ce sont des conditions balistiques qui apportent ainsi une restriction

Fig. 130.



au problème général d'Analyse qui donne la solution. Il faut même que  $b_1$  soit plus grand que zéro, car, sans cela, la fonction de résistance  $(b_0 + b_1 v + b_2 v^2)$  présenterait un minimum pour  $v = -\frac{b_1}{2b_2}$  et aurait la forme ci-dessus, ce qui est inadmissible.

On est donc amené à considérer le cas des trois coefficients  $b_0$ ,  $b_1$  et  $b_2$  positifs.

Mais, cependant, en vue de la généralisation de ces formules pour un problème différent (mouvement vertical ascendant), on aura à considérer le cas de la constante représentée ici par  $b_0$ , comme pouvant être négative.

Prenons donc, pour accélération de la résistance, la formule

$cF(v) = b_0 + b_1 v + b_2 v^2$ . On aura à intégrer les deux équations différentielles :

$$dt = - \frac{dv}{b_0 + b_1 v + b_2 v^2} \quad \text{et} \quad dx = - \frac{v dv}{b_0 + b_1 v + b_2 v^2}.$$

On écrira identiquement

$$b_0 + b_1 v + b_2 v^2 = \frac{1}{b_2} \left[ \left( b_0 b_2 - \frac{b_1^2}{4} \right) + b_2^2 \left( v + \frac{b_1}{2b_2} \right)^2 \right].$$

Il y a trois cas à considérer :

*Premier cas :*  $b_0 b_2 - \frac{b_1^2}{4} = 0$ .

Posons alors

$$b_0 b_2 - \frac{b_1^2}{4} = b_2^2 \alpha^2 \quad \text{et} \quad v + \frac{b_1}{2b_2} = v.$$

Les deux intégrales seront :

$$b_2 t = - \int_{v_0}^v \frac{dv}{\alpha^2 + v^2} \quad \text{et} \quad b_2 x = - \int_{v_0}^v \frac{v dv}{\alpha^2 + v^2} + \frac{b_1}{2b_2} \int_{v_0}^v \frac{dv}{\alpha^2 + v^2}.$$

$\alpha$ . De la première, en effectuant l'intégration, on tire, pour le temps :

$$\alpha b_2 t = \text{arc tang} \frac{2b_2 V_0 + b_1}{2\alpha b_2} = \text{arc tang} \frac{2b_2 v + b_1}{2\alpha b_2}.$$

D'après la formule d'addition des tangentes, et, après réduction, il vient :

$$(1) \quad \alpha b_2 t = \text{arc tang} \frac{\alpha b_2 (V_0 - v)}{b_0 + b_1 \frac{V_0 + v}{2} + b_2 V_0 v}.$$

L'espace  $x$  s'obtiendra par la formule

$$(2) \quad b_2 x = \frac{1}{2} \log \frac{b_0 + b_1 V_0 + b_2 V_0^2}{b_0 + b_1 v + b_2 v^2} - \frac{b_1}{2\alpha b_2} \text{arc tang} \frac{\alpha b_2 (V_0 - v)}{b_0 + b_1 \frac{V_0 + v}{2} + b_2 V_0 v}.$$

$b$ . On peut exprimer  $v$  en fonction de  $t$  par la formule (3), déduite de la formule (1) :

$$(3) \quad v = \frac{2\alpha b_2 V_0 - (2b_0 - b_1 V_0) \text{tang} \alpha b_2 t}{2\alpha b_2 + (2b_2 V_0 + b_1) \text{tang} \alpha b_2 t} \\ = - \frac{b_1}{2b_2} + \alpha \frac{(2b_2 V_0 + b_1) \cos \alpha b_2 t - 2\alpha b_2 \sin \alpha b_2 t}{(2b_2 V_0 + b_1) \sin \alpha b_2 t + 2\alpha b_2 \cos \alpha b_2 t}.$$

Comme  $dx = v dt$ , on intégrera aisément par la formule

$$(4) \quad x = - \frac{b_1}{2b_2} t + \alpha \log \left[ \frac{2b_2 V_0 + b_1}{2b_2 u} \sin \alpha b_2 t + \cos \alpha b_2 t \right].$$

*c. Fin du mouvement.* — D'après l'équation (1), on aura, pour  $v = 0$ , l'expression

$$\alpha b_2 T_0 = \text{arc tang } \frac{2\alpha b_2 V_0}{2b_0 + b_1 V_0},$$

et l'espace  $X_0$ , parcouru lors de l'arrêt du projectile, sera

$$b_2 X_0 = \frac{1}{2} \log \frac{b_0 + b_1 V_0 + b_2 V_0^2}{b_0} - \frac{b_1}{2\alpha b_2} \text{arc tang } \frac{2\alpha b_2 V_0}{2b_0 + b_1 V_0}.$$

*d. Origine du mouvement.* — Du point initial  $V_0$  jusqu'au point où  $v = \infty$ , le temps  $T_\infty$  est donné par la formule

$$\alpha b_2 T_\infty = \text{arc tang } \left( -\frac{2\alpha b_2}{2b_2 V_0 + b_1} \right).$$

L'espace  $X_\infty$  est infini.

*e.* Enfin le temps total ( $T_0 + T_\infty$ ), depuis  $V_0 = \infty$  jusqu'à  $v = 0$ , est donné par la formule

$$\alpha b_2 (T_0 + T_\infty) = \text{arc tang } \frac{2\alpha b_2}{b_1}.$$

*Deuxième cas :*  $b_0 b_1 = \frac{b_1^2}{4}$ .

On a, en faisant  $\alpha = 0$  dans les équations différentielles :

$$b_2 t = - \int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2}, \quad b_2 x = - \int_{v_0}^v \frac{dv}{v} + \frac{b_1}{2b_2} \int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2}.$$

L'intégration donne :

$$t = \frac{2}{b_1 + 2b_2 v} - \frac{2}{b_1 + 2b_2 V_0},$$

$$b_2 x = \log \frac{2b_2 V_0 + b_1}{2b_2 v + b_1} - \frac{b_1}{b_2} \left[ \frac{1}{b_1 + 2b_2 v} - \frac{1}{b_1 + 2b_2 V_0} \right].$$

Exprimées en fonction de  $t$ , ces équations deviennent :

$$v = -\frac{b_1}{2b_2} + \frac{1}{b_2} \frac{b_1 + 2b_2 V_0}{2 + (b_1 + 2b_2 V_0)t},$$

$$x = -\frac{b_1}{2b_2} t + \frac{1}{b_2} \log \left( 1 + \frac{b_1 + 2b_2 V_0}{2} t \right).$$

La fin du mouvement correspond à

$$T_0 = \frac{4b_2 V_0}{b_1(b_1 + 2b_2 V_0)} \quad \text{et} \quad b_2 X_0 = \log \frac{b_1 + 2b_2 V_0}{b_1}.$$

L'origine correspond à

$$T_\infty = -\frac{2}{b_1 + 2b_2 V_0}, \quad X_\infty = \infty.$$

On a enfin

$$T_0 + T_\infty = \frac{2}{b_1}.$$

Troisième cas :  $b_0 b_2 - \frac{b_1^2}{4} < 0$ .

Posons

$$b_2 b_0 - \frac{b_1^2}{4} = -b_2^2 a^2 \quad \text{et} \quad v + \frac{b_1}{2b_2} = v.$$

On aura

$$2ab_2 t = - \int_{v_0}^v \frac{dv}{v-a} + \int_{v_0}^v \frac{dv}{v+a} = -\log(v-a) + \log(v+a) + \text{const.}$$

Posant

$$k = \frac{2b_2 V_0 + b_1 + 2b_2 a}{2b_2 V_0 + b_1 - 2b_2 a},$$

il viendra

$$(1)' \quad 2ab_2 t = \log \frac{1}{k} \frac{2b_2 v + b_1 + 2b_2 a}{2b_2 v + b_1 - 2b_2 a}.$$

L'espace  $x$  s'obtiendra par la formule

$$b_2 x = - \int_{v_0}^v \frac{\left(v - \frac{b_1}{2b_2}\right) dv}{v^2 - a^2} = - \int_{v_0}^v \frac{v dv}{v^2 - a^2} + \frac{b_1}{2b_2} \int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2 - a^2},$$

d'où

$$(2)' \quad b_2 x = \frac{1}{2} \log \frac{b_0 + b_1 V_0 + b_2 V_0^2}{b_0 + b_1 v + b_2 v^2} - \frac{b_1}{4ab_2} \log \frac{1}{k} \frac{2b_2 v + b_1 + 2b_2 a}{2b_2 v + b_1 - 2b_2 a}.$$

a. En fonction de  $t$ , on écrira

$$(3)' \quad v = -\frac{b_1}{2b_2} + a \frac{ke^{ab_2 t} + e^{-ab_2 t}}{ke^{ab_2 t} - e^{-ab_2 t}},$$

d'où l'on déduit  $x$  par la formule

$$(4)' \quad x = -\frac{b_1}{2b_2} t + \frac{1}{b_2} \log \frac{ke^{ab_2 t} - e^{-ab_2 t}}{k-1}.$$

b. Fin du mouvement. — Pour  $v = 0$ , on a

$$2xb_2 T_0 = \log \frac{1}{k} \frac{b_1 + 2b_2 a}{b_1 - 2b_2 a}$$

et

$$b_2 X_0 = \frac{1}{2} \log \frac{b_0 + b_1 V_0 + b_2 V_0^2}{b_0} - \frac{b_1}{4ab_2} \log \frac{1}{k} \frac{b_1 + 2b_2 a}{b_1 - 2b_2 a}.$$

c. Origine du mouvement. — Pour  $v = \infty$ , on trouve

$$2ab_2 T_\infty = \log \frac{1}{k}, \quad X_\infty = \infty.$$

d. Enfin, le temps total, correspondant à  $v = 0$  et  $V_0 = \infty$ , sera

$$2a b_2 (T_0 + T_\infty) = \log \frac{b_1 + 2b_2 a}{b_1 - 2b_2 a}.$$

*Remarques.* — I. Dans le cas actuel, on a  $n_0 = 0$ ,  $n_\infty = 2$ .

On a donc, ainsi qu'on l'a vérifié, par application des théorèmes généraux (92 et 93) :

$$T_0 \text{ et } X_0 \text{ finis,} \quad T_\infty \text{ fini et } X_\infty = \infty.$$

II. La discussion de ces équations, dans le cas où  $b_0$  n'est pas nul, devient beaucoup plus parlante si l'on remarque que ces équations représentent, à un changement de notations près, celles du mouvement vertical, soit ascendant ou descendant. Aussi, c'est à propos de ce problème qu'il conviendra de les discuter complètement.

101. **Cas particuliers.** — Les formules qui viennent d'être établies admettent, comme cas particuliers, des lois binômes qui ont été employées par divers balisticiens. Le Tableau suivant correspond à l'annulation d'un seul coefficient, à l'exclusion, par conséquent, des lois monômes :

$B_0$	$B_1$	$B_2$	
0	$B_1$	$B_2$	$F(v) = B_1 v + B_2 v^2$ (loi de Hutton),
$B_0$	0	$B_2$	$F(v) = B_0 + B_1 v^2$ (loi de Didion, pénétration des projectiles dans les milieux solides);
$B_0$	$B_1$	0	$F(v) = B_0 + B_1 v$ (loi de Chapel).

Nous donnons ci-dessous les formules qui s'appliquent à ces trois fonctions.

I. *Loi de Hutton* :  $cF(v) = b_1 v + b_2 v^2$ . — Puisque  $b_0 = 0$ , on se trouve toujours dans le troisième cas du problème général, et l'on aura

$$b_1 = 2b_2 a \quad \text{et} \quad h = \frac{b_1 + b_2 V_0}{b_2 V_0}.$$

On a alors :

$$b_2 t = \log \frac{V_0}{v} \frac{b_1 + b_2 v}{b_1 + b_2 V_0}, \quad b_2 x = \log \frac{b_1 + b_2 V_0}{b_1 + b_2 v},$$

$$v = \frac{b_1 V_0}{(b_1 + b_2 V_0) e^{b_2 t} - b_2 V_0},$$

$$b_2 x = -\frac{b_1}{2} t + \log \left[ \frac{b_1 + b_2 V_0}{b_1} e^{\frac{b_1}{2} t} - \frac{b_2 V_0}{b_1} e^{-\frac{b_1}{2} t} \right].$$

On a :

$$\begin{aligned} T_0 &= \infty; & T_\infty &= \frac{1}{b_1} \log \frac{b_2 V_0}{b_1 + b_2 V_0}; \\ X_0 &= \frac{1}{b_2} \log \frac{b_1 + b_2 V_0}{b_1}; & X_\infty &= \infty. \end{aligned}$$

II. *Loi de Didion* :  $cF(v) = b_0 + b_2 v^2$  (milieux solides).

Puisque  $b_1 = 0$ , on a  $\alpha^2 = \frac{b_0}{b_2}$ . On a d'ailleurs toujours  $b_2 > 0$ , car, par hypothèse, la résistance est croissante avec la vitesse.

a. Si  $b_0$  est positif, on sera dans le premier cas du n° 100, et l'on aura les formules qui suivent :

$$\begin{aligned} \sqrt{b_0 b_2} t &= \arctan \frac{\sqrt{b_0 b_2} (V_0 - v)}{b_0 + b_2 V_0 v}, & b_2 x &= \frac{1}{2} \log \frac{b_0 + b_2 V_0^2}{b_0 + b_2 v^2}, \\ v &= \sqrt{\frac{b_0}{b_2}} \frac{b_2 V_0 \cos t \sqrt{b_0 b_2} - \sqrt{b_0 b_2} \sin t \sqrt{b_0 b_2}}{b_2 V_0 \sin t \sqrt{b_0 b_2} + \sqrt{b_0 b_2} \cos t \sqrt{b_0 b_2}}, \\ x &= \sqrt{\frac{b_0}{b_2}} \log \left[ V_0 \sqrt{\frac{b_2}{b_0}} \sin t \sqrt{b_0 b_2} + \cos t \sqrt{b_0 b_2} \right]. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \sqrt{b_0 b_2} T_0 &= \arctan V_0 \sqrt{\frac{b_2}{b_0}}, & b_2 X_0 &= \frac{1}{2} \log \frac{b_0 + b_2 V_0^2}{b_0}, \\ \sqrt{b_0 b_2} T_\infty &= \arctan \left( -V_0 \sqrt{\frac{b_2}{b_0}} \right), & X_\infty &= \infty. \end{aligned}$$

On en déduit

$$T_0 + T_\infty = \frac{\pi}{2 \sqrt{b_2 b_0}}.$$

b. Si  $b_0$  est négatif, on se trouve dans le troisième cas du problème général, et l'on aura

$$\alpha^2 = -\frac{b_0}{b_2} \quad \text{et} \quad k = \frac{V_0 + \alpha}{V_0 - \alpha}.$$

Les formules seront les suivantes :

$$\begin{aligned} 2\alpha b_2 t &= \log \frac{V_0 - \alpha}{V_0 + \alpha} \frac{v + \alpha}{v - \alpha}, & b_2 x &= \frac{1}{2} \log \frac{b_0 + b_2 V_0^2}{b_0 + b_2 v^2}, \\ v &= \alpha \frac{(V_0 + \alpha) e^{\alpha b_2 t} + (V_0 - \alpha) e^{-\alpha b_2 t}}{(V_0 + \alpha) e^{\alpha b_2 t} - (V_0 - \alpha) e^{-\alpha b_2 t}}, \\ b_2 x &= \log \frac{(V_0 + \alpha) e^{\alpha b_2 t} - (V_0 - \alpha) e^{-\alpha b_2 t}}{2\alpha}. \end{aligned}$$

On a, aux extrémités du mouvement :

$$\begin{aligned} 2\alpha b_2 T_0 &= \log \frac{V_0 + \alpha}{V_0 - \alpha}, & b_2 X_0 &= \frac{1}{2} \log \frac{b_0 + b_2 V_0^2}{b_0}, \\ 2\alpha b_2 T_\infty &= \log \frac{V_0 - \alpha}{V_0 + \alpha}, & X_\infty &= \infty. \end{aligned}$$



Il existera une limite à la vitesse, déterminée par la relation

$$V'^2 = -\frac{b_0}{b_1} = a^2.$$

Suivant que  $V_0$  est plus grand ou plus petit que  $V' = a$ , soit  $T_0$ , soit  $T_\infty$ , est imaginaire.

III. *Loi de Chapel* :  $cF(v) = b_0 + b_1 v$ .

Les formules convenant à ce cas particulier ne pourraient se déduire des formules générales que par un développement en série assez pénible. Il est plus simple de les établir directement.

On a

$$dt = - \int_{v_0}^v \frac{dv}{b_0 + b_1 v}, \quad dx = - \int_{v_0}^v \frac{v dv}{b_0 + b_1 v} = - \frac{1}{b_1} \int_{v_0}^v dv + \frac{b_0}{b_1} \int \frac{dv}{b_0 + b_1 v};$$

d'où l'on déduit :

$$\begin{aligned} b_1 t &= \log \frac{b_0 + b_1 V_0}{b_0 + b_1 v}, & b_1 x &= V_0 - v - \frac{b_0}{b_1} \log \frac{b_0 + b_1 V_0}{b_0 + b_1 v}, \\ v &= -\frac{b_0}{b_1} + \frac{b_0 + b_1 V_0}{b_1} e^{-b_1 t}, & b_1 x &= -b_0 t - \frac{b_0 + b_1 V_0}{b_1} [e^{-b_1 t} - 1]. \end{aligned}$$

Aux extrémités du mouvement, on a

$$\begin{aligned} b_1 T_0 &= \log \frac{b_0 + b_1 V_0}{b_0}, & b_1 X_0 &= V_0 - \log \frac{b_0 + b_1 V_0}{b_0}, \\ T_\infty &= \infty, & X_\infty &= \infty. \end{aligned}$$

Si  $b_0$  est négatif ( $b_1$  étant toujours positif), il existe une limite de vitesse  $V'$ , telle que  $V' = -\frac{b_0}{b_1}$ . Alors, on aura

$$b_1 T_0 = \log \frac{b_1}{b_0} (V_0 - V'),$$

et  $T_0$  sera réel ou imaginaire suivant le signe de  $(V_0 - V')$ .

102. **Problème sur la pénétration dans les milieux solides** (Piobert, Morin, Didion). — Soit la loi de résistance  $cF(v) = b_0 + b_2 v^2$ , avec  $b_0 > 0$  que nous avons déjà examinée et qui peut représenter la loi de pénétration des projectiles dans certains milieux (bois, eau, terre, maçonnerie).

On trouve, pour la pénétration  $x$ , la formule

$$b_2 x = \frac{1}{2} \log \frac{b_0 + b_2 V_0^2}{b_0 + b_2 v^2}.$$

La résistance  $\mathcal{R}$  du milieu a pour expression  $\mathcal{R} = m c F(v)$ , que nous écrirons simplement,  $\alpha$  étant le diamètre du projectile supposé sphérique,

$$\mathcal{R} = \alpha^2 (B_0 + B_2 v^2).$$

On aura donc, pour  $x$ , l'expression

$$(1) \quad \frac{B_2 \alpha^2}{m} x = \frac{1}{2} \log \frac{B_0 + B_2 v_0^2}{B_0 + B_2 v^2}.$$

« Le mobile, en pénétrant dans le milieu, y forme un vide qui souvent se maintient après que le mouvement a cessé ; c'est ce qui arrive, par exemple, quand le milieu se compose d'une terre argileuse.

» Le boulet étant sphérique, le vide est nécessairement terminé par une surface de révolution ; les sections transversales décroissent depuis l'entrée jusqu'au fond ; la section méridienne tourne sa convexité vers l'axe, excepté dans la partie où elle enveloppe le projectile. Dans la terre argileuse, le vide diffère peu d'un cône ; dans le plomb, il a la forme d'une tulipe, et le métal, refoulé sur l'arrière, se relève en bourrelet autour de l'orifice.

» Les auteurs des expériences de Metz ont remarqué qu'il existait un rapport constant entre le volume du vide et la force vive que possédait le projectile à son entrée, la valeur de ce rapport étant d'ailleurs dépendante de la nature du milieu. De cette remarque, on a fait une loi générale » (Hélie et Hugoniot).

Soit  $\rho$  le diamètre de l'entonnoir lorsque la pénétration est  $x$  ; on aura, pour le volume de l'impression,

$$\frac{\pi}{4} \int \rho^2 dx$$

et, par suite, d'après la loi admise,

$$m(v_0^2 - v^2) = 2K \int \rho^2 dx ;$$

d'où l'on tire, par différentiation,

$$-mv dv = K\rho^2 dx.$$

Mais, on a

$$\frac{\alpha^2}{m} dx = - \frac{v dv}{B_0 + B_2 v^2}.$$

Donc, on obtient

$$\alpha^2 (B_0 + B_2 v^2) = K\rho^2.$$

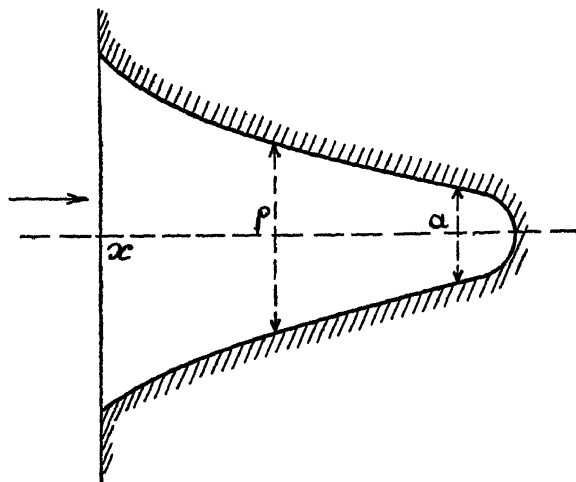
Mais, pour  $r = 0$ , on a  $\rho = a$ ; donc  $K = B_0$ , et, par suite,

$$(2) \quad \rho^2 = a^2 \left[ 1 + \frac{B_2}{B_0} v^2 \right].$$

Le diamètre d'entrée  $\rho_0$  de l'entonnoir est donc

$$\rho_0 = a \sqrt{\left( 1 + \frac{B_2}{B_0} v_0^2 \right)}.$$

Fig. 131.



Quant à la forme de la *courbe méridienne*, elle s'obtiendra en éliminant  $v^2$  entre (1) et (2). C'est la courbe

$$\rho = a \sqrt{\left( B_0 + \frac{B_2}{B_0} v_0^2 \right) e^{\frac{B_1 v^2}{m}} x}.$$

Dans cette théorie,  $B_0$  est dit *coefficient de ténacité* du milieu;  $B_2$  est le *coefficient de mobilité des molécules*.

« Les mêmes considérations sont applicables à tous les corps de révolution que la Marine emploie comme projectiles.

» L'hypothèse sur laquelle elles sont fondées revient à dire que la perte de force vive, éprouvée à chaque instant par le projectile, est proportionnelle à la quantité de matière que, pendant cet instant, il écarte de son passage. Mais la manière dont s'opère cette expulsion dépend essentiellement de la forme antérieure du mobile. Les molécules peuvent être chassées en avant ou refoulées latéralement. On ne saurait donc s'attendre à trouver, dans tous les cas, les mêmes valeurs pour les constantes » (Hélie et Hugoniot).

**103. Formule de perforation des plaques de blindage du général Moisson.** — Des considérations sur le mode de transmission d'un choc, à l'intérieur d'une plaque de blindage, ont conduit le général Moisson à adopter, comme loi de résistance, une formule qu'on peut écrire :

$$R = A \sqrt{V_0 - v}.$$

La résistance dépend donc, dans cette hypothèse, non seulement de la vitesse actuelle  $v$ , mais aussi de la vitesse  $V_0$  avec laquelle la plaque a été frappée : ce résultat tient à la prise en considération de la région totale du métal ébranlé, quand on fait état de la vitesse de propagation des ondes à l'intérieur, vitesse qui figure dans le coefficient  $A$ .

On a donc

$$m \frac{dv}{dt} = -A \sqrt{V_0 - v},$$

d'où l'on déduit

$$t = \frac{2m}{A} (V_0 - v)^{\frac{1}{2}},$$

$$x = V_0 t - \frac{1}{3} \left( \frac{A}{2m} \right)^2 t^3.$$

Comme conséquences, on dira :

1<sup>o</sup> On a  $R = \frac{A^2}{2m} t$ ; donc la résistance de la plaque est proportionnelle au temps;

2<sup>o</sup> La vitesse stricte de perforation a lieu pour  $v = 0$ , au bout du temps

$$t = \frac{2m}{A} \sqrt{\frac{1}{2}},$$

pour une épaisseur  $x$  de plaque égale à

$$x = \frac{4}{3} \frac{m}{A} \sqrt{\frac{1}{2}};$$

3<sup>o</sup> Pour une plaque d'épaisseur, la vitesse  $v_1$  de sortie du projectile est donnée par la formule

$$e = \frac{2m}{3A} (V_0 - v_1)^{\frac{1}{2}} (V_0 + v_1)$$

**104. Loi de résistance**  $RF(v) = b_1 v + b_2 v^2 + b_3 v^3$ . — On écrira identiquement :

$$RF(v) = b_3 v \left[ \left( v + \frac{b_2}{2b_3} \right)^2 + \frac{1}{b_3^2} \left( b_3 b_1 - \frac{b_2^2}{4} \right) \right].$$

1<sup>o</sup> Premier cas :  $b_3 b_1 - \frac{b_2^2}{4} = 0$ .

Posons alors

$$b_1 b_4 - \frac{b_2^2}{4} = b_3^2 a^2 \quad \text{et} \quad v + \frac{b_2}{2b_3} = v.$$

*Temps.* — On aura

$$b_3 dt = - \frac{dv}{\left(v - \frac{b_2}{2b_3}\right)(v^2 + a^2)}.$$

Posant identiquement

$$\frac{1}{\left(v - \frac{b_2}{2b_3}\right)(v^2 + a^2)} = \frac{A_1}{v - \frac{b_2}{2b_3}} + \frac{A_2 + A_3 v}{v^2 + a^2},$$

on déterminera, par identification des termes de même puissance, les trois constantes  $A_1, A_2, A_3$  et l'on écrira

$$b_3 \left[ a^2 + \left( \frac{b_2}{2b_3} \right)^2 \right] dt = - \frac{dv}{v - \frac{b_2}{2b_3}} + \frac{\frac{b_2}{2b_3} + v}{v^2 + a^2} dv,$$

ce qui s'intégrera par la formule

$$b_3 \left[ a^2 + \left( \frac{b_2}{2b_3} \right)^2 \right] t = - \log \left( v - \frac{b_2}{2b_3} \right) + \frac{b_2}{2b_3 a} \arctang \frac{v}{a} + \frac{1}{2} \log(v^2 + a^2) + \text{const.}$$

Remplaçant  $v$  et  $a$  par leurs valeurs et explicitant la constante à l'origine, on arrivera à l'équation suivante :

$$b_1 t = \frac{1}{2} \log \frac{V_0^2}{v^2} \frac{b_3 v^2 + b_2 v + b_1}{b_3 V_0^2 + b_2 V_0 + b_1} + \frac{b_2}{2b_3 a} \arctang \frac{2b_3 a(v - V_0)}{b_3 V_0 v + b_2 \frac{V_0 + v}{2} + b_1}.$$

Aux limites, on a

$$T_0 = \infty \quad \text{et} \quad T_\infty = \frac{1}{2b_1} \log \frac{b_3 V_0^2}{b_3 V_0^2 + b_2 V_0 + b_1} + \frac{b_2}{2b_1 b_3 a} \arctang \frac{4b_3 a}{2b_3 V_0 + b_2}.$$

*Abscisse.* — On aura

$$b_3 dx = - \frac{dv}{v^2 + a^2},$$

d'où

$$b_3 x = - \frac{1}{a} \left[ \arctang \frac{v}{a} - \arctang \frac{v_0}{a} \right]$$

ou

$$b_3 x = - \frac{1}{a} \arctang \frac{a(v - v_0)}{a^2 + vv_0},$$

c'est-à-dire

$$a b_3 x = \arctang \frac{a(V_0 - v)}{b_3 V_0 v + b_2 \frac{V_0 + v}{2} + b_1}.$$

Aux limites, on a

$$X_0 = \frac{1}{ab_2} \arctan \frac{2aV_0}{b_2V_0 + 2b_1},$$

$$X_\infty = \frac{1}{ab_2} \arctan \frac{-2a}{2b_2V_0 + b_1}.$$

2° *Deuxième cas* :  $b_2 b_1 - \frac{b_2^2}{4} = 0$ .

On a alors

$$cF = b_2 v \left( v + \frac{b_2}{2b_2} \right)^2.$$

On aura pour le temps

$$\frac{b_2^2}{4b_2} dt = - \frac{dv}{v - \frac{b_2}{2b_2}} + \frac{\frac{b_2}{2b_2} + v}{v^2} dv,$$

d'où

$$\frac{b_2^2}{4b_2} t = \log \frac{V_0}{v} - \frac{b_2}{2b_2} \left( \frac{1}{v} - \frac{1}{V_0} \right) + \log \frac{v}{V_0}$$

ou encore

$$b_1 t = \log \frac{V_0 \left( v + \frac{b_2}{2b_2} \right)}{v \left( V_0 + \frac{b_2}{2b_2} \right)} - \frac{b_2}{2b_2} \left( \frac{1}{v} - \frac{1}{V_0} \right).$$

A la limite :

$$T_0 = \infty, \quad T_\infty = \frac{1}{b_1} \log \frac{2b_2V_0}{2b_2V_0 + b_2} + \frac{b_2}{2b_1b_2V_0}.$$

Pour l'abscisse, on a

$$b_2 dx = - \frac{dv}{v^2},$$

d'où

$$b_2 x = \frac{1}{v} - \frac{1}{V_0} = \frac{1}{v + \frac{b_2}{2b_2}} - \frac{1}{V_0 + \frac{b_2}{2b_2}} = \frac{V_0 - v}{\left( v + \frac{b_2}{2b_2} \right) \left( V_0 + \frac{b_2}{2b_2} \right)}$$

ou encore

$$x = \frac{V_0 - v}{b_2 V_0 v + b_2 \frac{V_0 + v}{2} + b_1}.$$

A la limite :

$$X_0 = \frac{2V_0}{b_2V_0 + 2b_1}, \quad X_\infty = \frac{-2}{2b_2V_0 + b_2}.$$

3° *Troisième cas* :  $b_2 b_1 - \frac{b_2^2}{4} < 0$ .

On posera

$$b_2 b_1 - \frac{b_2^2}{4} = -b_2^2 \alpha \quad \text{et} \quad v + \frac{b_2}{2b_2} = v.$$

*Temps.* — On a

$$b_3 dt = - \frac{dv}{\left(v - \frac{b_2}{b_3}\right)^2 - a^2} = - \left[ \frac{A_1}{v - \frac{b_2}{b_3}} + \frac{A_2}{v - a} + \frac{A_3}{v + a} \right] dv,$$

d'où

$$b_3 t = - A_1 \log v - A_2 \log (v - a) - A_3 \log (v + a) + \text{const.}$$

On détermine  $A_{1,2,3}$  par identification, et l'on trouve

$$A_1 = \frac{b_1}{b_3}, \quad A_2 = \frac{b}{a(2b_3a - b_2)}, \quad A_3 = \frac{b_1}{a(2b_3a + b_2)}.$$

On a donc

$$b_1 t = \log \frac{v_0}{v} + \frac{b_1}{a(2b_3a - b_2)} \log \frac{v_0 - a}{v - a} + \frac{b_1}{a(2b_3a + b_2)} \log \frac{v_0 + a}{v + a}.$$

*Abscisse.* — On a

$$dx = - \frac{dv}{v^2 - a^2} = - \frac{1}{2a} \left[ \frac{dv}{v - a} - \frac{dv}{v + a} \right],$$

d'où

$$x = - \frac{1}{2a} \log \frac{v - a}{v + a} \frac{v_0 + a}{v_0 - a}.$$

*Remarque.* — On a ici  $n_0 = 1$ ,  $n_\infty = 3$ .

Donc, conformément aux théorèmes généraux (92, 93) :

$$\begin{array}{ll} T_0 = \infty, & X_0 \text{ fin.}, \\ T_\infty \text{ fin.}, & X_\infty \text{ fin.} \end{array}$$

**105. Cas particuliers.** — Le Tableau suivant indique les trois cas particuliers qui correspondent à l'annulation d'un des coefficients de l'expression

$$F(v) = B_1 v + B_2 v^2 + B_3 v^3.$$

$B_1.$	$B_2.$	$B_3.$		
0	$B_2$	$B_3$	$F(v) = B_2 v^2 + B_3 v^3$	(loi de Didion, résistance de l'air),
$B_1$	0	$B_3$	$F(v) = B_1 v + B_3 v^3$	
$B_1$	$B_2$	0	$F(v) = B_1 v + B_2 v^2$	(loi de Hutton).

I. *Loi de Didion* :  $cF(v) = b_2 v^2 + b_3 v^3$ . — Assez difficile à déduire des formules générales autrement que par un développement en série suivant les puissances de  $b_1$ , on obtiendra directement la solution par le calcul suivant :

*Calcul du temps.* — On a

$$t = - \int_{v_0}^v \frac{dv}{b_2 v^2 + b_3 v^3}.$$

On écrira

$$\begin{aligned} t &= -\frac{1}{b_2^2} \int_{V_0}^v \left( \frac{b_2 - b_2 v}{v^2} + \frac{b_2^2}{b_2 + b_2 v} \right) dv \\ &= -\frac{1}{b_2^2} \int_{V_0}^v \frac{dv}{v^2} + \frac{b_2}{b_2^2} \int_{V_0}^v \frac{dv}{v} - \frac{b_2}{b_2^2} \int_{V_0}^v \frac{b_2 dv}{b_2 + b_2 v}. \end{aligned}$$

En intégrant, il viendra

$$b_2 t = \frac{1}{v} - \frac{1}{V_0} + \frac{b_2}{b_2^2} \log \frac{(b_2 + b_2 V_0)v}{(b_2 + b_2 v)V_0}.$$

Pour  $v = 0$ , on a

$$T_0 = \infty;$$

Pour  $V_0 = \infty$  et  $v = V_0$ , on a

$$T_\infty = \frac{1}{b_2 V_0} + \frac{b_2}{b_2^2} \log \frac{b_2 V_0}{b_2 + b_2 V_0} \quad (n_0 = 2, n_\infty = 3).$$

*Calcul de l'abscisse.* — On a

$$x = - \int_{V_0}^v \frac{dv}{b_2 v + b_2 v^2}.$$

On écrira

$$x = -\frac{1}{b_2} \int_{V_0}^v \left( \frac{1}{v} - \frac{b_2}{b_2 + b_2 v} \right) dv = -\frac{1}{b_2} \int_{V_0}^v \frac{dv}{v} + \frac{1}{b_2} \int_{V_0}^v \frac{b_2 dv}{b_2 + b_2 v}.$$

En intégrant, il viendra

$$b_2 x = \log \frac{(b_2 + b_2 v)V_0}{(b_2 + b_2 V_0)v}.$$

Pour  $v = 0$ , on a

$$X_0 = \infty;$$

Pour  $V_0 = \infty$  et  $v = V_0$ , on a

$$X_\infty = \frac{1}{b_2} \log \frac{b_2 + b_2 V_0}{b_2 V_0} \quad (n_0 = 2, n_\infty = 3).$$

*Formule  $(t, x)$ .* — On peut obtenir  $v$  en fonction de  $x$  par la formule

$$v = \frac{b_2 V_0}{(b_2 + b_2)V_0 e^{b_2 x} - b_2 V_0}.$$

On aura donc pour le *temps*, en fonction de l'*abscisse* :

$$b_2 V_0 t = \frac{b_2 + b_2 V_0}{b_2} e^{b_2 x} - \frac{b_2 V_0}{b_2} (1 + b_2 x) - 1.$$

II. *Loi de résistance* :  $cF(v) = b_1 v + b_2 v^3$ . — Faisant  $b_2 = 0$  dans les formules générales du premier cas, ce qui suppose que  $b_1$  et  $b_2$  sont tous deux positifs, on aura  $a^2 = \frac{b_1}{b_2}$ .



*Temps :*

$$b_1 t = \frac{1}{2} \log \frac{V_0^2}{v^2} \frac{b_1 v^2 + b_1}{b_2 V_0^2 + b_1}.$$

Aux limites :

$$T_0 = \infty, \quad T_\infty = \frac{1}{2b_1} \log \frac{b_2 V_0^2}{b_2 V_0^2 + b_1}.$$

*Abscisse :*

$$\sqrt{b_1 b_2} x = \text{arc tang} \frac{\sqrt{\frac{b_1}{b_2}} (V_0 - v)}{b_2 V_0 v + b_1}.$$

Aux limites :

$$X_0 = \frac{1}{\sqrt{b_1 b_2}} \text{arc tang} \frac{V_0}{\sqrt{b_2 b_1}},$$

$$X_\infty = \frac{1}{\sqrt{b_1 b_2}} \text{arc tang} \frac{-\sqrt{\frac{b_1}{b_2}}}{b_2 V_0}.$$

( $n_0 = 1, n_\infty = 3$ ).

III. *Loi de Hutton* :  $cF(v) = b_1 v + b_2 v^2$ . — Le cas a été déjà traité plus haut (101).

On déduirait la solution des formules générales par un développement en série suivant les puissances de  $b_3$ .

106. *Loi de Saint-Robert et Mayewski* :  $cF(v) = b_2 v^2 + b_4 v^4$ . — *Calcul du temps.* — On a

$$t = - \int_{V_0}^v \frac{dv}{b_2 v^2 + b_4 v^4}.$$

On écrira

$$t = - \frac{1}{b_2} \int_{V_0}^v \left( \frac{1}{v^2} - \frac{b_4}{b_2 + b_4 v^2} \right) dv.$$

En intégrant de  $V_0$  à  $v$ , il viendra

$$b_2 t = \frac{1}{v} - \frac{1}{V_0} - \sqrt{\frac{b_4}{b_2}} \left( \text{arc tang } V_0 \sqrt{\frac{b_4}{b_2}} - \text{arc tang } v \sqrt{\frac{b_4}{b_2}} \right).$$

Pour  $v = 0$ , on a

$$T_0 = \infty;$$

Pour  $V_0 = \infty$  et  $v = V_0$ , on a

$$b_2 T_\infty = \frac{1}{V_0} - \sqrt{\frac{b_4}{b_2}} \left( \frac{\pi}{2} - \text{arc tang } V_0 \sqrt{\frac{b_4}{b_2}} \right).$$

*Calcul de l'abscisse.* — On a

$$x' = - \int_{V_0}^v \frac{dv}{b_2 v + b_4 v^3}.$$

On écrira

$$x = -\frac{1}{b_2} \int_{V_0}^v \left( \frac{1}{v} - \frac{b_4 v}{b_2 + b_4 v^2} \right) dv.$$

En intégrant de  $V_0$  à  $v$ , on obtiendra

$$b_2 x = \frac{1}{2} \log \frac{(b_2 + b_4 v^2) V_0^2}{(b_2 + b_4 V_0^2) v^2}.$$

Pour  $v = 0$ , on a

$$X_0^2 = \infty;$$

Pour  $V_0 = \infty$  et  $v = V_0$ , on a

$$X_\infty = \frac{1}{2b_2} \log \frac{b_2 + b_4 V_0^2}{b_4 V_0^2} \quad (n_0 = 2, n_\infty = 4).$$

*Formule (t, x).* — On a  $v$  en fonction de  $x$  par la formule

$$v = \frac{V_0}{\sqrt{b_2}} [(b_2 + b_4 V_0^2) e^{2b_2 x} - b_4 V_0^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Portant dans la formule des temps, on obtiendra l'expression  $(t, x)$ .

*Remarque I.* — Si les coefficients  $b_2$  et  $b_4$  étaient de signes contraires, le *temps* s'exprimerait non par des arcs tang, mais par des log.

*Remarque II.* — On pourrait traiter le problème en prenant

$$cF(v) = b_0 + b_2 v^2 + b_4 v^4,$$

puisque ce trinôme du quatrième degré peut être résolu. L'équation qui donne le *temps*  $t$  est fort compliquée.

Celle qui donne l'*abscisse*  $x$ , par l'équation

$$dx = - \int_{V_1}^v \frac{v dv}{b_0 + b_2 v^2 + b_4 v^4},$$

si l'on pose  $v^2 = \mu$ , devient

$$dx = - \frac{1}{2} \int_{\mu_1}^{\mu} \frac{d\mu}{b_0 + b_2 \mu + b_4 \mu^2},$$

tout à fait identique à celle qui donne le temps dans l'hypothèse (100) :

$$cF(v) = b_0 + b_1 v + b_2 v^2.$$

Ce seront donc les formules du *temps* déjà établies, avec la correspondance des notations suivantes :

$$t = 2x, \quad b_0 = b_0, \quad b_1 = b_2, \quad b_2 = b_4, \quad v = v^2.$$

Ainsi, par exemple, on écrira, dans le premier cas :

$$2ab_1x = \text{arc tang} \frac{ab_1(V_0^2 - v^2)}{b_0 + b_2 \frac{V_0^2 + v^2}{2} + b_1 V_0^2 v^2},$$

avec

$$b_0 b_1 - \frac{b_2^2}{4} = b_1^2 a^2;$$

Dans le deuxième cas, on aura

$$4ab_1x = \log \frac{1}{k} \frac{2b_1v^2 + b_2 + 2b_1a}{2b_1v^2 + b_2 - 2b_1a},$$

avec

$$b_0 b_1 - \frac{b_2^2}{4} = -b_1^2 a^2 \quad \text{et} \quad k = \frac{2b_1 V_0^2 + b_2 + 2b_1 a}{2b_1 V_0^2 + b_2 - 2b_1 a}.$$

Ainsi, si l'on fait :  $b_0 = 0$ , on trouve (2<sup>e</sup> cas)

$$a = \frac{b_1}{2b_1}.$$

Donc

$$b_1 x = \frac{1}{2} \log \frac{b_1 v^2 + b_2}{b_1 V_0^2 + b_2} \frac{V_0^2}{v^2},$$

comme ci-dessus.

**107. Sur d'autres formes de fonctions.** — Bien d'autres formes de lois de résistance, susceptibles de représenter plus ou moins fidèlement la loi réelle, conduisent à des formes intégrales pour  $S(v)$  et  $D(v)$  ou pour l'une ou l'autre de ces fonctions, telle, par exemple, que la fonction

$$cF(v) = A_1 v^{\frac{1}{n}} - A_2 v^{\frac{1}{2}}$$

indiquée par le capitaine Le Boulengé.

« Il importe de remarquer que toutes les fonctions ne sont pas d'un degré qu'on puisse déterminer de la manière qui a été expliquée plus haut (93); il est des fonctions pour lesquelles la limite  $\frac{F(v)}{v^n}$  quand  $v$  converge vers l'infini est toujours nulle ou infinie quelle que soit la valeur de  $n$  qu'on veuille adopter. Telles sont les fonctions

$$A \log v, \quad A e^{mv}, \quad A v^m (\log v)^n, \quad \dots$$

De ces fonctions, les unes rendent finies les intégrales mentionnées plus haut, les autres les rendent infinies.

Si, par exemple, on prend

$$F(v) = A \log v,$$

on a

$$T_x^0 = \int_0^x \frac{dv}{A \log v} = x,$$

$$X_x^0 = \int_0^x \frac{c \, dv}{A \log v} = \infty.$$

Si l'on pose

$$F(v) = A e^{mv},$$

on a

$$T_x^0 = - \int_0^\infty e^{-mv} dv = \frac{1}{Am}, \quad X_x^0 = - \frac{1}{A} \int_0^\infty v e^{-mv} dv = \frac{1}{Am^2}$$

(de Saint-Robert). ■

Comme exemple, on peut citer la loi de résistance de Page qui est la suivante :

$$eF(v) = A(e^{mv} - 1).$$

On intègre facilement le *temps*, et l'on trouve

$$t = \frac{1}{mA} \log \frac{1 - e^{-mv}}{1 - e^{-m\lambda_0}}.$$

Pour  $v = 0$ , on a

$$T_0 = \infty,$$

Pour  $v = \infty$ , on a

$$T_\infty = \frac{1}{mA} \log \frac{1}{1 - e^{-m\lambda_0}}.$$

L'*abscisse* ne peut s'obtenir par intégration explicite, mais seulement par un développement en série.

### III. — DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE.

**108. Le développement de Mac-Laurin.** — Dans le problème du mouvement rectiligne horizontal figurent trois variables, la *vitesse*  $v$ , l'*abscisse*  $x$ , le *temps*  $t$ .

On peut, théoriquement, prendre, pour variable indépendante, l'une quelconque d'entre elles. Mais si, dans le cas de  $F(v) = B_n v^n$ , le problème est complètement soluble par des formules explicites (99), il n'en est pas de même dans le cas de  $F(v)$  quelconque ;  $x$  et  $t$  ne s'expriment, en général, en fonction de  $v$  que par les symboles  $\mathbf{D}(v)$  et  $\mathbf{S}(v)$ . On ne peut donner la relation  $f(x, t, \lambda_0)$  parce qu'entre les deux fonctions  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{S}$ , on ne peut, en général, éliminer la variable  $v$ .

Ce problème se trouve résolu, dans certaines limites, par l'emploi de séries convergentes qu'il importe d'introduire, dès maintenant, dans la

théorie balistique; car les développements en séries, sous les multiples arguments qu'ils peuvent comporter dans la théorie générale, constituent le fond des méthodes de la Balistique rationnelle.

D'ailleurs, l'utilité pratique de ces développements ressortira immédiatement des quelques applications que nous donnerons plus loin.

Dans le cas du *mouvement rectiligne horizontal*, il ne peut s'agir que du développement suivant la formule de Taylor ou de Mac-Laurin, en prenant pour argument une des variables  $x$ ,  $t$  ou  $v$ . On ne saurait, par exemple, envisager le développement suivant les puissances du *coefficient balistique*  $c$  puisque cette lettre ne s'introduit, dans les formules, que par les produits  $cx$  ou  $ct$ .

Soit  $\xi = \varphi(\zeta)$  la fonction que nous nous proposons de développer en série. On pose l'identité  $\zeta = \zeta_0 - (\zeta_0 - \zeta)$ , et, par la formule de Taylor, on aura

$$\xi = \xi_0 \left( \frac{d\xi}{d\zeta} \right)_0 (\zeta_0 - \zeta) + \frac{1}{2!} \left( \frac{d^2\xi}{d\zeta^2} \right)_0 (\zeta_0 - \zeta)^2 - \frac{1}{3!} \left( \frac{d^3\xi}{d\zeta^3} \right)_0 (\zeta_0 - \zeta)^3 + \dots$$

Très convergente lorsque  $\zeta$  est voisin de  $\zeta_0$ , et qu'on peut la réduire aux deux ou trois premiers termes, cette série deviendra d'un calcul extrêmement pénible quand on voudra en étendre trop l'emploi. Elle trouvera, en particulier, une très légitime application pour chercher les valeurs limites des diverses fonctions balistiques.

**109. Les six séries du mouvement horizontal.** — Il existe, avec les trois variables ( $v$ ,  $x$ ,  $t$ ), six formules, chacune des lettres pouvant être associée à l'une des autres. Ces formules rentrent évidemment les unes dans les autres, ont une convergence du même ordre et peuvent se déduire de l'une d'entre elles.

Bien entendu, chacune de ces séries pourrait être calculée isolément en formant les dérivées successives, par exemple

$$\left( \frac{dx}{dt} \right)_0, \quad \left( \frac{d^2x}{dt^2} \right)_0, \quad \dots,$$

pour la série  $x = \varphi(t)$ ; les dérivées

$$\left( \frac{dt}{dx} \right)_0, \quad \left( \frac{d^2t}{dx^2} \right)_0, \quad \dots,$$

pour la série  $t = \varphi_2(x)$ ; les dérivées

$$\left( \frac{dt}{dv} \right)_0, \quad \left( \frac{d^2t}{dv^2} \right)_0, \quad \dots,$$

pour la série  $t = \varphi_3(v)$ , etc.

Mais, si l'on employait ce mode de calcul direct et individuel, il y aurait indépendance apparente entre les divers coefficients des six séries et complication d'écriture et de formules.

Adoptons donc une de ces séries comme série initiale. Ce sera, par exemple, la série  $x = \varphi_1(t)$  que nous représenterons par la formule

$$x = V_0 t + \frac{1}{2!} P_2 t^2 + \frac{1}{3!} P_3 t^3 + \frac{1}{4!} P_4 t^4 + \dots$$

C'est la formule de Mac-Laurin, déduite de celle de Taylor écrite plus haut (108), dans laquelle on a fait  $\xi = x$ ,  $\zeta = V_0 t$ , et où  $\xi_0 = 0$ , puisque  $x$  s'annule avec  $t$ . D'autre part, comme on a, par définition,  $\frac{dx}{dt} = v$ , le premier terme  $V_0 t$  peut s'écrire directement.

Les coefficients inconnus  $P_2, P_3, \dots$  sont des fonctions à déterminer, contenant  $c, V_0$  et  $F_0$ , ainsi que les dérivées successives  $F'_0, F''_0, \dots$  de la fonction  $F(v)$ .

Calculons la série  $x = \varphi(t)$ ; et, à cet effet, formons les dérivées successives :

On a

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v, & \frac{d^2x}{dt^2} &= -cF, \\ \frac{d^3x}{dt^3} &= c^2FF', & \frac{d^4x}{dt^4} &= -c^3F(F'^2 + FF''), \\ &\dots\dots\dots, & &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

On aura donc les valeurs suivantes des coefficients :

$$P_2 = -cF_0, \quad P_3 = c^2F_0F'_0, \quad P_4 = -c^3F_0(F_0'^2 + F_0F_0''), \quad \dots$$

**110. Retour des séries.** — Pour calculer les cinq autres séries que nous nous proposons de donner ci-après, en n'introduisant, dans tout l'ensemble des formules, que les coefficients  $P_2, P_3$  et  $P_4$ , il faut savoir comment une quelconque de ces séries pourra se déduire des autres.

Le problème, qui est dit le *retour des séries*, s'énonce ainsi qu'il suit :

Soit  $\eta$  l'argument de deux séries, bornées aux termes en  $\eta^4$

$$\begin{aligned} (1) \quad & \xi = \eta + M_2\eta^2 + M_3\eta^3 + M_4\eta^4 + \dots, \\ (2) \quad & \zeta = \eta + N_2\eta^2 + N_3\eta^3 + N_4\eta^4 + \dots \end{aligned}$$

Nous voulons obtenir le développement de la fonction  $\xi$  en fonction de  $\zeta$  sous la forme

$$(3) \quad \xi = \zeta + Q_2\zeta^2 + Q_3\zeta^3 + Q_4\zeta^4 + \dots$$

Les inconnues du problème sont les coefficients  $Q_2, Q_3, Q_4, \dots$ . Pour les obtenir, il suffit, évidemment, dans la formule (3), de remplacer  $\zeta, \zeta^2, \zeta^3, \dots$  par leurs valeurs en  $\eta$  tirées de (2), de borner le développement aux termes en  $\eta^4$ , puis d'identifier les coefficients de cette équation et de (1).

On trouve ainsi les formules générales qui suivent :

$$\begin{aligned} Q_2 &= M_2 - N_2, & Q_3 &= M_3 - N_3 - 2N_2(M_2 - N_2), \\ Q_4 &= M_4 - N_4 - 3N_2(M_3 - N_3) + (5N_2^2 - 2N_3)(M_2 - N_2). \end{aligned}$$

*Cas particuliers.* — 1° Pour exprimer  $\eta$  en fonction de  $\zeta$ , on fera  $M_2 = M_3 = M_4 = 0$ .

On aura ainsi

$$Q_2 = -N_2, \quad Q_3 = -N_3 + 2N_2^2, \quad Q_4 = -N_4 + 5N_2N_3 - 5N_2^3.$$

Donc la formule cherchée sera

$$\eta = \zeta - N_2\zeta^2 - (N_3 - 2N_2^2)\zeta^3 - (N_4 - 5N_2N_3 + 5N_2^3)\zeta^4 + \dots$$

2° On aura souvent, dans l'étude des séries, à trouver le quotient de deux séries ordonnées suivant les puissances de la même lettre. Posant

$$\frac{1 + A_1\eta + A_2\eta^2 + A_3\eta^3 + \dots}{1 + B_1\eta + B_2\eta^2 + B_3\eta^3 + \dots} = 1 + C_1\eta + C_2\eta^2 + C_3\eta^3 + \dots$$

On trouve, en identifiant les termes,

$$\begin{aligned} C_1 &= A_1 - B_1, \\ C_2 &= A_2 - B_1(A_1 - B_1), \\ C_3 &= A_3 - B_1(A_2 - B_2) + (B_1^2 - B_2)(A_1 - B_1). \end{aligned}$$

3° Pour le *produit* de deux séries, on aura

$$\begin{aligned} (1 + A_1\eta + A_2\eta^2 + A_3\eta^3 + \dots)(1 + B_1\eta + B_2\eta^2 + B_3\eta^3 + \dots) \\ = 1 + C_1\eta + C_2\eta^2 + C_3\eta^3 + \dots, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} C_1 &= A_1 + B_1, & C_2 &= A_2 + B_2 + A_1B_1, \\ C_3 &= A_3 + B_3 + A_2B_1 + B_2A_1. \end{aligned}$$

4° *Série puissance.* — On a

$$(1 + A_1\eta + A_2\eta^2 + A_3\eta^3 + \dots)^m = 1 + C_1\eta + C_2\eta^2 + C_3\eta^3 + \dots$$

avec

$$\begin{aligned} C_1 &= mA_1, & C_2 &= m\left(\frac{m-1}{2}A_1^2 + A_2\right), \\ C_3 &= m\left[\frac{(m-1)(m-2)}{6}A_1^3 + (m-1)A_2A_1 + A_3\right]. \end{aligned}$$

Par exemple, le *carré*,  $m = 2$ , donne

$$C_1 = 2A_1, \quad C_2 = \Lambda_1^2 + 2A_2, \quad C_3 = 2(\Lambda_2 A_1 + A_3).$$

Pour la *racine carrée*,  $m = \frac{1}{2}$ , on a

$$C_1 = \frac{A_1}{2}, \quad C_2 = \frac{1}{2} \left( \Lambda_1 - \frac{A_1^2}{4} \right), \\ C_3 = \frac{1}{2} \left[ \frac{A_1^3}{8} - \frac{A_2 \Lambda_1}{2} + A_3 \right].$$

Pour l'inverse de la *racine carrée*,  $m = -\frac{1}{2}$ , on a

$$C_1 = -\frac{A_1}{2}, \quad C_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} \Lambda_1^2 - \Lambda_2 \right).$$

**111. Ensemble des formules.** — On trouve, par ce procédé de calcul, les six séries qui suivent, associées deux à deux, chacune avec son inverse :

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} x = V_0 t + \frac{1}{2!} P_2 t^2 + \frac{1}{3!} P_3 t^3 + \frac{1}{4!} P_4 t^4 + \dots, \\ t = \frac{x}{V_0} - \frac{1}{2!} \frac{P_2}{V_0} \left( \frac{x}{V_0} \right) - \frac{1}{3!} \left( \frac{P_3}{V_0} - \frac{3P_2^2}{V_0^2} \right) \left( \frac{x}{V_0} \right)^2 \\ \quad - \frac{1}{4!} \left[ \frac{P_4}{V_0} - \frac{2P_2 P_3}{V_0^2} + \frac{3P_2^3}{V_0^3} \right] \left( \frac{x}{V_0} \right)^3 + \dots \\ \\ v = V_0 + P_2 t + \frac{1}{2!} P_3 t^2 + \frac{1}{3!} P_4 t^3 + \dots, \\ t = \frac{v - V_0}{P_2} - \frac{1}{2!} \frac{P_3}{P_2} \left( \frac{v - V_0}{P_2} \right)^2 - \frac{1}{3!} \left( \frac{P_4}{P_2} - 3 \frac{P_3^2}{P_2^2} \right) \left( \frac{v - V_0}{P_2} \right)^3 + \dots \\ \\ v = V_0 + P_2 \left( \frac{x}{V_0} \right) - \frac{P_2}{2!} \left( \frac{P_2}{V_0} - \frac{P_3}{P_2} \right) \left( \frac{x}{V_0} \right)^2 \\ \quad + \frac{P_2}{3!} \left[ \frac{P_4}{P_2} + \frac{3P_3^2}{V_0^2} - 1 \frac{P_3}{V_0} \right] \left( \frac{x}{V_0} \right)^3 + \dots, \\ \\ x = V_0 \frac{v - V_0}{P_2} + \frac{V_0}{2!} \left( \frac{P_2}{V_0} - \frac{P_3}{P_2} \right) \left( \frac{v - V_0}{P_2} \right)^2 \\ \quad + \frac{V_0}{3!} \left[ \frac{3P_3^2}{P_2^2} - \frac{P_4}{P_2} - \frac{2P_3}{V_0} \right] \left( \frac{v - V_0}{P_2} \right)^3 + \dots \end{array} \right.$$

On rappellera qu'on a (109) :

$$P_2 = -cF_0, \quad P_3 = c^2 F_0 F'_0, \quad P_4 = -c^3 F_0 (F_0'^2 + F_0 F_0'').$$

Donnons maintenant l'expression explicite de ces séries en introduisant le degré  $n$  de la résistance à l'origine, c'est-à-dire  $n = \frac{V_0 F'_0}{F}$ .



On a

$$P_1 = -cF_0, \quad P_2 = n \frac{c^2 F_0^2}{V_0}, \quad P_3 = -n(2n-1) \frac{c^3 F_0^3}{V_0^2}.$$

Donc :

$$(II) \quad \begin{cases} x = V_0 t \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{cF_0}{V_0} \right) t + \frac{n}{3!} \left( \frac{cF_0}{V_0} \right)^2 t^2 - \frac{n(2n-1)}{4!} \left( \frac{cF_0}{V_0} \right)^3 t^3 + \dots \right], \\ t = \frac{x}{V_0} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{cF_0}{V_0^2} \right) x - \frac{n-3}{3!} \left( \frac{cF_0}{V_0^2} \right)^2 x^2 + \frac{(n-3)(n-5)}{4!} \left( \frac{cF_0}{V_0^2} \right)^3 x^3 + \dots \right], \\ v = V_0 \left[ 1 - \left( \frac{cF_0}{V_0} \right) t + \frac{n}{2} \left( \frac{cF_0}{V_0} \right)^2 t^2 - \frac{n(2n-1)}{3!} \left( \frac{cF_0}{V_0} \right)^3 t^3 + \dots \right], \\ t = \frac{V_0 - v}{cF_0} \left[ 1 + \frac{n}{2} \left( \frac{V_0 - v}{V_0} \right) + \frac{n(n+1)}{3!} \left( \frac{V_0 - v}{V_0} \right)^2 + \dots \right]; \\ v = V_0 \left[ 1 - \left( \frac{cF_0}{V_0^2} \right) x + \frac{n-1}{2} \left( \frac{cF_0}{V_0^2} \right)^2 x^2 - \frac{(n-1)(2n-3)}{3!} \left( \frac{cF_0}{V_0^2} \right)^3 x^3 + \dots \right], \\ x = V_0 \frac{V_0 - v}{cF_0} \left[ 1 + \frac{n-1}{2} \left( \frac{V_0 - v}{V_0} \right) + \frac{n(n-1)}{3!} \left( \frac{V_0 - v}{V_0} \right)^2 + \dots \right]. \end{cases}$$

Pour le cas d'une résistance monome :  $cF(v) = b_n v^n$ , on fera, dans ces formules,  $cF_0 = b_n V_0^n$ .

Les fonctions  $S(v)$  et  $D(v)$ , qui ne sont autres que  $cx$  et  $ct$ , auront pour développement, dans le cas général,

$$\begin{aligned} S(v) &= S_1 + \frac{V_0 - v}{F_0} + \frac{1}{2} F_0' \left( \frac{V_0 - v}{F_0} \right)^2 - \frac{1}{6} (F_0'' F_0 - 2F_0'^2) \left( \frac{V_0 - v}{F_0} \right)^3 + \dots, \\ D(v) &= D_0 + V_0 \frac{V_0 - v}{F_0} - \frac{1}{2} (F_0 - V_0 F_0') \left( \frac{V_0 - v}{F_0} \right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{6} (V_0 F_0 F_0'' - 2V_0 F_0' F_0' + 2F_0 F_0') \left( \frac{V_0 - v}{F_0} \right)^3 + \dots \end{aligned}$$

*Remarques.* — 1° On peut avoir intérêt à exprimer  $x$  en fonction de  $v^2$  et réciproquement, dans les questions où l'on envisage la force vive.

On a alors les formules suivantes :

$$\begin{cases} v^2 = V_0^2 + 2P_2 x + \frac{P_3}{V_0} x^2 + \frac{1}{3V_0^2} (V_0 P_1 - P_2 P_2) x^3 + \dots, \\ x = \frac{v^2 - V_0^2}{2P_2} - \frac{P_3}{2P_2 V_0} \left( \frac{v^2 - V_0^2}{2P_2} \right)^2 \\ \quad + \left[ 2 \left( \frac{P_3}{2P_2 V_0} \right)^2 - \frac{1}{6P_2 V_0^2} (V_0 P_1 - P_2 P_2) \right] \left( \frac{v^2 - V_0^2}{2P_2} \right)^3 + \dots \end{cases}$$

On peut, au lieu de développer par rapport aux données initiales de l'arc, développer par rapport aux éléments finaux : ainsi, on aura les deux

formules

$$v = V_0 - c F_0 t + \frac{c^2}{2} t^2 F_0 F'_0 - \frac{c^3}{3!} t^3 F_0 (F_0 F''_0 + F'^2_0) + \dots,$$

$$v = V_0 - c F t - \frac{c^2}{2} t^2 F F' - \frac{c^3}{3!} t^3 F (F F'' + F'^2) + \dots$$

De ces deux formules, on déduit la suivante :

$$b_n t = \frac{2}{n} \frac{V_0^n - v^n}{V_0^{2n-1} - v^{2n-1}} + \frac{4}{3} \frac{2n-1}{n^2} \frac{(V_0^n - v^n)^2 (V_0^{3n-2} - v^{3n-2})}{(V_0^{2n-1} - v^{2n-1})^3}$$

Ainsi, pour  $n = 2$ , on a

$$b_2 t = \frac{V_0^3 - v^3}{V_0^3 - v^3} \left[ 1 + \frac{(V_0^3 - v^3)(V_0^3 - v^3)}{(V_0^3 - v^3)^2} \right].$$

#### IV. — APPLICATIONS.

##### 112. Calcul de la vitesse initiale. — 1° *Principe de la méthode.* —

Les formules du mouvement rectiligne horizontal sont couramment utilisées, dans les Commissions d'Expériences, pour déduire, d'une vitesse mesurée  $V_x$  à une petite distance  $x$  de la bouche de la pièce, la valeur de la vitesse initiale  $V_0$ .

La formule

$$cx = D(V_x) - D(V_0),$$

d'où

$$D(V_0) = D(V_x) - cx,$$

fait connaître la vitesse  $V_0$  au moyen de la table de la fonction  $D(v)$ .

Pour obtenir  $V_x$ , on mesure le temps  $t$  qui sépare la rupture des deux circuits de deux cadres-cibles, dont l'intervalle, toujours petit ( $\frac{1}{10} V_0$ ), est  $l$ .

On prend  $V_x = \frac{l}{t}$  et l'on suppose que la *vitesse aux cadres*, ainsi calculée, est la vitesse que possède le projectile au milieu de l'intervalle des deux cadres.

2° *Erreur commise sur  $V_x$ .* — Cette hypothèse n'est pas nécessairement exacte : si l'on appelle  $V_m$  la vitesse au milieu de l'intervalle des cadres,  $V_m$  diffère, en général, de  $V_x$  et nous nous proposons de calculer ici leur différence.

Soient  $V_1$  la vitesse du projectile au passage du premier cadre, et  $V_2$  la vitesse du projectile au passage du second.

On a, entre  $l$  et ces deux vitesses, la relation

$$cl = D(V_2) - D(V_1),$$

et, entre le temps  $t$  et ces deux mêmes vitesses,

$$ct = S(V_2) - S(V_1),$$

de sorte que la vitesse  $V_x$  que l'on prend pour remonter à  $V_0$ , a pour expression

$$(1) \quad V_x = \frac{D(V_2) - D(V_1)}{S(V_2) - S(V_1)}.$$

D'autre part, on a, pour la vitesse  $V_m$  au milieu de l'intervalle des cadres,

$$c \frac{l}{2} = D(V_m) - D(V_1),$$

d'où

$$(2) \quad D(V_m) - D(V_1) = \frac{l}{2} [D(V_2) - D(V_1)].$$

Posons  $V_2 = V_1 - (V_1 - V_2)$  et développons par la formule de Taylor, dans le cas d'une résistance monome (111).

Nous aurons :

$$\begin{aligned} D(V_2) - D(V_1) &= \frac{V_1 - V_2}{V_1^{n-1}} \left[ 1 + \frac{n-1}{2} \frac{V_1 - V_2}{V_1} + \frac{n(n-1)}{3!} \left( \frac{V_1 - V_2}{V_1} \right)^2 + \dots \right], \\ S(V_2) - S(V_1) &= \frac{V_1 - V_2}{V_1^n} \left[ 1 + \frac{n}{2} \frac{V_1 - V_2}{V_1} + \frac{n(n+1)}{3!} \left( \frac{V_1 - V_2}{V_1} \right)^2 + \dots \right]. \end{aligned}$$

D'après l'équation (1), la vitesse  $V_x$ , qui est égale au rapport de ces deux fonctions, aura pour expression

$$(3) \quad V_x = \frac{V_1 + V_2}{2} - \frac{n}{3 \cdot 4} \frac{(V_1 - V_2)^2}{V_1}.$$

D'autre part, pour le calcul de  $V_m$ , nous poserons

$$V_m = V_1 - (V_1 - V_m).$$

En portant cette identité dans l'égalité (2), qui définit  $D(V_m)$ , on aura

$$V_1 - V_m + \frac{n-1}{2} \frac{(V_1 - V_m)^2}{V_1} = \frac{V_1 - V_2}{2} + \frac{n-1}{4} \frac{(V_1 - V_2)^2}{V_1}.$$

On tire de là :

$$V_1 - V_m = \frac{1}{2} (V_1 - V_2) + \frac{n-1}{2 \cdot 4} \frac{(V_1 - V_2)^2}{V_1},$$

d'où

$$(4) \quad V_m = \frac{V_1 + V_2}{2} - \frac{n-1}{2 \cdot 4} \frac{(V_1 - V_2)^2}{V_1}.$$

Ainsi donc, d'après l'équation (3) qui donne  $V_x$  et l'équation (4) qui donne  $V_m$ , on voit :

a. Que la vitesse calculée par la formule  $V_x = \frac{l}{t}$  est toujours ( $n > 0$ ), plus petite que la moyenne des deux vitesses  $V_1$  et  $V_2$  au passage des deux cadres;

b. Que la vitesse  $V_m$  au milieu de l'intervalle des cadres est plus petite que la moyenne des vitesses  $V_1$  et  $V_m$ , si  $n > 1$ ; elle est plus grande que cette moyenne si  $n < 1$ ;

c. Comparons  $V_x$  et  $V_m$ . On a

$$V_x = V_m + \frac{n-3}{4!} \frac{(V_1 - V_2)^2}{V_1}.$$

Donc :

$$\begin{array}{lll} \text{si } n > 3, & \text{on a} & V_x > V_m; \\ \text{si } n = 3, & \text{»} & V_x = V_m; \\ \text{si } n < 3, & \text{»} & V_x < V_m. \end{array}$$

D'après les formules du n° III, on peut encore écrire l'expression de  $V_x$  sans faire intervenir les vitesses  $V_1$  et  $V_2$  :

$$V_x = V_m + \frac{n-3}{4!} \frac{1}{V_1^2} (c F_x t)^2,$$

ou

$$V_x = V_m + \frac{n-3}{4!} \frac{1}{V_1^2} (c F_x l)^2.$$

*Remarque.* On vérifie bien, en prenant l'équation finie du mouvement, que  $V_x = V_m$  dans le cas de  $n = 3$ .

On a, en effet (99),

$$b_3 r = \frac{1}{v} - \frac{1}{V_0},$$

d'où

$$r = \frac{V_0}{1 + b_3 V_0 r},$$

et, d'autre part (99, 4),

$$V_0 t = r \left( 1 + \frac{b_3}{2} V_0 r \right)$$

Donc

$$\frac{r}{t} = \frac{V_0}{1 + \frac{b_3}{2} V_0 r},$$

ce qui est la vitesse correspondant, d'après la formule qui donne  $c$ , à l'abscisse  $\frac{x}{2}$ .

3<sup>e</sup> *Formule des erreurs.* - Pour discuter la formule de la vitesse initiale  $\mathbf{D}(V_0) = \mathbf{D}(V_x) = cx$ , il faut pouvoir calculer l'erreur  $\partial V_0$  sur  $V_0$ , qui résultera d'erreurs ( $\partial V_x$ ,  $\partial c$ ,  $\partial x$ ) commises sur chacune des données du calcul ( $V_x$ ,  $c$ ,  $x$ ).

En différentiant logarithmiquement la relation

$$cx = D - D_0,$$

il viendra

$$(1) \quad \frac{\partial c}{c} + \frac{\partial x}{x} = \frac{-\frac{V_x}{F_x} \partial V_x + \frac{V_0}{F_0} \partial V_0}{D - D_0}.$$

Soit  $V_0 = V_x + (V_0 - V_x)$  avec  $(V_0 - V_x)$  assez petit pour que, dans la série de Taylor, le troisième terme puisse être négligé. On a

$$D - D_0 = (V_0 - V_x) \frac{V_x}{F_x}.$$

On écrira alors

$$\frac{\partial c}{c} + \frac{\partial x}{x} = \frac{1}{V_0 - V_x} \left[ -\partial V_x + \frac{V_0 F_x}{V_x F_0} \partial V_0 \right].$$

Mais on a encore

$$F_x = F_0 - (V_0 - V_x) F'_0 = F_0 \left( 1 - n \frac{V_0 - V_x}{V_0} \right).$$

On obtient ainsi la formule

$$\frac{\partial V_0}{V_0 - V_x} \left[ 1 + (1 - n) \frac{V_0 - V_x}{V_0} \right] = \frac{\partial V_x}{V_0 - V_x} + \frac{\partial c}{c} + \frac{\partial x}{x}.$$

Telle est la formule générale qui permettra de discuter les erreurs expérimentales à craindre, ou, inversement, d'organiser les expériences de manière à obtenir toujours une précision suffisante.

**4° Problème.** -- Pour remonter de  $V_x$  à  $V_0$ , supposons qu'on applique une loi monome  $B_m v^m$  de résistance au lieu de la véritable  $B_n v^n$ . Quelle erreur commettra-t-on sur  $V_0$  ?

On peut écrire la formule qui donne  $V_0$  par le développement en série du n° 111 (II) (6<sup>e</sup> équation)

$$b_n V_0^{n-2} x = \frac{V_0 - V_x}{V_0} + \frac{n-1}{2} \left( \frac{V_0 - V_x}{V_0} \right)^2 + \dots,$$

ou, en posant  $\delta = \frac{V_0 - V_x}{V_0}$ ,

$$(1) \quad b_n V_0^{n-2} x = \delta + \frac{n-1}{2} \delta^2 + \dots$$

Soit, d'autre part,  $V_1$  la vitesse initiale calculée quand on prend la loi  $B_m v^m$ . On aura, en posant  $\delta_1 = \frac{V_1 - V_x}{V_1}$ ,

$$b_m V_1^{m-2} x = \delta_1 + \frac{m-1}{2} \delta_1^2 + \dots$$

Posant, de plus, pour la différence des vitesses initiales  $V_0$  et  $V_1$ , la formule  $V_1 = V_0 (1 + \varepsilon)$ , on aura

$$(2) \quad b_m V_0^{m-1} x [1 + (m-2)\varepsilon + \dots] = \frac{\delta + \varepsilon}{1 + \varepsilon} + \frac{m+1}{2} \left( \frac{\delta + \varepsilon}{1 + \varepsilon} \right)^2 + \dots$$

Choisissons alors  $b_m$  de manière que la résistance  $b_m v^m$  soit égale à la résistance  $b_n v^n$  en un point intermédiaire entre  $V_1$  et  $V_0$ , et, pour cela, posons

$$b_m \left( \frac{V_0 + \alpha V_x}{\alpha + 1} \right)^m = b_n \left( \frac{V_0 + \alpha V_x}{\alpha + 1} \right)^n,$$

le coefficient  $\alpha$  variant de 0 à  $\infty$ , quand  $v$  varie de  $V_0$  à  $V_x$ .

On pourra écrire cette relation

$$\frac{b_m}{b_n} = V_0^{n-m} \left( 1 - \frac{\alpha}{\alpha + 1} \delta \right)^{n-m} = V_0^{n-m} \left[ 1 - (n-m) \frac{\alpha}{\alpha + 1} \delta + \dots \right].$$

Divisant (2) par (1) il viendra

$$\begin{aligned} & \left[ 1 + \frac{n-1}{2} \delta \right] \left[ 1 - (n-m) \frac{\alpha}{\alpha + 1} \delta \right] [1 + (m-2)\varepsilon + \dots] \\ & = \frac{\delta + \varepsilon}{1 + \varepsilon} + \frac{m-1}{2} \left( \frac{\delta + \varepsilon}{1 + \varepsilon} \right)^2 + \dots, \end{aligned}$$

ou, en ne conservant que les termes à la première puissance en  $\varepsilon$ ,

$$\begin{aligned} & \delta + \left[ \frac{n-1}{2} - (n-m) \frac{\alpha}{\alpha + 1} \right] \delta^2 + (m-2) \delta \varepsilon + \dots \\ & = \delta + \varepsilon - \varepsilon \delta + \frac{m-1}{2} \delta^2 + (m-1) \varepsilon \delta + \dots, \end{aligned}$$

ou, en réduisant,

$$\varepsilon = \frac{n-m}{2} \left( 1 - \frac{\alpha}{\alpha + 1} \right) \delta^2.$$

Donc, on écrira la formule cherchée, qui donne l'erreur commise,

$$\frac{V_1 - V_0}{V_0} = \frac{n-m}{2} \left( 1 - \frac{\alpha}{\alpha + 1} \right) \left( \frac{V_0 - V_x}{V_0} \right)^2.$$

Pour  $\alpha = 0$ , c'est-à-dire si  $b_m V_0^m = b_n V_0^n$ , on a

$$\frac{V_1 - V_0}{V_0} = \frac{n-m}{2} \left( \frac{V_0 - V_x}{V_0} \right)^2;$$

Pour  $\alpha = \infty$ , si  $b_m V_x^m = b_n V_x^n$ , on a

$$\frac{V_1 - V_0}{V_0} = - \frac{n-m}{2} \left( \frac{V_0 - V_x}{V_0} \right)^2,$$

Si  $\alpha = 1$ , c'est-à-dire si  $b_m \left( \frac{V_0 + V_1}{2} \right)^m = b_n \left( \frac{V_0 + V_1}{2} \right)^n$ , on a

$$V_1 = V_0:$$

l'erreur est nulle, au degré d'approximation admis.

**113. Le problème de la supériorité balistique dans le tir en mer.** —  
1° Deux navires possèdent le même armement (canons tirant un même projectile avec la même vitesse initiale  $V_0$ ); ils ont la même vitesse de marche  $v$ .

Le bateau A poursuit le bateau B et *tire en chasse*; le bateau B, qui fuit, *tire en retraite*. *Auquel des deux appartient la supériorité balistique?*

Nous supposons que le tir est assez tendu pour que les vitesses se projettent, à peu près, en vraie grandeur sur le plan horizontal, de sorte que nous n'aurons à considérer que les formules du mouvement rectiligne horizontal.

La vitesse initiale commune des deux canons est  $V_0$ . Le bateau A, qui *tire en chasse*, lancera donc son projectile avec une vitesse  $(V_0 + v)$ . Lorsque le projectile atteindra le but B, qui fuit avec la vitesse  $v$ , sa *vitesse restante absolue* sera  $v_1$  et sa *vitesse relative* :  $v_{r_1} = v_1 - v$ .

Le bateau B, qui *tire en retraite*, lancera son projectile avec une vitesse  $(V_0 - v)$ ; lorsque ce projectile atteindra le but A, qui va sur lui avec la vitesse  $v$ , il possédera une *vitesse restante absolue*  $v_2$  et une *vitesse relative* :  $v_{r_2} = v_2 + v$ .

Nous aurons résolu le problème posé si nous savons calculer  $v_1$  et  $v_2$  et comparer ainsi les vitesses absolues et relatives des projectiles au moment du choc.

2° Soit  $d$  de la distance des deux bateaux au moment où ils font feu l'un sur l'autre. Considérons les courbes  $(x, t)$  du but et du projectile.

Dans le système d'axes  $(x, t)$ , le bateau B, à partir du moment où A fait feu, décrit la droite BQ, dont l'équation est  $x = d + vt$ .

Le projectile, tiré de A, avec la vitesse initiale  $(V_0 + v)$ , décrit la courbe AQ qui est celle que l'on obtient (98) par l'élimination de  $\tau$  entre les deux équations du mouvement :

$$cx = D(v) - D(V_0 + v) \quad \text{et} \quad ct = S(v) - S(V_0 + v).$$

La droite et la courbe se rencontrent en un point Q, où la vitesse du projectile est  $v_1$ , telle que

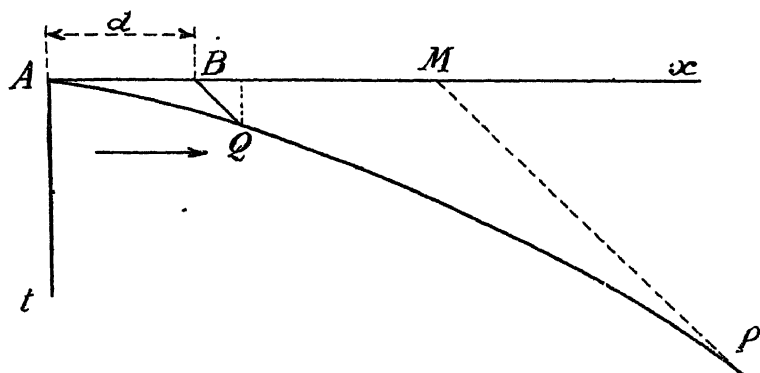
$$c(d + vt_1) = D(v_1) - D(V_0 + v),$$

et, en éliminant  $t$ ,

$$(1) \quad cd = D(v_1) - D(V_0 + v) - v[S(v_1) - S(V_0 + v)].$$

3° Prenons, d'autre part, le bateau B qui tire, en retraite, sur le bateau A. La vitesse initiale est  $(V_0 - v)$ .

Fig. 132.

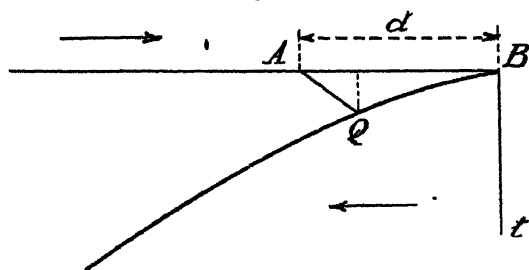


La courbe BQ du projectile et la droite AQ du bateau A, dont l'équation est  $x = d - vt$ , se coupent au point Q où la vitesse du projectile  $v_2$  est définie par la relation

$$(2) \quad cd = D(v_2) - D(V_0 - v) + v[S(v_2) - S(V_0 - v)],$$

qui fait connaître  $v_2$ .

Fig. 133.



4° Sous la forme symbolique générale, mais compliquée, des équations (1) et (2), on peut, par approximations successives et à l'aide des Tables balistiques, calculer  $v_1$  et  $v_2$ ; mais aucune discussion du problème n'est possible.

Nous allons simplifier ces équations en remarquant que la vitesse  $v$  des navires est petite relativement à la vitesse initiale  $V_0$ , et, par suite, qu'un développement par la formule de Taylor est légitime. En négli-



geant les termes en  $v^2$ , on aura, d'après les formules du n° III, les équations

$$(1 \text{ bis}) \quad cd = D(v_1) - D(\dot{V}_0) - v \left[ S(v_1) - S(V_0) - \frac{V_0}{F_0} \right];$$

$$(2 \text{ bis}) \quad cd = D(v_2) - D(V_0) + v \left[ S(v_2) - S(V_0) + \frac{V_0}{F_0} \right].$$

5° Faisons d'abord quelques remarques sur le mouvement. La courbe  $(x, t)$  du navire A (fig. 132) part du point A avec une tangente égale à  $(V_0 + v)$ . La courbure augmente constamment et la tangente devient verticale pour  $v_1 = 0$  (fin du mouvement).

On sait (99) que si  $n_0$  est le degré de la résistance  $F(v)$  dans le voisinage de  $v_1 = 0$ , la courbe  $(x, t)$  a une forme parabolique pour  $n_0 \geq 2$ ; elle admet une asymptote verticale pour  $n_0 \geq 1$ , et un point d'arrêt avec tangente verticale pour  $n_0 < 1$ .

En tout cas, il existe sur cette courbe un point P où la tangente PM est parallèle à BQ, c'est-à-dire où  $v_1$  est égal à  $v$ . Le point M est la dernière position où B peut être atteint par le tir du bateau A et la vitesse absolue  $v_1$  du projectile qui frappe B est alors égale à  $v$ . La vitesse relative est nulle. On peut dire que M est le point de *boulet mort*.

La courbe  $(x, t)$  de B est de forme tout à fait analogue : elle part avec une tangente égale à  $(V_0 - v)$ . Mais, au contraire du cas précédent, le bateau A pourra être atteint quelle que soit la distance initiale des deux bateaux [pourvu quelle soit plus petite que la distance limite  $X_0$  correspondant à  $v = 0$ , dans le cas d'une courbe  $(x, t)$  finie ( $n_0 < 2$ )].

Ainsi, il existe une certaine région où le bateau A, qui tire en chasse, n'atteindra pas son adversaire, tandis que les projectiles de celui-ci le toucheront encore.

On calculera la distance  $d_m$  du boulet mort par la formule (1) où l'on fera  $v = v$ . C'est donc

$$cd_m = D(v) - D(V_0 + v) - v [S(v) - S(V_0 + v)].$$

6° Retranchons membre à membre les équations (1 bis) et (2 bis); on aura

$$D(v_1) - D(v_2) = v \left[ S(v_1) + S(v_2) - 2S(V_0) - 2\frac{V_0}{F_0} \right].$$

Mais  $v_1$  et  $v_2$  ne diffèrent que par un terme qui contient  $v$  en facteur. Posons  $v_2 = v_1 - (v_1 - v_2)$  et développons par la formule de Taylor réduite au terme en  $(v_1 - v_2)$ . Il viendra

$$(1) \quad v_2 - v_1 = v \frac{v}{v_1} F_1 \left[ S(v_1) - S(V_0) - 2\frac{V_0}{F_0} \right].$$

Cette formule n'est valable que lorsque  $v_1$  et  $v_2$  ne sont pas de grandeur comparable à  $v$ .

7° Pour discuter cette équation, prenons le cas d'une résistance monome  $cF(v) = b_n v^n$ .

On a, dans cette hypothèse (99),

$$b_n t = S(v_1) - S(V_0) = \frac{1}{n-1} (v_1^{1-n} - V_0^{1-n}).$$

Il vient alors

$$v_2 = v_1 + \frac{2v}{n-1} \left[ 1 - n \left( \frac{v_1}{V_0} \right)^{n-1} \right].$$

Si l'on suppose que la distance  $d$  qui sépare les deux navires croisse à partir de zéro, on voit que, pour  $d=0$ , il faut faire  $v_1 = V_0 + v$ . Portant cette valeur dans le crochet, il vient

$$v_2 = v_1 - 2v.$$

La vitesse  $v_2$  est donc, tout d'abord, plus petite que  $v_1$ .

Mais les deux vitesses  $v_1$  et  $v_2$  deviennent égales quand la vitesse  $v_2$  est tombée à la valeur

$$v_{1,2} = V_0 \left( \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Cette valeur correspond à l'équation générale (3) en y faisant  $v_1 = v_2$ . C'est

$$S(v_1) - S(V_0) - \frac{V_0}{F_0} = 0.$$

Après ce point d'égalité, la vitesse  $v_2$  reste constamment supérieure à  $v_1$ .

Si  $n = 2$ , résistance quadratique, on a

$$v_{1,2} = \frac{V_0}{2};$$

Si  $n = 1$ , résistance linéaire, on a

$$v_{1,2} = \frac{V_0}{e},$$

$e$  étant la base des logarithmes naturels.

Donc, si deux navires tirent l'un sur l'autre, le chasseur atteint le chassé avec une vitesse absolue  $v_1$  plus grande que la vitesse  $v_2$  des projectiles qui l'atteignent lui-même, si la distance du tir est inférieure à une certaine limite. Pour une distance supérieure, le chassé a l'avantage.

On remarquera que la vitesse où la supériorité absolue passe de l'un à l'autre ne dépend pas du coefficient balistique du projectile; le rapport  $\frac{v_1^2}{V_0^2}$  est une constante.

8° Étudions maintenant les vitesses relatives  $v_{r_1} = v_1 - v$ , de A sur B, et  $v_{r_2} = v_2 + v$ , de B sur A, avec lesquelles les deux navires sont atteints.

On a

$$v_{r_2} - v_{r_1} = v_2 - v_1 + 2v.$$

En portant ces valeurs dans la formule (4), on aura

$$v_{r_2} = v_{r_1} + 2 \frac{v}{v_1} \left[ \mathbf{S}(v_1) - \mathbf{S}(V_0) - \frac{V_0}{F_0} + \frac{v_1}{F_1} \right],$$

ou, dans le cas d'une résistance  $n^{\text{ème}}$  :

$$(5) \quad v_{r_2} = v_{r_1} + \frac{2nv}{n-1} \left[ 1 - \left( \frac{v_1}{V_0} \right)^{n-1} \right].$$

Quel que soit  $n$ , on a toujours  $v_{r_2} > v_{r_1}$ .

Donc : *La supériorité balistique appartient toujours au navire poursuivi.* Elle croît quand la distance augmente.

Cette différence de puissance balistique en faveur du bateau qui tire en retraite peut, en pratique, avoir quelque importance. Si dans la formule (5) on fait  $n = 2$ ,  $v_1 = \frac{1}{2} V_0$  et  $v = 20^{\text{m}}$  (ce qui correspond à des conditions normales), on trouve :

$$v_{r_2} = v_{r_1} + 2v, \quad \text{d'où} \quad v_{r_2} = v_{r_1} + 40^{\text{m}}.$$

La cuirasse du tireur en chasse sera percée, celle de l'autre restera indemne.

9° Pour étudier d'une autre manière les conditions de tir de ces deux navires, calculons les temps  $t_1$  et  $t_2$  que mettent les projectiles pour arriver au but.

On a

$$ct_2 = \mathbf{S}(v_2) - \mathbf{S}(V_0 - v) = \mathbf{S}(v_2) - \mathbf{S}(V_0) - \frac{v}{F_0},$$

$$ct_1 = \mathbf{S}(v_1) - \mathbf{S}(V_0 - v) = \mathbf{S}(v_1) - \mathbf{S}(V_0) + \frac{v}{F_0}.$$

On en déduit

$$c(t_2 - t_1) = \mathbf{S}(v_2) - \mathbf{S}(v_1) - 2 \frac{v}{F_0}.$$

Remplaçons dans  $\mathbf{S}(v_2)$  la vitesse  $v_2$  tirée de l'équation (4) et déve-

loppons par la formule de Taylor. On aura

$$c(t_2 - t_1) = -\frac{2v}{v_1} \left[ S(v_1) - S(V_0) - \frac{V_0 - v_1}{F_0} \right].$$

Dans le cas d'une résistance monome, il viendra

$$b_2(t_2 - t_1) = -\frac{2v}{n-1} v_1^n \left[ 1 - n \left( \frac{v_1}{V_0} \right)^{n-1} + (n-1) \left( \frac{v_1}{V_0} \right)^n \right].$$

Si  $n > 1$ , le crochet est positif et varie de zero (pour  $v_1 = V_0$ ) à 1 pour  $v_1 = 0$ . Aussi, pour  $n = 1$ , le crochet a pour expression  $\left(1 - \frac{v_1}{V_0}\right)^2$ ;

Si  $n < 1$ , le crochet est négatif.

Donc, dans tous les cas, la différence  $(t_2 - t_1)$  est négative.

Ainsi, dans le cas d'une résistance quadratique, et pour le point  $v_1$  où les vitesses absolues sont égales et qui est tel que  $v_1 = \frac{V_0}{2}$ , on a

$$t_2 - t_1 = -\frac{v}{b_2 V_0^2}.$$

La différence des durées de trajet est égale à la vitesse des navires divisée par la résistance initiale du projectile.

Ainsi pour  $v = 20^m$  et  $b_2 V_0^2 = 20^m$  (même unité que la gravité  $g$ ), on a

$$t_2 - t_1 = -1^s.$$

Il résulte de ce théorème que la durée de trajet  $t_2$  des projectiles tirés par le navire poursuivi est plus petite que la durée du trajet  $t_1$  des projectiles tirés par le navire qui tire en chasse. Si donc les deux navires règlent leur tir par l'observation des points de chute, le navire qui fuit pourra régler plus vite son tir que celui qui lui donne la chasse. C'est encore une autre cause, pour lui, de supériorité balistique.

L'avantage balistique du navire poursuivi, tant au point de vue de l'efficacité de son projectile qu'au point de vue du réglage du tir, croît avec la distance. Un tir à très longue portée lui est donc favorable.

10° *Quelle est, à chaque instant, la différence des vitesses des deux projectiles tirés simultanément?*

Réponse :

$$v_2 = v_1 - \frac{2v F_1}{F_0}.$$

*Quelle est, au temps  $t$ , leur position relative?*

Réponse :

$$x_1 - x_2 = -2v \left( t - \frac{V_0 - V_1}{c F_0} \right).$$

*A quel point se rencontreront-ils ?*

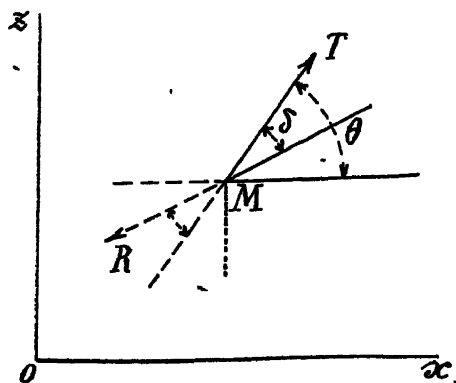
Réponse :

$$x_1 = \frac{d}{2} + v \left( t - \frac{V_0 - v_1}{F_0} \right) \quad \left( t \text{ et } v_1 \text{ correspondent à } \frac{d}{2} \right).$$

On pourra encore traiter le problème plus général où les deux bateaux auront des vitesses  $v_1$  et  $v_2$  différentes, où les vitesses initiales seront  $V_0$  et  $V_0 + dV_0$ , et les coefficients balistiques  $c$  et  $c + dc$ .

**114. Problème du stoppage courbe des navires.** — Cherchons à étudier la trajectoire du navire qui, machines stoppées, maintient sa barre à un angle fixe. La dissymétrie ainsi créée dans le milieu aura pour effet de changer le point d'application de la résistance qui, en marche rectiligne, est tangentielle. Cette résistance fera maintenant avec

Fig. 134.



la direction de la vitesse du navire un angle  $\delta$ , que nous supposons ici demeurer constant.

**1<sup>re</sup> Équation du mouvement.** — Soient  $O$  l'origine du mouvement,  $Ox$  la direction de la vitesse initiale  $V_0$ ,  $Oz$  un axe perpendiculaire à  $Ox$  et  $M$  la position actuelle du navire.

La tangente  $MT$  à la trajectoire, direction de la vitesse actuelle, fait avec l'axe des  $x$  un angle  $\theta$ ; d'autre part, la résistance  $MR$  fait avec  $MT$  l'angle constant  $\delta$ .

Si  $v$  est la vitesse en  $M$  et  $cF(v)$  la résistance (qui peut être aussi fonction de  $\delta$ ), la projection des forces sur les axes donnera les équations différentielles suivantes :

Sur  $Ox$ ,

$$\frac{d(v \cos \theta)}{dt} = -cF(v) \cos(\theta - \delta);$$

Sur  $Oz$ ,

$$\frac{d(v \sin \theta)}{dt} = -cF(v) \sin(\theta - \delta),$$

2° *Vitesse*. — La division membre à membre élimine  $cF(v)dt$ , et il vient

$$\sin(\theta - \delta) d(v \cos \theta) = \cos(\theta - \delta) d(v \sin \theta).$$

En développant les deux différentielles et en faisant les réductions nécessaires, on aura

$$\frac{dv}{v} = -\cot \delta d\theta.$$

L'intégrale de cette équation est

$$v = V_0 e^{-\theta \cot \delta}.$$

C'est l'équation de l'hodographe du mouvement, qui est indépendant de la loi de résistance de l'eau. Cette courbe est une logarithmique qui jouit de la propriété d'avoir ses tangentes toutes inclinées du même angle  $\delta$  sur le rayon vecteur. La vitesse  $v$  s'annule pour une valeur infinie de  $\theta$ .

Cette intégrale n'est pas applicable au cas où  $\delta = 0$ , ainsi qu'on le voit en reprenant l'équation différentielle, qui donne  $d\theta = 0$ ; c'est le cas du mouvement rectiligne.

3° *Temps*. — En développant la première équation différentielle, il vient

$$\cos \theta dr - v \sin \theta d\theta = -cF(v) \cos(\theta - \delta) dt;$$

ou bien, puisque  $\frac{dv}{v} = -\cot \delta d\theta$ ,

$$(\cos \theta + \sin \theta \tan \delta) dv = -cF(v) \cos(\theta - \delta) dt,$$

ce qui se réduira à

$$dv = -cF(v) \cos \delta dt.$$

Donc

$$dt = -\frac{dv}{c \cos \delta F(v)}.$$

Par suite, le temps sera donné par la formule

$$t = \frac{1}{c \cos \delta} [\mathbf{S}(v) - \mathbf{S}(V_0)].$$

On voit que, pour  $\delta = 0$ , cas où la résistance est tangentielle, le temps est bien donné par la formule ordinaire. Si  $\delta = \frac{\pi}{2}$ , cela veut dire

que la résistance agit normalement à la direction du mouvement; elle n'agit pas pour modifier ce mouvement, qui est uniforme, comme il résulte de l'équation  $v = V_0 e^{-\theta \cot \delta}$ , qui, pour  $\delta = \frac{\pi}{2}$ , donne  $v = V_0$ .

Pour arriver jusqu'à l'arrêt, le temps  $T_0$  sera fini si  $n_0 < 1$ , infini si  $n_0 \geq 1$ .

4° *Espace parcouru.* — Soit l'arc  $s$  défini par la relation  $ds = v dt$ . On aura

$$ds = - \frac{v dv}{c \cos \delta F(v)},$$

d'où l'on tire

$$s = \frac{1}{c \cos \delta} [D(v) - D(V_0)].$$

Pour arriver jusqu'à l'arrêt, l'arc  $s$  sera fini si  $n_0 < 2$ , infini si  $n_0 \geq 2$ .

5° *Coordonnées de la trajectoire.* — Pour calculer  $x$  et  $z$ , on aura les équations

$$dx = v \cos \theta dt, \quad dz = v \sin \theta dt,$$

d'où

$$dx = - \frac{1}{c \cos \delta} \frac{v \cos \theta}{F(v)} dv, \quad dz = - \frac{1}{c \cos \delta} \frac{v \sin \theta}{F(v)} dv,$$

où il faudra remplacer  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$  par leurs valeurs en fonction de  $v$ , soit  $\theta \cot \delta = \log \frac{V_0}{v}$ . Le problème est donc, dans tous les cas, ramené aux quadratures.

6° *Rayon de courbure.* — Si l'on prend les équations intrinsèques de la trajectoire en projetant les forces sur la normale, on aura

$$\frac{v^2}{r} = c F(v) \sin \delta,$$

d'où

$$r = \frac{v^2}{c F(v) \sin \delta}.$$

On voit, d'après cette équation, que si la résistance est *quadratique*,  $c F(v) = b_2 v^2$ , la trajectoire décrite est une circonférence de rayon  $\frac{1}{b_2 \sin \delta}$ , indépendante de la vitesse. On arrive à la même conclusion en intégrant les équations qui donnent  $dx$  et  $dz$ ; on peut le faire aisément, car  $\frac{v dv}{F(v)}$  devient  $\frac{dv}{v}$  qui, comme on l'a vu, est égal à  $-\cot \delta d\theta$ .

On trouve

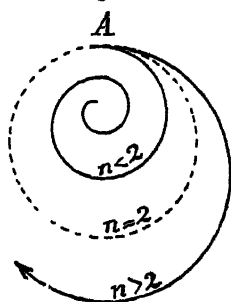
$$x = \frac{\sin \theta}{b_2 \sin \delta} \quad \text{et} \quad z = \frac{1}{b_2 \sin \delta} (1 - \cos \theta),$$

d'où, en éliminant  $\theta$ , résulte l'équation d'une circonférence.

7° *Forme de la trajectoire.* - Soit  $\Lambda$  le point de départ du mouvement retardé.

Si  $n = 2$ , le navire décrit la circonférence  $\Lambda$  et comme l'espace  $s$

Fig. 135.



avant l'arrêt complet doit être infini, cette circonférence sera parcourue indéfiniment avec des vitesses de plus en plus petites.

Si  $n < 2$ , la trajectoire est à spires diminuant de diamètre et de longueur finie, quoique le nombre des spires soit infini, car  $\theta = \infty$  pour  $s = 0$ .

Si  $n > 2$ , la trajectoire est à spires qui vont en augmentant constamment de diamètre et le nombre de ces spires est infini ( $s = \infty$ ) avant l'arrêt du navire.

8° *Résistance linéaire.* - Si  $n = 1$ , on peut intégrer les équations qui donnent  $x$  et  $z$  sous la forme

$$x = V_0 \frac{\sin \delta}{b_1} \int_0^\theta e^{-\theta} \cot \delta \cos \theta d\theta = \frac{V_0}{b_1 \sin^2 \delta} [\cos \delta - \cos(\delta + \theta) e^{-\theta} \cot \delta],$$

$$z = V_0 \frac{\sin \delta}{b_1} \int_0^\theta e^{-\theta} \cot \delta \sin \theta d\theta = \frac{V_0}{b_1 \sin^2 \delta} [\sin \delta - \sin(\delta + \theta) e^{-\theta} \cot \delta].$$

Pour obtenir ces formules, il suffit d'intégrer deux fois par parties.

Les coordonnées du point où s'arrête le navire,  $\theta = \infty$  (pôle de la spirale), sont donc

$$x_0 = \frac{V_0}{b_1} \frac{\cos \delta}{\sin^2 \delta} \quad \text{et} \quad z_0 = \frac{V_0}{b_1} \frac{1}{\sin \delta}.$$

Le point  $x_0, z_0$  est situé sur la droite  $z_0 = x_0 \tan \delta$  et à une distance  $\rho = \frac{V_0}{b_1 \sin^2 \delta}$  de l'origine [cette équation n'est pas applicable au cas de  $\delta = 0(2^\circ)$ ].

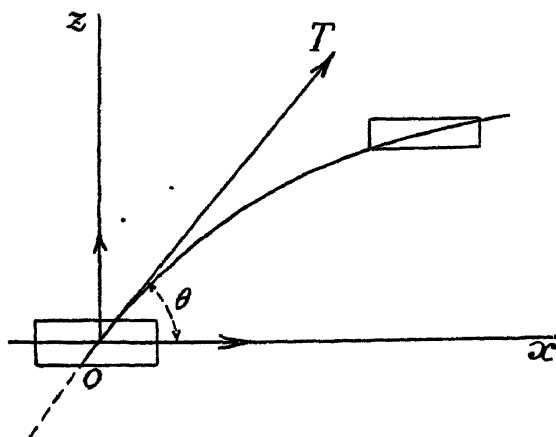
115. *Trajectoire d'un flotteur rectangulaire.* - Soit un flotteur, par



exemple une planche rectangulaire, dont le centre de gravité est lancé du point  $O$  suivant la direction  $OT$  avec la vitesse  $V_0$ .

Nous faisons l'hypothèse que la résistance de l'eau est une force

Fig. 136.



décomposable en deux autres normales aux deux faces de la planche et passant par le centre de gravité  $O$  : leurs expressions sont suivant l'axe des  $x$  :  $-c_x F(v) \cos \theta$  et suivant l'axe des  $z$  :  $-c_z F(v) \sin \theta$ , les deux coefficients balistiques  $c_x$  et  $c_z$  étant proportionnels aux aires des faces de la planche.

Aucun couple n'existant autour du centre de gravité, la planche se mouvra parallèlement à elle-même et les équations du mouvement seront

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -c_x F(v) \cos \theta, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -c_z F(v) \sin \theta.$$

Mais  $\frac{dr}{dt} = v \cos \theta$ , projection de la vitesse sur l'axe des  $x$  et aussi  $\frac{dz}{dt} = v \sin \theta$ , sur l'axe des  $z$ .

On a donc

$$\frac{d(v \cos \theta)}{dt} = -c_x F(v) \cos \theta, \quad \frac{d(v \sin \theta)}{dt} = -c_z F(v) \sin \theta.$$

Éliminant  $F(v) dt$ , on aura

$$c_z \frac{d(v \cos \theta)}{v \cos \theta} = c_x \frac{d(v \sin \theta)}{v \sin \theta},$$

c'est-à-dire

$$\left( \frac{v \cos \theta}{v_0 \cos \theta_0} \right)^{c_z} = \left( \frac{v \sin \theta}{v_0 \sin \theta_0} \right)^{c_x}.$$

Supposons  $c_x < c_z$ , on écrira

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)^{c_x-c_z} = \left(\frac{\cos \theta_0}{\cos \theta}\right)^{c_x} \left(\frac{\sin \theta}{\sin \theta_0}\right)^{c_z}.$$

Pour  $v = 0$  (fin du mouvement), le premier membre est nul; donc  $\sin \theta = 0$ ; la courbe a une forme telle que le flotteur tend à prendre la position de moindre résistance.

Pour  $v = \infty$  (origine analytique du mouvement), on a  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

Écrivons les équations différentielles :

$$\cos \theta \frac{dv}{dt} - v \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = -c_x F \cos \theta,$$

$$\sin \theta \frac{dv}{dt} + v \cos \theta \frac{d\theta}{dt} = -c_z F \sin \theta;$$

d'où l'on tire

$$\frac{dv}{dt} = -(c_x + c_z) F(v),$$

et, par suite,

$$t = \frac{1}{c_x + c_z} [\mathbf{S}(v) - \mathbf{S}(V_0)].$$

On en déduit aussi l'arc de trajectoire par la formule

$$ds = v dt, \quad \text{d'où} \quad s = \frac{1}{c_x + c_z} [\mathbf{D}(v) - \mathbf{D}(V_0)].$$

Le temps et l'arc sont donc, en amont et en aval, finis ou infinis suivant les limites des fonctions  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{S}$  pour  $v = 0$  et  $v = \infty$  (92, 93).

Pour les coordonnées de la trajectoire, on aura

$$x = -\frac{1}{c_x + c_z} \int_{v_0}^v \cos \theta \frac{v dv}{F},$$

$$z = -\frac{1}{c_x + c_z} \int_{v_0}^v \sin \theta \frac{v dv}{F},$$

où  $\sin \theta$  et  $\cos \theta$  doivent être exprimés en fonction de  $v$  par l'équation (1).

Soit, par exemple, le cas d'un bâton, où  $c_x$  sera très petit par rapport à  $c_z$  et sera négligé. On aura

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)^{c_z} = \left(\frac{\cos \theta_0}{\cos \theta}\right)^{c_z}, \quad \text{d'où} \quad v \cos \theta = v_0 \cos \theta_0;$$

la vitesse horizontale est constante. On aura

$$x = v_0 t \cos \theta_0, \quad z = -\frac{1}{c_z} \int_{v_0}^v \sqrt{1 - \frac{v_0^2 \cos^2 \theta_0}{v^2}} \frac{v dv}{F}.$$

Cette équation peut s'intégrer dans le cas d'une résistance monome  $F(v) = B_n v^n$ .

## CHAPITRE II.

### MOUVEMENT VERTICAL.

#### I. — MOUVEMENT VERTICAL ASCENDANT.

**116. Mouvement ascendant dans le vide.** — Soit  $Oy$  la verticale que parcourt le projectile lancé du point  $O$  avec la vitesse  $V_0$ . L'ordonnée  $y$  parcourue est comptée positivement de bas en haut, c'est-à-dire dans le sens du mouvement. Au point  $O$ , on a  $y = t = 0$ .

L'équation différentielle d'un pareil mouvement,  $\frac{d^2y}{dt^2} = -g$ , se met sous la forme  $\frac{dv}{dt} = -g$  et s'intègre aisément.

Entre les trois variables ( $y$ ,  $v$ ,  $t$ ), existent les trois équations qui suivent :

$$v = V_0 - gt, \quad y = V_0 t - \frac{1}{2}gt^2, \quad y = \frac{V_0^2 - v^2}{2g}.$$

Au n° 22, on a déduit ces équations des équations générales du mouvement dans le vide. On a encore, en résolvant autrement les mêmes formules :

$$t = \frac{V_0 - v}{g}, \quad v = \sqrt{V_0^2 - 2gy}, \quad t = \frac{V_0 \sqrt{V_0^2 - 2gy}}{g}.$$

Le projectile monte jusqu'à une ordonnée maximum ( $T$ ,  $Y_s$ ), où l'on a

$$T = \frac{V_0}{g}, \quad Y_s = \frac{V_0^2}{2g}.$$

On a encore

$$Y_s = \frac{gT^2}{2}.$$

**117. Équations du mouvement vertical ascendant dans l'air.** La résistance de l'air, dont l'accélération est  $cF(v)$ , agit dans le même sens que la gravité  $g$  pour s'opposer au mouvement. On aura donc, l'ordonnée  $y$  étant comptée positivement de bas en haut, l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -cF(v) - g.$$

Comme on a  $\frac{dy}{dt} = v$ , on pourra intégrer et obtenir le temps  $t$  par la formule

$$t = - \int_{V_0}^v \frac{dv}{cF(v) + g}.$$

L'intégrale est prise à partir de la vitesse initiale  $V_0$ , pour laquelle on suppose  $t = 0$ .

On aura, ensuite, pour l'ordonnée  $y$ , entre les mêmes limites et avec l'hypothèse  $y = 0$ , pour  $v = V_0$ , la formule

$$y = - \int_{V_0}^v \frac{v dv}{cF(v) + g}.$$

Les formules ci-dessus, qui donnent  $t$  et  $y$  dans le mouvement ascendant, sont parfois dites celles de la *trajectoire zénithale*, lorsque la verticale est considérée comme la limite, pour  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , d'une famille de trajectoires  $V_0 = \text{const.}$

**118. Discussion du mouvement.** — D'après l'équation différentielle  $\frac{dv}{dt} = -cF(v) - g$ , la dérivée  $\frac{dv}{dt}$  est toujours négative.

Donc  $v$  décroît quand le temps augmente, de sorte que la vitesse, qui a déjà pour limite zéro quand  $cF(v)$  est nul, aura, *a fortiori*, cette même limite zéro si l'on ajoute  $-cF(v)$  à  $(-g)$ . Le temps  $T_s$  correspondant, mis par le projectile pour aller de  $V_0$  à 0, sera

$$T_s = - \int_{V_0}^0 \frac{dv}{cF(v) + g}.$$

Ce temps  $T_s$  mis par le projectile pour arriver à une vitesse nulle, est toujours fini. Il est toujours plus petit que  $\frac{V_0}{g}$ , temps mis dans le vide jusqu'à l'arrêt du projectile.

Il en est de même de l'ordonnée maximum  $Y_s$ , qui est plus petite que  $\frac{V_0^2}{2g}$ .

Mais cette démonstration suppose que la vitesse initiale  $V_0$  est finie. Étudions maintenant le mouvement en amont du point  $V_0$ , en supposant que la vitesse  $v$  a été infinie antérieurement. Nous distinguons deux cas :

1<sup>o</sup> La fonction  $F(v)$ , pour  $v = \infty$ , tend vers une constante [degré  $n_x = 0$  (13)]. C'est comme si, à partir d'une certaine vitesse, la gra-

vité  $g$  était remplacée par une constante plus grande. Comme dans le vide, le temps  $T$  mis de  $r = \infty$  à  $r = V_0$ , et l'ordonnée  $Y_\infty$  correspondants, seront infinis.

2° La fonction  $F(v)$ , pour  $r = \infty$ , devient infinie. Donc  $cF(v)$  deviendra, à partir d'une certaine vitesse, infiniment grand par rapport à  $g$ , de sorte que, pour la recherche des valeurs limites,  $g$  disparaît et l'on devra se reporter à l'étude des fonctions  $S(r)$  et  $D(r)$  pour  $r = \infty$ , puisque  $t$  et  $y$  se réduisent à ces formes (93).

Puisque  $T$ , et  $Y_\infty$ , à partir du point  $V_0$ , vitesse finie, sont toujours finis, on peut, d'un coup, considérer la trajectoire entière et appelant  $T_2^g$  la durée totale et  $Y_2^g$  l'ordonnée totale de la trajectoire depuis  $r = \infty$  jusqu'à  $r = 0$ , on dira :

$T_2^g$  sera *fini*, si  $n_\infty > 1$ , et *infini*, si  $n_\infty \leq 1$  ;

$Y_2^g$  sera *fini*, si  $n_\infty > 2$ , et *infini*, si  $n_\infty \leq 2$ .

On peut donc dire, avec de Saint-Robert : « Il en résulte que si la résistance de l'air suit une loi d'un degré supérieur au carré de la vitesse, il pourrait, suivant la grandeur du coefficient balistique, y avoir, entre les bornes mêmes de l'atmosphère terrestre, une hauteur limite au delà de laquelle nos armes à feu ne pourraient plus lancer de projectiles, tout en admettant des moyens de projections très puissants et même capables d'imprimer au projectile une vitesse initiale infinie. »

**119. Fonctions balistiques du mouvement vertical ascendant.** Nous pouvons poser,  $V$  étant une vitesse arbitraire :

$$\Sigma_V(r, c) = - \int_V^r \frac{dr}{cF(r) + g}$$

et écrire alors

$$t = \Sigma_V^r - \Sigma_{V_0}^V.$$

Mais, pour la vitesse arbitraire  $V$ , on peut prendre ici  $V = 0$ , puisque nous avons vu que  $T_r$  n'était jamais infini. De même pour l'ordonnée  $y$ . Prenons donc comme définition des deux fonctions balistiques

$$\Sigma_0^r(v, c) \quad \text{ou} \quad \Sigma_0^v = - \int_0^v \frac{dv}{cF(v) + g},$$

$$\Delta_0^r(v, c) \quad \text{ou} \quad \Delta_0^v = - \int_0^v \frac{v \, dv}{cF(v) + g};$$

on aura

$$t = \Sigma(v) - \Sigma(V_0), \quad y = \Delta(v) - \Delta(V_0).$$

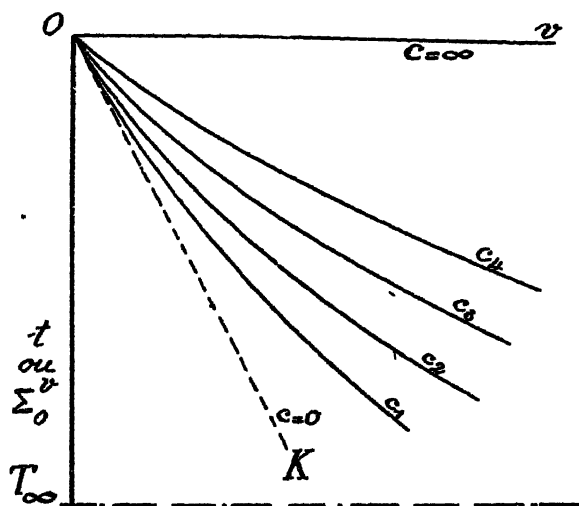
Moyennant le calcul fait, une fois pour toutes, des tables des fonctions  $\Sigma(v, c)$ ,  $\Delta(v, c)$ , en partant de la fonction  $F(v)$  expérimentale, on aura la possibilité de résoudre numériquement les problèmes du tir *vertical de bas en haut*.

Ces tables sont à double entrée, ayant pour arguments  $v$  et  $c$ .

120. **Fonction  $\Sigma(v, c)$ .** — Représentons graphiquement la table à double entrée ( $v$  et  $c$ ) des fonctions  $\Sigma_v^v$ . Nous porterons en abscisse la vitesse  $v$  et en ordonnée le temps  $t$  ou la fonction  $\Sigma_v^v$ .

Nous aurons, dans le plan, un réseau de courbes correspondant à des

Fig. 137.



valeurs déterminées du *coefficient balistique*. Pour  $c = 0$ , la courbe se réduit à  $t = \frac{v}{g}$ ; c'est une droite OK.

Comme on a  $\frac{dt}{dv} = -\frac{1}{cF(v) + g}$ , on voit qu'une courbe  $c$  quelconque (à moins que  $n_0 = 0$ ) a, pour tangente en O, la même droite OK et que, pour  $v = \infty$ , on a  $\frac{dt}{dv} = 0$  (à moins que  $n_\infty = 0$ ); les courbes auront donc, en général, une forme parabolique à courbure tournée vers l'axe des  $v$ ; elles s'étendront jusqu'à l'infini si  $T_\infty = \infty$  ( $n_\infty \leq 1$ ). Si  $T_\infty$  est fini ( $n_\infty > 1$ ), il existe une asymptote horizontale, spéciale pour chaque courbe  $c$ .

Pour  $c = \infty$ , la courbe se confond avec l'axe des  $v$ .

À partir d'une certaine valeur  $v$ , pour chaque courbe, suffisamment grande pour que, jusqu'à  $v = \infty$ , la gravité  $g$  soit négligeable devant  $cF(v)$ , la courbe  $\Sigma(v, c)$  devient assimilable à la courbe  $\frac{S(v)}{c}$ .

121. **Fonction  $\Delta(v, c)$ .** — Le même procédé de représentation étant employé, les courbes se répartissent entre la parabole  $y = -\frac{v^2}{2g}$ , qui correspond à  $c = 0$ , et l'axe des  $v$ . Les tangentes seront données par la formule

$$\frac{dy}{dv} = -\frac{v}{cF(v) + g};$$

la tangente en O est toujours horizontale.

Pour les vitesses tendant vers l'infini, les courbes  $(v, y)$  tendent vers la fonction  $\frac{D(v)}{c}$ . La direction à l'infini est l'axe des  $v$ , si  $n_\infty = 1$ , et l'axe des  $y$ , si  $n_\infty < 1$ .

Pour  $n_\infty = 1$ , on a une asymptote inclinée.

Fig. 138.

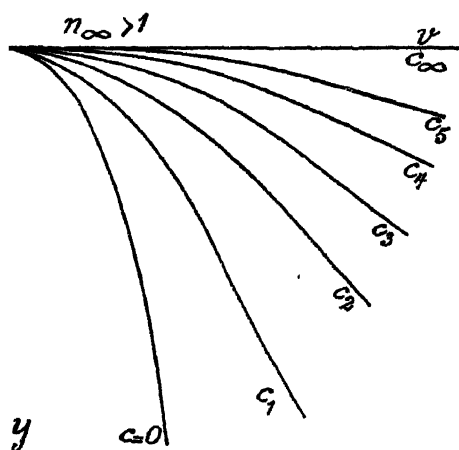
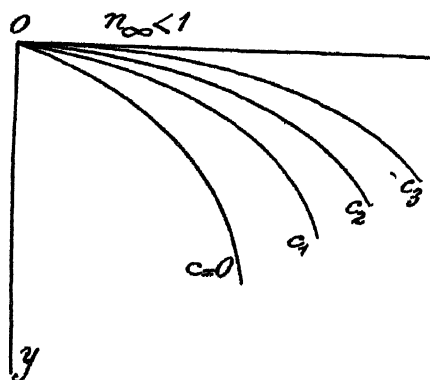


Fig. 139.



Dans le cas de  $n_\infty = 2$ , il existe une asymptote horizontale correspondant à la valeur finie  $V_\infty^0$ .

Les points d'inflexion de la courbe  $(v, y)$  sont définis en faisant  $\frac{d^2y}{dv^2} = 0$ . On a

$$\frac{d^2y}{dv^2} = -\frac{g + c(F - vF')}{(cF + g)^2}$$

et les points d'inflexion sont les racines de l'équation

$$g + c(F - vF') = 0 \quad \text{ou encore} \quad cF(r) = \frac{g}{n-1}.$$

Il ne peut y avoir de point d'inflexion que si  $n > 1$ . Il y en aura autant que cette relation pourra être satisfaite de fois.

Dans le cas où la courbure de la branche infinie est vers l'axe des  $v$ , ( $n > 1$ ), il y a toujours au moins un point d'inflexion, la relation  $cF(r) = \frac{g}{n-1}$  pouvant toujours être satisfaite.

**122. Arrêt du projectile.** - « A l'instant où  $v = 0$ , la résistance, en vertu de sa nature, cesse d'agir, et le mobile, qui n'est plus sollicité que par la pesanteur, tend à descendre et descendra effectivement si la résistance, qui reprend son action dans le sens opposé, peut être vaincue par le poids relatif du mobile.

» Arrivé donc à sa plus grande hauteur, le mobile retombera si  $cF(r)$ , qui exprime la résistance, acquiert, pour  $v = 0$ , une valeur inférieure à  $g$ ; il s'arrêtera, au contraire, si pour  $v = 0$ , elle prend une valeur  $g$ . » (De Saint-Robert.)

Ce dernier cas ne peut se produire évidemment que si  $F(r)$  contient un terme indépendant de  $v$ , donnant naissance à une résistance de frottement. La suspension presque indéfinie dans l'air des corpuscules très légers s'explique par le fait de la grandeur du coefficient balistique de ces objets et de la présence, dans  $F(r)$ , d'un terme de frottement de l'air, aussi petit qu'on voudra, si  $c$  est suffisamment grand, c'est-à-dire si le poids de l'objet est suffisamment petit.

## II. — MOUVEMENT VERTICAL DESCENDANT.

**123. Mouvement vertical descendant dans le vide.** On prendra pour axe positif des  $y$ , la verticale dirigée de haut en bas, c'est-à-dire dans le sens du mouvement; la vitesse initiale est  $V_0$ .

De l'équation différentielle  $\frac{d^2y}{dt^2} = g$ , on déduira alors les deux systèmes suivants de trois équations entre les variables  $v$ ,  $y$  et  $t$  :

$$(1) \quad \begin{cases} v = V_0 + gt, \\ y = V_0 t + \frac{1}{2} g t^2, \\ y = \frac{v^2 - V_0^2}{2g}; \end{cases} \quad (1) \quad \begin{cases} t = \frac{v - V_0}{g}, \\ v = \sqrt{V_0^2 + 2gy}, \\ t = \frac{V_0 + \sqrt{V_0^2 + 2gy}}{g}. \end{cases}$$



On remarque que ces équations se déduiront de celles du mouvement ascendant en changeant  $g$  en  $(-g)$  (117). Elles sont les mêmes que celles du n° 22, si l'on remarque que le sens positif des  $y$  n'est pas le même dans les deux groupes.

Par analogie avec la *trajectoire zénithale* du n° 117, les formules ci-dessus du *mouvement descendant* correspondent à la *trajectoire nadirale* ( $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ ) de la famille des trajectoires  $V_0 = \text{const.}$

**124. Équations du mouvement vertical descendant dans l'air.** — Adoptant la même convention que ci-dessus, c'est-à-dire comptant les ordonnées  $y$  positivement de haut en bas, dans le sens du mouvement, l'équation différentielle dans l'air s'écrira

$$\frac{dv}{dt} = -cF(v) + g.$$

On intégrera aisément et le temps  $t$  sera donné par la formule

$$t = - \int_{V_0}^v \frac{dv}{cF(v) - g}.$$

On a  $t = 0$ , pour  $v = V_0$ .

L'ordonnée sera donnée par l'intégrale

$$y = - \int_{V_0}^v \frac{v dv}{cF(v) - g}.$$

On remarquera qu'on passe du mouvement ascendant au mouvement descendant en changeant  $g$  en  $(-g)$  dans les intégrales.

**125. Théorème de la vitesse terminale (Huygens).** — *Quand  $t$  croît indéfiniment, la vitesse du projectile tend vers une limite finie  $V'$ .*

La vitesse  $v$  croîtra ou décroîtra suivant le signe de la dérivée  $\frac{dv}{dt} = -cF(v) + g$ ; elle pourra donc passer pour un maximum ou un minimum définis par une vitesse  $V'$  telle que  $cF(V') = g$ .

Posons, au voisinage de cette vitesse  $V'$ , l'identité  $v = V' - (V' - v)$ . Par hypothèse  $(V' - v)$  est une petite quantité. On écrira

$$t = \int_{V_0}^v \frac{d(V' - v)}{cF[V' - (V' - v)] - g}.$$

Le point  $V'$  étant un point quelconque de la fonction  $F(v)$ , celle-ci est développable, autour de ce point, par la formule de Taylor; si on la

réduit à ses deux premiers termes,  $cF(V')$  disparaît comme égal à  $g$  et il reste

$$t = \frac{-1}{cF'(V')} \int_{V_0}^{V'} \frac{d(V'-v)}{V'-v} = \frac{1}{cF'(V')} \log \frac{V'-V_0}{V'-v}.$$

Quand  $v$  tend vers  $V'$ , le second membre tend vers l'infini positif; le temps  $t$  devient donc infini.

Pour l'ordonnée  $y$ , on trouvera, par le même procédé,

$$y = \frac{1}{cF'(V')} \left( v - V_0 + V' \log \frac{V'-V_0}{V'-v} \right),$$

et  $y$  tend également vers l'infini positif quand  $v$  tend vers  $V'$ .

Ainsi donc, la vitesse  $V'$ , qui est telle que  $cF(V') = g$ , ne peut être atteinte qu'au bout d'un temps et après un parcours infinis.

On désigne la vitesse  $V'$  sous le nom de *vitesse terminale*; c'est la vitesse qui correspond à l'équilibre des forces qui agissent sur le projectile, accéléré d'une part par son poids, retardé d'autre part par la résistance de l'air. Elle est définie par l'équation  $cF(V') = g$ .

« Un corps, en tombant à travers l'air, augmente continuellement sa vitesse, mais toutefois en sorte qu'il n'en peut jamais excéder ni même atteindre un certain degré, qui est la vitesse qu'il faudrait à l'air souffler de bas en haut, pour tenir le corps suspendu sans pouvoir descendre, car alors la force de l'air contre ce corps égale sa pesanteur. J'appelle cette vitesse, pour chaque corps, la *vitesse terminale*. » (Huygens.)

Remarquons que la connaissance de la vitesse terminale  $V'$  équivaut à la connaissance du coefficient balistique du projectile.

*Cas d'exception.* — La démonstration précédente suppose que la vitesse  $V'$  est différente de zéro et de l'infini.

1<sup>o</sup> Si  $V' = 0$ , il faut qu'on ait, pour les valeurs de  $v$  s'approchant de zéro,  $\frac{dv}{dt} < 0$ , c'est-à-dire  $cF(0) > g$ .

Donc, la fonction  $F(v)$  doit contenir un terme de frottement et être de la forme  $F(v) = B_0 + B_n v^n$ , au voisinage de la valeur  $v = 0$ .

Posons  $cB_0 = b_0$ ; si  $b_0 < g$ , la vitesse *terminale* est nulle.

Mais, dans ce cas, ni le *temps* ni l'*ordonnée* ne deviendront infinis quand le projectile s'arrêtera. On pourra, en effet, écrire l'équation du mouvement

$$\frac{dv}{dt} = -(b_0 - g) - b_n v^n.$$

Donc, si  $b_0 < g$ , on se trouve dans le cas du *mouvement ascendant* (118), la gravité  $g$  étant remplacée par  $(b_0 - g)$ .

Le projectile s'arrêtera donc, la résistance de frottement du milieu étant supérieure au poids. Si le projectile avait été lancé de haut en bas, il ne serait pas retombé (122).

2° Si  $V' = \infty$ , il faut qu'on ait, pour les valeurs de  $v$  s'approchant de l'infini  $\frac{dv}{dt} > 0$ , c'est-à-dire  $cF(\infty) < g$ .

Donc la fonction  $F(v)$  doit, pour  $v = \infty$ , tendre vers une limite  $B_0$ , telle que  $cB_0 < g$  ou  $b_0 < g$ .

Alors le temps et l'ordonnée sont infinis comme dans le vide, la gravité  $g$  étant devenue ( $g - b_0$ ).

**126. Discussion du mouvement vertical descendant.** — On peut maintenant discuter complètement le mouvement; pour cela, distinguons trois cas :

*Premier cas.* — On a  $V_0 < V'$ .

À l'origine du mouvement, le second membre de l'équation  $\frac{dv}{dt}$ , qu'on peut écrire  $\frac{dv}{dt} = -c[F(v) - F(V')]$ , sera positif.

La vitesse  $v$  croîtra jusqu'à l'annulation de la dérivée, ce qui aura lieu pour  $v = V'$ , au bout d'un temps infini et après un parcours infini.

*Deuxième cas.* — On a  $V_0 > V'$ .

Dans cette hypothèse,  $\left(\frac{dv}{dt}\right)_0$  est négatif. La vitesse décroît, jusqu'à la vitesse terminale, qui peut être nulle. Excepté dans ce dernier cas, le temps et l'ordonnée sont infinis.

*Troisième cas.* — On a  $V_0 = V'$ .

Dans ce cas, le mouvement est rigoureusement uniforme.

*Corollaire.* — Ainsi, quand on se donnera la vitesse  $v$  d'un mobile tombant verticalement dans l'air, si  $v < V'$ , il existe un point en amont d'où est parti le projectile avec une vitesse nulle.

Si, au contraire,  $v > V'$ , le projectile a été lancé avec une vitesse infinie d'un certain point en amont et les propriétés de ce point ( $T_\infty$  et  $Y_\infty$ ) dépendent des valeurs limites, pour  $v = \infty$ , des intégrales  $S(v)$  et  $D(v)$ .

**127. Fonctions balistiques du mouvement vertical descendant.** — En posant,  $V$  étant une vitesse arbitraire quelconque :

$$\overline{\Sigma}(v, c) \quad \text{ou} \quad \overline{\Sigma} = - \int_v^\infty \frac{dv}{cF(v) - g}, \quad \nabla(v, c) \quad \text{ou} \quad \nabla = - \int_v^\infty \frac{v dv}{cF(v) - g},$$

on écrira

$$t = \mathfrak{Z}(v, c) - \mathfrak{Z}(V_0, c), \quad x = \nabla(v, c) - \nabla(V_0, c).$$

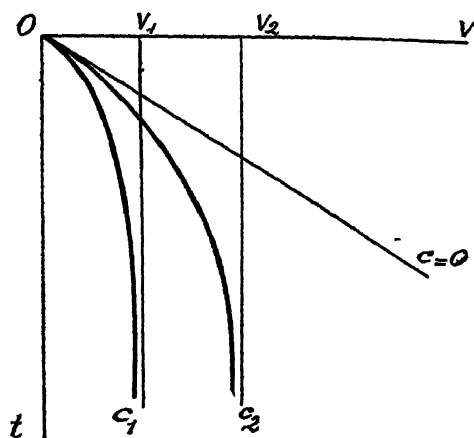
On pourra donc calculer, avec la fonction expérimentale  $F(v)$ , les tables à double entrée  $(v, t)$  et  $(v, x)$  des intégrales  $\mathfrak{Z}$  et  $\nabla$  pour diverses valeurs du coefficient balistique  $c$ .

*Fonction  $\mathfrak{Z}(v, c)$ .* - Si l'on suppose qu'on a  $V_0 < V'$ , on trouvera toujours, ainsi qu'on l'a dit au corollaire précédent, une vitesse nulle, en amont de  $V_0$ . Prenons donc cette vitesse pour origine commune. Toutes les courbes  $(t, v)$  ont, pour tangente commune à l'origine la droite  $t = \frac{v}{g}$  (si  $n_0 > 0$ ) qui correspond à  $c = 0$ .

Elles ont toutes une asymptote verticale pour la valeur  $V'$  telle que  $cF(V') = g$  (si  $n_\infty > 0$ ).

Mais, pour le cas où l'on a  $V_0 > V'$ , on doit choisir arbitrairement la

Fig. 140.



vitesse  $V$ . Si cette vitesse  $V$  est commune à toutes les intégrales, les tables ne sont valables que pour les valeurs de  $V' = V$ .

On pourra, pour les figurer toutes, choisir, par exemple, pour chaque intégrale, la limite  $V = 2V'$ .

La figure ci-dessous indiquera la forme des courbes  $(v, t)$ . En amont de  $V$ , les propriétés des courbes sont celles de la fonction  $\frac{\mathbf{S}(v)}{c}$ .

*Remarque.* -- Si l'on veut représenter graphiquement tous les mouvements verticaux (ascendants et descendants) possibles d'un projectile,

Fig. 111.

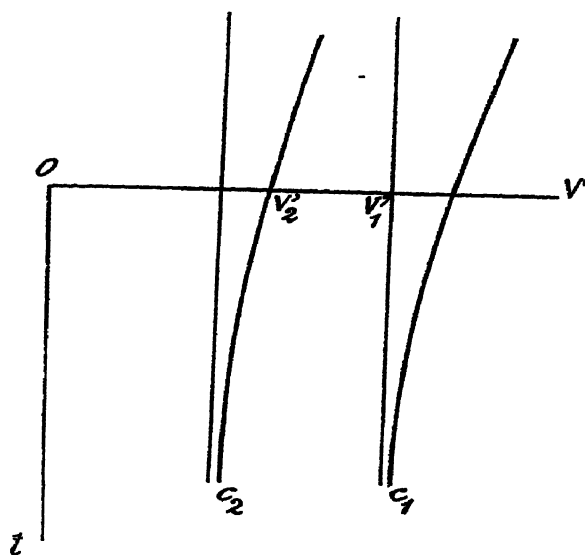
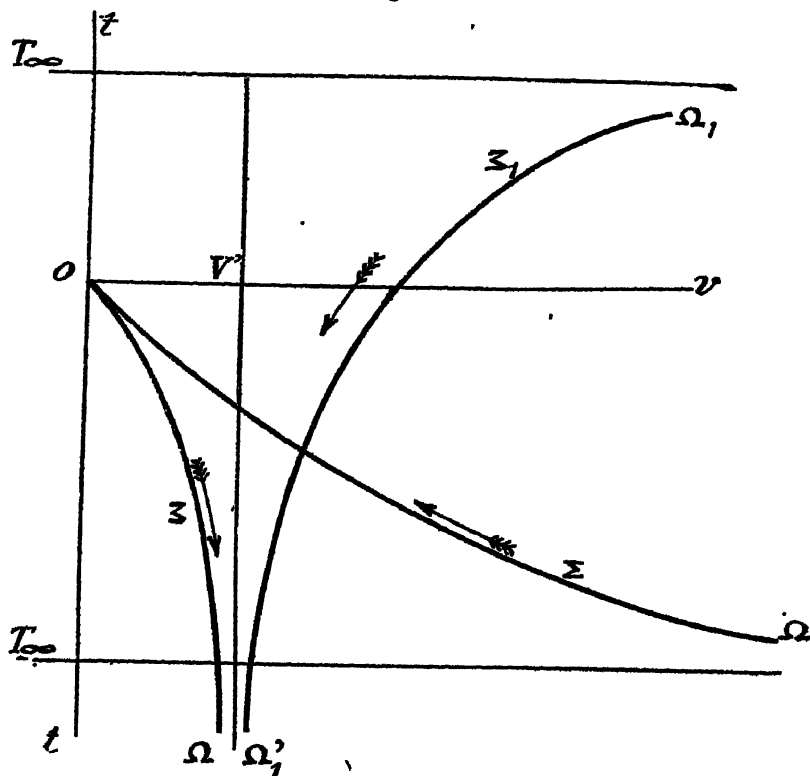


Fig. 112.

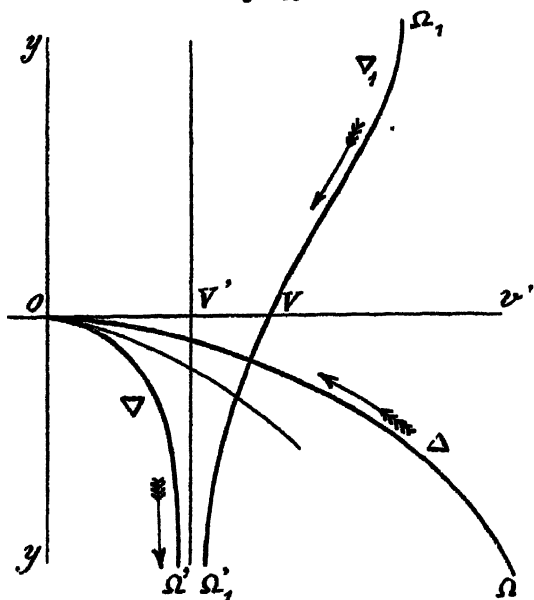




cale  $V'$ . Enfin, la courbe  $\Omega, \Omega'_1(\nabla_1)$  représente la fonction dans le cas de  $V_0 > V'$ .

Les courbes  $(y, v)$  du mouvement descendant peuvent présenter des points d'inflexion pour les points où la fonction  $F(v)$  est telle que

Fig. 144.



$cF(v) = \frac{g}{1-n}$  sur la branche  $\Omega O$  et sur la branche  $\Omega, \Omega'_1$ . Donc, d'abord il faut que  $n < 1$ . D'autre part, on devra avoir, dans cette hypothèse,  $cF(v) > g$ ; donc  $v > V'$ .

Ainsi, sur la branche  $O\Omega'$ , il ne peut jamais exister de point d'inflexion : il peut en exister sur la branche  $\Omega, \Omega'_1$ .

Les points d'inflexion sur les branches  $O\Omega$  et  $\Omega, \Omega'_1$  s'excluent mutuellement.

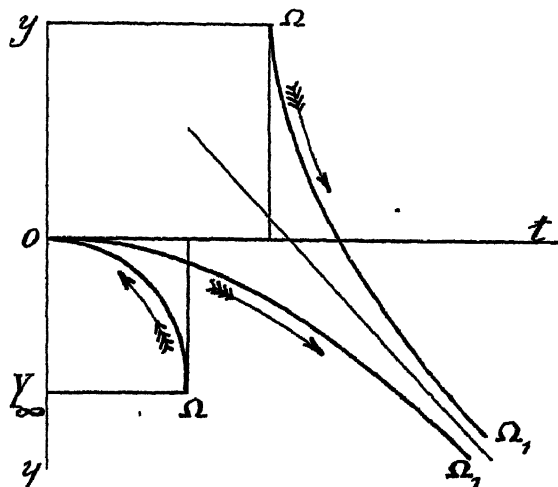
**129. Courbe  $(y, t)$ .** — La courbe  $(y, t)$  pour le mouvement ascendant, qu'on obtiendrait en éliminant  $v$  entre les deux intégrales  $\Sigma(v)$  et  $\Delta(v)$ , jouit, au point  $\Omega$ , des mêmes propriétés que la courbe  $(x, t)$  du mouvement horizontal (99). Elle admet une tangente verticale, à l'infini ou non, suivant le cas. Elle vient finir au sommet horizontalement.

La courbe du *mouvement descendant* part de ce sommet et admet une asymptote inclinée de  $V'$ . Pour démontrer que cette asymptote est

toujours à distance finie, on formera la différence

$$y - V't = - \int_{V_0}^v \frac{dv}{cF - g} (v - V'),$$

Fig. 145.



et, pour  $v$  devenant voisin de  $V'$ , on développera la fonction  $F$  par la formule de Taylor

$$F = F(V') - (V' - v)F'(V') + \dots,$$

et comme, au point  $V'$ , on a  $cF(V') = g$ , il restera

$$y - V't = - \int_{V_0}^v \frac{dv}{cF'(V')} + \dots = \frac{V_0 - V'}{cF'(V')},$$

qui est une quantité finie.

Une branche sans sommet correspondra au cas de  $V_0 > V'$ .

La figure 145 représente le cas de  $n_\infty > 2$ .

### III. — CAS PARTICULIERS.

130. **Résistance monome.** --- 1<sup>re</sup> *Formules générales.* — Soit  $F(v) = B_n v^n$  la loi monome de résistance de l'air. Nous poserons  $CB_n = b_n$ ; nous aurons alors les équations :

*Mouvement ascendant :*

$$gt = - \int_{V_0}^v \frac{dv}{1 + \frac{b_n v^n}{g}},$$

$$gy = - \int_{V_0}^v \frac{v dv}{1 + \frac{b_n v^n}{g}};$$



*Mouvement descendant :*

$$gt = - \int_{v_0}^v \frac{dv}{1 - \frac{b_n v^n}{g}},$$

$$gy = - \int_{v_0}^v \frac{v dv}{1 - \frac{b_n v^n}{g}}.$$

Ces équations sont intégrables pour toutes les valeurs entières de  $n$ , à condition qu'on puisse résoudre l'équation binôme

$$1 \pm \frac{b_n v^n}{g} = 0.$$

Soit  $V'$  la vitesse terminale, telle, par conséquent, que  $b_n V'^n = g$ . En introduisant le rapport  $v = \frac{V'}{v}$  dans les équations, on pourra les mettre sous la forme suivante :

*Mouvement ascendant :*

$$\frac{gt}{V'} = - \int_{v_0}^v \frac{dv}{1 + v^n},$$

$$\frac{gy}{V'^2} = - \int_{v_0}^v \frac{v dv}{1 + v^n};$$

*Mouvement descendant :*

$$\frac{gt}{V'} = \int_{v_0}^v \frac{dv}{1 - v^n},$$

$$\frac{gy}{V'^2} = \int_{v_0}^v \frac{v dv}{1 - v^n}.$$

Les seconds membres sont des quantités purement numériques, dont il serait aisé de calculer, une fois pour toutes, des Tables, l'exposant  $n$  étant donné. On voit que, dans ce cas particulier, ces Tables sont à simple entrée, la variable  $v$ .

Si l'on pose, pour le mouvement ascendant,  $v^n = \tan^2 \zeta$ , et pour le mouvement descendant  $v^n = \sin^2 \zeta$ , on ramène les équations à des types connus en Analyse :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{gt}{V'} = - \frac{2}{n} \int_{\zeta_0}^{\zeta} (\tan \zeta)^{\frac{2-n}{n}} d\zeta, \\ \frac{gy}{V'^2} = - \frac{2}{n} \int_{\zeta_0}^{\zeta} (\tan \zeta)^{\frac{1-n}{n}} d\zeta; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{gt}{V'} = \frac{2}{n} \int_{\zeta_0}^{\zeta} (\sin \zeta)^{\frac{2-n}{n}} \frac{d\zeta}{\cos \zeta}, \\ \frac{gy}{V'^2} = \frac{2}{n} \int_{\zeta_0}^{\zeta} (\sin \zeta)^{\frac{1-n}{n}} \frac{d\zeta}{\cos \zeta}. \end{array} \right.$$

2° *Trajectoire totale.* — Soient, dans le cas d'une résistance

monome,  $T_{\infty}^0$  le temps et  $Y_{\infty}^0$  l'ordonnée correspondant, dans le mouvement ascendant, à la trajectoire totale, de  $V_0 = \infty$  à  $v = 0$ .

On aura

$$\frac{g T_{\infty}^0}{V'} = \int_0^{\infty} \frac{dv}{1+v^n}, \quad \frac{g Y_{\infty}^0}{V'} = \int_0^{\infty} \frac{v dv}{1+v^n}.$$

Posons

$$v^n = \zeta, \quad \text{d'où} \quad dv = \frac{1}{n} \zeta^{\frac{1}{n}-1} d\zeta;$$

il viendra alors

$$\frac{n g T_{\infty}^0}{V'} = \int_0^{\infty} \frac{\zeta^{\frac{1}{n}-2}}{1+\zeta} d\zeta, \quad \frac{n g Y_{\infty}^0}{V'^2} = \int_0^{\infty} \frac{\zeta^{\frac{2}{n}-1}}{1+\zeta} d\zeta.$$

Mais un théorème connu d'Analyse (voir HUMBERT, *Cours d'Analyse*, t. II, p. 167) démontre que,  $\alpha$  étant une constante positive, plus petite que 1, on a

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \alpha \pi}.$$

On trouve alors

$$T_{\infty}^0 = \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}} \frac{V'}{g}, \quad \text{lorsque } n > 1,$$

$$Y_{\infty}^0 = \frac{\pi}{n \sin \frac{2\pi}{n}} \frac{V'^2}{g}, \quad \text{lorsque } n > 2.$$

On a, par division,

$$V' \left( \frac{T}{Y} \right)_{\infty}^0 = 2 \cos \frac{\pi}{n}.$$

On sait que, si  $n > 1$ , le temps  $T_{\infty}^0$ , et si  $n \leq 2$ , l'ordonnée  $Y_{\infty}^0$  est infinie (118).

**131. Formules différentielles.** — Proposons-nous de rechercher quelles variations très petites ( $\partial t$ ,  $\partial g$ ,  $\partial v$ ) correspondent, en un point de la trajectoire verticale, aux petites variations des caractéristiques initiales ( $\partial V_0$ ,  $\partial b_n$ ,  $\partial g$ ) de la *vitesse initiale*  $V_0$ , du *coefficient balistique*  $b_n$  et de la *gravité*  $g$ .

On a  $\frac{g t}{V'} = - \int_{v_0}^v \frac{dv}{1+v^n}$  pour le temps, dans le mouvement ascendant.

On écrira alors

$$(1) \quad \frac{g t}{V'} \left( \frac{\partial t}{t} + \frac{\partial g}{g} - \frac{\partial V'}{V'} \right) = - \frac{\partial v}{1+v^n} + \frac{\partial v_0}{1+v_0^n}.$$

Mais  $v = \frac{v}{V'}$ ; donc

$$\frac{\partial v}{v} = \frac{\partial v}{v} - \frac{\partial V'}{V'} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v_0}{v_0} = \frac{\partial V_0}{V_0} - \frac{\partial V'}{V'}.$$

D'autre part, on a

$$b_n V''^n = g,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\partial b_n}{\partial n} - n \frac{\partial V'}{V} = \frac{\partial g}{g}.$$

On portera ces valeurs dans l'équation (1) et l'on réunira les termes semblables. On opérera de la même façon pour  $y$ , et aussi pour le mouvement descendant. On formera alors le Tableau suivant :

*Mouvement ascendant :*

$$\begin{aligned} g \, dt + \frac{\partial v}{1+v^n} &= \begin{cases} \frac{\partial V_0}{1+v_0^n}, \\ - \left( g t - \frac{V_0}{1+v_0^n} + \frac{v}{1+v^n} \right) \frac{\partial b_n}{n b_n}, \\ + \left[ (1-n) g t - \frac{V_0}{1+v_0^n} + \frac{v}{1+v^n} \right] \frac{\partial g}{n g}; \end{cases} \\ g \, dy + \frac{v \, \partial v}{1+v^n} &= \begin{cases} \frac{V_0 \partial V_0}{1+v_0^n}, \\ - \left( 2 g y - \frac{V_0^2}{1+v_0^n} + \frac{v^2}{1+v^n} \right) \frac{\partial b_n}{n b_n}, \\ + \left[ (1-n) g y - \frac{V_0^2}{1+v_0^n} + \frac{v^2}{1+v^n} \right] \frac{\partial g}{n g}; \end{cases} \end{aligned}$$

*Mouvement descendant :*

$$\begin{aligned} g \, dt - \frac{\partial v}{1-v^n} &= \begin{cases} - \frac{\partial V_0}{1-v_0^n}, \\ - \left( g t + \frac{V_0}{1-v_0^n} - \frac{v}{1-v^n} \right) \frac{\partial b_n}{n b_n}, \\ + \left[ (1-n) g t + \frac{V_0}{1-v_0^n} - \frac{v}{1-v^n} \right] \frac{\partial g}{n g}; \end{cases} \\ g \, dy - \frac{v \, \partial v}{1-v^n} &= \begin{cases} - \frac{V_0 \partial V_0}{1-v_0^n}, \\ - \left( 2 g y + \frac{V_0^2}{1-v_0^n} - \frac{v^2}{1-v^n} \right) \frac{\partial b_n}{n b_n}, \\ + \left[ (1-n) g y + \frac{V_0^2}{1-v_0^n} - \frac{v^2}{1-v^n} \right] \frac{\partial g}{n g}. \end{cases} \end{aligned}$$

Dans les premiers membres des équations, se trouvent les variations finales de l'élément de la trajectoire; dans les seconds membres, on a les variations initiales.

Donc, sitôt qu'on se donnera l'une d'elles, ou une relation entre ces trois variations, les deux autres seront déterminées.

Ainsi, pour les variations des éléments du sommet, on fera dans le premier groupe :  $v = 0$  et  $dv = 0$ . On trouvera :

$$\begin{aligned} g \partial T_s &= \frac{\partial V_0}{1 + v_0^2} - \left( g T_s - \frac{V_0}{1 + v_0^2} \right) \frac{\partial b_n}{n b_n} + \left[ (1 - n) g T_s - \frac{V_0}{1 + v_0^2} \right] \frac{\partial g}{n g}, \\ g \partial Y_s &= \frac{V_0 \partial V_0}{1 + v_0^2} - \left( 2 g Y_s - \frac{V_0^2}{1 + v_0^2} \right) \frac{\partial b_n}{n b_n} + \left[ (2 - n) g Y_s - \frac{V_0^2}{1 + v_0^2} \right] \frac{\partial g}{n g}. \end{aligned}$$

On peut alors traiter des problèmes tels que le suivant :

*Quelles sont les variations du sommet et du point de chute dues à une variation  $\partial V_0$  de la vitesse initiale ?*

On a d'abord, d'après les formules ci-dessus, pour le sommet :

$$g \partial T_s = \frac{\partial V_0}{1 + v_0^2}, \quad g \partial Y_s = \frac{V_0 \partial V_0}{1 + v_0^2}.$$

Prenons le mouvement descendant, qui se réduit au seul premier membre. On aura

$$\begin{aligned} \frac{V_\omega \partial V_\omega}{1 - v_\omega^2} &= \frac{V_0 \partial V_0}{1 + v_0^2}, \\ g \partial T_\omega &= \frac{V_0}{V_\omega} \frac{\partial V_0}{1 + v_0^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'augmentation du temps total est

$$g \partial T = \left( 1 + \frac{V_0}{V_\omega} \right) \frac{\partial V_0}{1 + v_0^2}.$$

On trouverait, par le même procédé, pour une variation  $\partial b_n$  du coefficient balistique :

*Sommet :*

$$\begin{aligned} g \partial T_s &= - \left( g T_s - \frac{V_0}{1 + v_0^2} \right) \frac{\partial b_n}{n b_n}, \\ g \partial Y_s &= - \left( 2 g Y_s - \frac{V_0^2}{1 + v_0^2} \right) \frac{\partial b_n}{n b_n}; \end{aligned}$$

*Point de chute :*

$$\begin{aligned} V_\omega \frac{\partial V_\omega}{2 - v_\omega^2} &= \left( \frac{V_0^2}{1 + v_0^2} - \frac{V_\omega^2}{1 - v_\omega^2} \right) \frac{\partial b_n}{n b_n}, \\ g \partial T_\omega &= - \frac{1}{V_\omega} \left( g T_\omega V_\omega - \frac{V_0^2}{1 + v_0^2} \right) \frac{\partial b_n}{n b_n}. \end{aligned}$$

Pour le temps total  $\partial T = \partial T_s + \partial T_\omega$ , on a

$$g \partial T = - \left[ g T_s - \frac{V_0}{1 + v_0^2} \left( 1 + \frac{V_0}{V_\omega} \right) \right] \frac{\partial b_n}{n b_n}.$$

*Remarques.* -- I. On obtiendra les mêmes expressions que celles du

Tableau précédemment donné en partant de la formule

$$gt = - \int_{v_0}^v \frac{dv}{1 + \frac{b_n}{g} v^n},$$

et, en différentiant sous le signe  $\int$ , on a

$$gt \left( \frac{\partial g}{g} + \frac{\partial t}{t} \right) = \partial \left( \frac{b_n}{g} \right) \int_{v_0}^v \frac{v^n dv}{\left( 1 + \frac{b_n}{g} v^n \right)^2} - \frac{\partial v}{1 + \frac{b_n}{g} v^n} + \frac{\partial V_0}{1 + \frac{b_n}{g} v^n}.$$

On écrira

$$\frac{v^n}{\left( 1 + \frac{b_n}{g} v^n \right)^2} = \frac{1}{n} \left[ \frac{1}{1 + \frac{b_n}{g} v^n} - \frac{1 + \frac{b_n}{g} (1-n) v^n}{\left( 1 + \frac{b_n}{g} v^n \right)^2} \right];$$

d'où

$$\int_{v_0}^v \frac{v^n dv}{\left( 1 + \frac{b_n}{g} v^n \right)^2} = -\frac{1}{n} gt - \frac{1}{n} \frac{v}{1 + \frac{b_n}{g} v^n} + \text{const.}$$

On retrouve ainsi la première formule du Tableau.

II. D'une manière générale, on a

$$\partial t = \partial g \int_{v_0}^v \frac{dv}{(g + cF)^2} + \partial c \int_{v_0}^v \frac{F dv}{(g + cF)^2} - \frac{g \partial v}{g + cF} + \frac{g \partial V_0}{g + cF_0},$$

$$\partial y = \partial g \int_{v_0}^v \frac{v dv}{(g + cF)^2} + \partial c \int_{v_0}^v \frac{v F dv}{(g + cF)^2} - \frac{g v \partial v}{g + cF} + \frac{g V_0 \partial V_0}{g + cF_0}.$$

III. Pour certains problèmes, on rencontrera les mêmes difficultés que celles signalées dans le cas du vide (22, 2°). Ainsi, à  $y$  constant, on trouvera

$$g \partial t = \left( 1 - \frac{v_0}{v} \right) \frac{\partial V_0}{1 + v_0^2},$$

qui n'est pas valable lorsqu'on fait  $v = 0$  (sommet).

La solution correcte s'obtiendra en conservant le second terme de la série qui exprime  $\partial V_0$  en fonction de  $\partial t$ .

**132. Résistance linéaire  $n = 1$ .** — Dans le cas où  $F(v) = B_1 v$ , on a  $b_1 V = g$ . Les formules s'intègrent et l'on a, avec  $v = \frac{v}{V}$  :

*Mouvement ascendant :*

$$\frac{gt}{V} = \log \frac{1 + v_0}{1 + v},$$

$$\frac{gy}{V^2} = v_0 - v - \log \frac{1 + v_0}{1 + v};$$

*Mouvement descendant :*

$$\frac{gt}{V'} = \log \frac{1-v_0}{1-v},$$

$$\frac{gY}{V'^2} = v_0 - v + \log \frac{1-v_0}{1-v}.$$

De ces relations, on peut, en éliminant  $v$ , déduire les équations entre  $y$  et  $t$ ; ce sont les suivantes :

$$b_1 y = (V_0 + V')(1 - e^{-b_1 t}) - gt, \quad b_1 y = (V_0 - V')(1 - e^{-b_1 t}) + gt.$$

Pour l'altitude maximum, on fera  $v = 0$  dans les équations du mouvement ascendant, et l'on aura

$$b_1 T = \log \frac{V_0 + V'}{V'}, \quad b_1 Y_s = V_0 - V' \log \frac{V_0 + V'}{V'}.$$

*Construction de Huygens.* — Sur l'axe  $Ov$  des vitesses  $v$  et sur l'axe vertical des  $\frac{gt}{V'}$ , construisons la logarithmique  $Oz$  dont l'équation est  $\frac{gt}{V'} = -\log(1-v)$ , qui représentera le mouvement descendant, sans vitesse initiale; elle est, en  $O$ , tangente à la bissectrice des axes et admet la verticale  $v = 1$  comme asymptote.

Comme on a  $\frac{gY}{V'^2} = -v + \frac{gt}{V'}$ , on en déduit que la longueur  $BC$  située entre la tangente initiale en  $O$  et la courbe est égale à  $\frac{gY}{V'^2}$ .

Le mouvement ascendant s'obtiendra par la considération de la même logarithmique prise du côté des  $v$  négatifs, puisque les formules du mouvement ascendant se déduisent de celles du mouvement descendant en changeant  $v$  en  $-v$ .

On aura encore, pour  $OA' = \frac{gt}{V'}$ , la longueur  $B'C' = \frac{gY}{V'^2}$ .

Donc, soit  $v_0$  la vitesse initiale avec laquelle un mobile est lancé de bas en haut; par  $B'$ , on mènera la parallèle  $B'B$  à la tangente initiale  $C'O$ ; elle coupe la logarithmique en  $B$  qui, puisque  $B'C' = BC$ , correspond au temps où le mobile retombe sur le sol.

Par suite, tous les problèmes dépendant de cette question seront graphiquement solubles.

*Temps de l'ascension :*

$$A'O = \frac{gT_s}{V'};$$

*Temps de la descente :*

$$OA = \frac{gT_w}{V'};$$

*Vitesse initiale :*

$$A'B' = \frac{V_0}{V'};$$

*Vitesse au point de chute :*

$$AB = \frac{V_\omega}{V'};$$

*Hauteur de l'ascension :*

$$B'C' = BC = \frac{g Y_s}{V'^2}.$$

Soit I le point de rencontre de B'B et de A'OA. On a

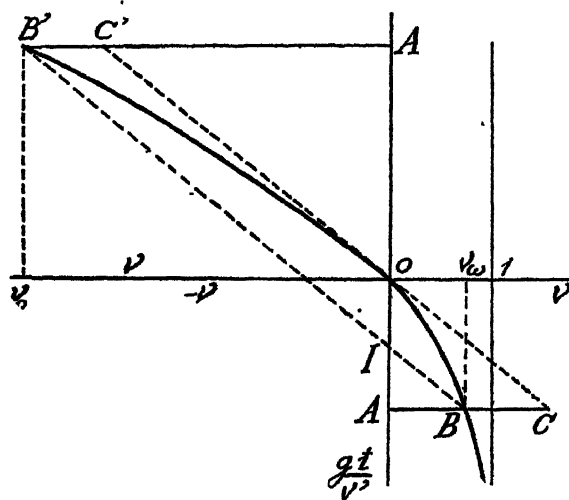
$$A'O + OI = A'B' = v_0.$$

Donc

$$A'I = \frac{V_0}{V'} = \frac{g\theta}{V'},$$

$\theta$  étant le temps d'ascension dans le vide.

Fig. 146.



Par suite, le point I correspond au temps de l'ascension dans le vide du mobile lancé de l'origine A' avec la même vitesse  $V_0$ . Les hauteurs d'ascension dans l'air et dans le vide sont donc dans le rapport du triangle curviligne B'A'O au triangle rectiligne A'B'I.

**133. Résistance quadratique.** — Si  $F(v) = B_2 v^2$ , on a  $b_2 V'^2 = g$ . Les formules sont les suivantes  $\left(v = \frac{v}{V'}\right)$ :

*Mouvement ascendant :*

$$b_2 V' t = \text{arc tang } v_0 - \text{arc tang } v,$$

$$b_2 y = \frac{1}{2} \log \frac{1 + v_0^2}{1 + v^2};$$

*Mouvement descendant :*

$$b_2 V' t = \frac{1}{2} \log \frac{1 + v}{1 - v} \frac{1 - v_0}{1 + v_0},$$

$$b_2 y = \frac{1}{2} \log \frac{1 - v_0^2}{1 - v^2}.$$

Posant  $b_2 V' t = t'$ , les relations entre  $y$  et  $t'$  sont :

$$2 b_2 y = \log \frac{V_0^2 + V'^2}{V'^2} \cos^2 \left( \text{arc tang } \frac{V_0}{V'} - t' \right), \quad 2 e^{b_2 y} = \frac{V_0 + V'}{V'} e^{t'} + \frac{V' - V_0}{V'} e^{-t'}.$$

L'altitude maximum ( $v = 0$  dans les équations du mouvement ascendant) sera donnée par les formules

$$b_2 V' T_s = \text{arc tang } \frac{V_0}{V'},$$

$$2 b_2 Y_s = \log \frac{V_0^2 + V'^2}{V'^2}.$$

1° On peut mettre les équations du mouvement sous la forme suivante, où  $v$  et  $y$  sont exprimés en fonction de  $t$  :

*Mouvement ascendant :*

$$\frac{v}{V'} = \frac{V_0 \cos t' - V' \sin t'}{V_0 \sin t' + V' \cos t'},$$

$$b_2 y = \log \left( \frac{V_0}{V'} \sin t' + \cos t' \right);$$

*Mouvement descendant :*

$$\frac{v}{V'} = \frac{(V' + V_0) e^{t'} - (V' - V_0) e^{-t'}}{(V' + V_0) e^{t'} + (V' - V_0) e^{-t'}},$$

$$b_2 y = \log \frac{1}{2} \left( \frac{V' + V_0}{V'} e^{t'} + \frac{V' - V_0}{V'} e^{-t'} \right).$$

2° Dans le mouvement ascendant, si l'on pose  $\text{tang } 2\theta = \frac{V'}{V_0} = \frac{1}{v_0}$ , on aura les formules

$$\frac{v}{V'} = \frac{\cos(2\theta + t')}{\sin(2\theta + t')}, \quad b_2 y = \log \frac{\sin(2\theta + t')}{\sin 2\theta}.$$

Posons, de plus,

$$\text{tang } 2\varphi = \frac{V'}{v} - \frac{1}{v};$$



on pourra mettre les formules précédentes sous la forme

$$b_2 V' t = 2(\varphi - \epsilon), \quad b_2 y = \log \frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\epsilon}.$$

3° Dans le *mouvement descendant*, on obtiendra des formules tout à fait analogues en employant les sinus et cosinus hyperboliques.

On a, par définition,

$$\operatorname{ch} t' = \frac{e^{t'} + e^{-t'}}{2}, \quad \operatorname{sh} t' = \frac{e^{t'} - e^{-t'}}{2}.$$

Les équations du *mouvement descendant* seront alors

$$\frac{v}{V'} = \frac{V' \operatorname{sh} t' + V_0 \operatorname{ch} t'}{V' \operatorname{ch} t' + V_0 \operatorname{sh} t'}, \quad b_2 y = \log \left( \operatorname{ch} t' + \frac{V_0}{V'} \operatorname{sh} t' \right).$$

Si l'on pose maintenant

$$\operatorname{tang} h_2 \epsilon_1 = \frac{V'}{V_0} = \frac{1}{v_0},$$

on aura

$$\frac{v}{V'} = \frac{\operatorname{ch}(2\epsilon_1 + t')}{\operatorname{sh}(2\epsilon_1 + t')}, \quad b_2 y = \log \frac{\operatorname{sh}(2\epsilon_1 + \epsilon_1 t')}{\operatorname{sh} 2\epsilon_1},$$

formules exactement symétriques de forme avec celles du mouvement ascendant.

En posant

$$\operatorname{tang} h_2 \varphi_1 = \frac{V'}{v} = \frac{1}{v},$$

on pourra encore écrire

$$b_2 V' t = 2(\varphi_1 - \epsilon_1), \quad b_2 y = \log \frac{\operatorname{sh} 2\varphi_1}{\operatorname{sh} 2\epsilon_1}.$$

4° Dans le *mouvement descendant sans vitesse initiale*, on a

$$v = V' \operatorname{tang} h t', \quad b_2 y = \log \operatorname{ch} t'$$

5° Enfin, dans le cas du *mouvement descendant*, on peut mettre les formules sous la forme suivante :

a. Si  $v > V'$ , posant  $\cos 2\psi = \frac{V'}{v} = \frac{1}{v}$ , on aura

$$b_2 V' t = \log \frac{\operatorname{tang} \psi_0}{\operatorname{tang} \psi}, \quad b_2 y = \log \frac{\operatorname{tang} 2\psi_0}{\operatorname{tang} 2\psi}.$$

b. Si  $v < V'$ , posant  $\cos 2\psi = \frac{v}{V'} = v$ , on aura

$$b_2 V' t = \log \frac{\operatorname{tang} \psi_0}{\operatorname{tang} \psi}, \quad b_2 y = \log \frac{\sin 2\psi_0}{\sin 2\psi}.$$

6° En employant l'angle  $\zeta$  défini au n° 130, on arrive encore à des formules très simples pour les deux mouvements.

**134. Théorèmes de Lambert.** — 1° *Relation entre les vitesses  $V_0$  de départ d'un mouvement ascendant et  $V_\omega$  de retombée sur le plan du point initial.* — Faisant  $v = 0$  dans l'équation du mouvement ascendant, on a

$$\frac{gY}{V'^2} = \frac{1}{2} \log(1 + v_0^2).$$

Faisant, d'autre part,  $v_0 = 0$  dans l'équation du mouvement descendant, on aura

$$\frac{gY_\omega}{V'^2} = \frac{1}{2} \log \frac{1}{1 - v_\omega^2}.$$

L'égalité supposée de  $Y_\omega$  et de  $Y$ , donne la relation

$$(1 + v_0^2)(1 - v_\omega^2) = 1.$$

Donc

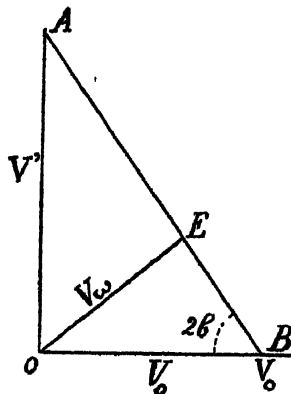
$$v_\omega^2 = \frac{v_0^2}{1 + v_0^2} \quad \text{et} \quad v_0^2 = \frac{v_\omega^2}{1 - v_\omega^2}.$$

Comme  $v_0 = \frac{V_0}{V'}$  et  $v_\omega = \frac{V_\omega}{V'}$ , on a les formules suivantes :

$$\frac{V_\omega}{V_0} = \frac{V'}{\sqrt{V'^2 + V_0^2}}, \quad \frac{V_0}{V_\omega} = \frac{V'}{\sqrt{V'^2 - V_\omega^2}}.$$

Ainsi, sur les deux côtés OA et OB d'un triangle rectangle, on por-

Fig. 147.



tera  $OA = V'$  et  $OB = V_0$ ; la hauteur OE représentera la vitesse de chute  $V_\omega$ .

La perte de force vive  $\mathfrak{E} = \frac{1}{2}m(V_0^2 - V_\omega^2)$  est donnée par la formule

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{2}m \frac{V_0^2}{V^2 + V_0^2}.$$

2° *Chemin total parcouru.* — Puisque  $\frac{gY_s}{V^2} = \frac{1}{2}\log(1 + v_0^2)$ , comme on a trouvé la relation  $1 + v_0^2 = \frac{v_0^2}{V_\omega^2}$ , on aura

$$\frac{gY_s}{V^2} = \log \frac{V_0}{V_\omega}.$$

En vertu de l'égalité  $b_2 V^2 = g$ , cette formule peut s'écrire

$$b_2 Y_s = \log \frac{V_0}{V_\omega}.$$

C'est la formule (99) de l'espace parcouru par un corps de coefficient balistique  $b_2$  dans le mouvement rectiligne horizontal, quand il passe de la vitesse initiale  $V_0$  à la vitesse restante  $V_\omega$ .

« Cette formule est assez remarquable en ce qu'elle nous met en état de comparer le mouvement vertical d'un corps avec son mouvement horizontal, car la vitesse initiale  $V_0$  est à la vitesse  $V_\omega$  qu'il a en retombant, dans le même rapport que si le corps dans le même milieu résistant avait parcouru la longueur  $Y_s$ . On en tire facilement la conséquence que, dans le cas où le corps monte et retombe, l'action de la gravité ne fait que redoubler le chemin parcouru et changer la direction du mouvement. » (Lambert.)

3° *Temps total.* — Dans la formule (133, 2°) du mouvement ascendant

$$\frac{v}{V'} = \cot(2\mathfrak{E} + \mathfrak{E}'),$$

où  $\tan 2\mathfrak{E} = \frac{V'}{V_0} = \frac{1}{v_0}$ , on aura, pour  $v = 0$ , l'expression

$$2\mathfrak{E} + \mathfrak{E}' = \frac{\pi}{2}.$$

Donc la durée totale de l'ascension sera

$$T_s = \frac{\pi - 4\mathfrak{E}}{2b_2 V'}.$$

Pour le mouvement descendant, on aura, en faisant  $V_0 = 0$  et  $v = V_\omega$ , la formule

$$\frac{V_\omega}{V'} = \frac{e^{\mathfrak{E}'} - e^{-\mathfrak{E}'}}{e^{\mathfrak{E}'} + e^{-\mathfrak{E}'}}.$$

On en tire

$$e^{2\theta'} = \frac{V' + V_{\omega}}{V' - V_{\omega}}.$$

Remplaçant  $\frac{V_{\omega}}{V'}$  par  $\frac{V_0}{\sqrt{V'^2 + V_0^2}} = \cos 2\theta$ , on aura

$$e^{2\theta'} = \frac{1 + \cos 2\theta}{1 - \cos 2\theta} = \cos \text{tang}^2 \theta.$$

On aura alors, pour le temps  $T_{\omega}$  de la chute, la formule

$$b_2 V' T_{\omega} = \log \cot \theta,$$

et, pour le temps total  $T = T_s + T_{\omega}$  de l'ascension et de la chute, la formule

$$b_2 V' T = \frac{\pi}{2} - 2\theta - \log \text{tang} \theta.$$

C'est la formule de Lambert.

4° *Hauteur de l'ascension.* — L'expression

$$b_2 y = \log \frac{\sin(2\theta + \theta')}{\sin 2\theta},$$

lorsqu'on y fait  $2\theta + \theta' = \frac{\pi}{2}$ , devient

$$b_2 Y_s = -\log \sin 2\theta.$$

Dans le triangle OAB, l'angle  $2\theta$  est l'angle en B. On a alors les relations suivantes :

$$\frac{V'}{V_0} = \text{tang} 2\theta, \quad \frac{V_{\omega}}{V_0} = \sin 2\theta, \quad \frac{V_{\omega}}{V'} = \cos 2\theta.$$

« Donc, le même arc  $2\theta$ , qui est tel que  $\text{tang} 2\theta = \frac{V'}{V_0}$  suffit pour trouver d'une manière fort facile, et la hauteur  $Y_s$ , et la somme des temps de la montée et de la descente, ou bien chaque séparément. » (Lambert.)

La perte de force vive s'exprimera par la formule

$$T = \frac{1}{2} m V_0^2 \cos^2 2\theta.$$

Elle est proportionnelle au carré de la ligne EB de la figure 147.

L'angle  $\theta$ , introduit dans cette théorie, sera souvent dit *angle  $\theta$  de Lambert*.

135. Problèmes divers sur la résistance quadratique. — 1° Soit  $\theta$  un intervalle de temps déterminé; soit  $u_1$  l'espace parcouru du temps  $(t_1 - \theta)$  au temps  $t_1$  et soit  $u_2$  l'espace parcouru du temps  $t_1$  au temps  $(t_1 + \theta)$ . La somme

$$e^{b_1 u_1} - e^{-b_1 u_2}$$

est une constante, quel que soit  $t_1$  et quel que soit le sens du mouvement. (M. d'Ocagne.)

On prendra l'époque  $t_1$  pour origine des temps et la position correspondante du mobile pour l'origine des espaces; il sera très facile d'éliminer la vitesse correspondante des équations qui donnent  $y = -u_1$  et  $y = -u_2$  pour  $t = \pm \theta$ : la somme cherchée est égale à  $2e^{b_1 u_1}$ , où  $u_1$  est l'espace parcouru dans le temps  $\theta$  en partant sans vitesse,  $u_2$  le chemin décrit pendant l'intervalle  $\theta$  qui précède l'arrêt du mobile. (De Saint-Germain.)

2° Un point pesant, sans vitesse initiale, tombe dans l'air d'une hauteur  $y_1$  sur un plan horizontal qui le fait rebondir avec sa vitesse d'incidence. On demande à quelle hauteur il s'élèvera après le  $m^{\text{ième}}$  bond, la résistance de l'air étant quadratique.

Soit  $H_1$  la hauteur initiale d'où tombe la bille, et généralement  $H_{m+1}$  la hauteur à laquelle elle s'élève après  $m$  réflexions.

L'équation différentielle du mouvement est

$$dy = \frac{v dv}{g - b_1 v^2}.$$

L'intégration donne

$$y = \frac{1}{2b_1} \log \frac{g}{g - b_1 v^2}$$

en observant que  $v$  et  $y$  sont nuls à l'instant où la chute commence. Ainsi la vitesse  $v_m$  du mobile, à l'instant du  $m^{\text{ième}}$  choc, vérifie l'équation

$$\frac{1}{2b_1} \log \frac{g}{g - b_1 v_m^2} = y_m;$$

d'où

$$(1) \quad \frac{b_1}{g} v_m^2 = 1 - e^{-2b_1 y_m}.$$

Considérons actuellement l'ascension qui suit ce  $m^{\text{ième}}$  choc, et désignons par  $y$  la hauteur du mobile au-dessus du plan.

Nous avons

$$v \frac{dv}{dy} = -g - b_1 v^2 \quad (\text{mouvement ascendant})$$

d'où

$$\frac{1}{2b_2} \log \left( 1 + \frac{b_2}{g} v^2 \right) = y_{m+1}.$$

Si l'on considère, en particulier, l'instant où l'ascension commence, on aura

$$\frac{1}{2b_2} \log \left( 1 + \frac{b_2}{g} v_m^2 \right) = y_{m+1}.$$

d'où

$$(2) \quad \frac{b_2}{g} v_m^2 = e^{2b_2 y_{m+1}} - 1.$$

Posons, pour abréger,

$$e^{2b_2 y_{m+1}} - 1 = v_{m+1}.$$

$$e^{2b_2 y_m} - 1 = v_m.$$

$$\dots\dots\dots$$

Alors les équations (1) et (2) nous donnent

$$\frac{1}{v_{m+1}} - \frac{1}{v_m} = 1,$$

$$\frac{1}{v_m} - \frac{1}{v_{m-1}} = 1,$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} = 1.$$

Ajoutons ces équations, il viendra

$$\frac{1}{v_{m+1}} - \frac{1}{v_1} = m;$$

d'où

$$v_{m+1} = \frac{v_1}{m v_1 + 1}.$$

Remplaçant  $v_{m+1}$  et  $v_1$  par leurs valeurs, on trouve

$$y_{m+1} = \frac{1}{2b_2} \log \frac{(m+1)e^{2b_2 y_1} - m}{me^{2b_2 y_1} - m + 1}.$$

Telle est la hauteur au  $m^{\text{ème}}$  bond.

Quand on suppose que la bille arrive d'une distance infinie  $y_1 = \infty$ , la valeur précédente se réduit à celle-ci :

$$y_{m+1} = \frac{1}{2b_2} \log \frac{m+1}{m}.$$

[Euler, *Mechan.*, t. I, p. 192 (d'après Jullien).]

3<sup>e</sup> Formule d'Euler. -- Soit le cas du mouvement descendant sans

vitesse initiale. On a alors

$$2e^{b_2 V} = e^{b_2 V'} + e^{-b_2 V'};$$

d'où

$$e^{2b_2 V'} - 2e^{b_2 V'} e^{b_2 V} + 1 = 0.$$

Posant  $e^{b_2 V'} = \zeta$ , on aura  $\zeta$  par l'équation

$$\zeta^2 - 2e^{b_2 V} \zeta + 1 = 0, \quad \text{d'où} \quad \zeta = e^{b_2 V'} = e^{b_2 V} (1 \pm \sqrt{1 - e^{-2b_2 V}}),$$

c'est-à-dire, avec le signe +,

$$b_2 V' t = b_2 y + \log(1 + \sqrt{1 - e^{-2b_2 V}}).$$

On écrira, identiquement,

$$b_2 V' t = b_2 y + \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{\phantom{x}}) + \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{\phantom{x}}) + \frac{1}{2} \log(1 - \sqrt{\phantom{x}}) - \frac{1}{2} \log(1 - \sqrt{\phantom{x}})$$

ou

$$b_2 V' t = b_2 y + \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sqrt{\phantom{x}}}{1 - \sqrt{\phantom{x}}} + \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{\phantom{x}})(1 - \sqrt{\phantom{x}}).$$

Or, ce dernier logarithme est  $1 - (1 - e^{-2b_2 V}) = e^{-2b_2 V}$ .

On a donc

$$b_2 V' t = b_2 y + \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sqrt{\phantom{x}}}{1 - \sqrt{\phantom{x}}} + \frac{1}{2} \log e^{-2b_2 V}.$$

Mais  $\log e^{-a} = -a$ ; donc

$$2b_2 V' t = \log \frac{1 + \sqrt{1 - e^{-2b_2 V}}}{1 - \sqrt{1 - e^{-2b_2 V}}}.$$

Telle est la formule d'Euler.

4° *Formule de Poisson.* - Même hypothèse que ci-dessus. Pour  $t$ , très grand, la formule qui donne  $y$  se réduit à

$$2e^{b_2 V} = e'';$$

d'où

$$y = b_2 V' t - \frac{1}{b_2} \log 2$$

5° *Un point pesant est placé dans un milieu homogène dont la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse. Soient  $t_1$  le temps nécessaire à ce point pour acquérir une vitesse  $v$  et  $t_2$  le temps qui lui serait nécessaire pour perdre cette même vitesse si on le lançait verticalement de bas en haut. Déterminer la relation qui existe entre les deux quantités  $t_1$  et  $t_2$ .*

On trouve

$$2b_2 V' t_1 = \log \tan \left( \frac{\pi}{4} + b_2 V' t_2 \right). \quad (\text{P. Julien}).$$

6° Un point pesant d'élasticité connue  $\tau$  tombe sur un plan horizontal, dans un milieu homogène, dont la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse; la vitesse initiale est nulle et la hauteur du point de départ au-dessus du plan est connue. Déterminer la longueur de tout le chemin qu'il doit parcourir avant d'arriver au repos.

Soient  $H$  la hauteur initiale et  $S$  la longueur cherchée: on a

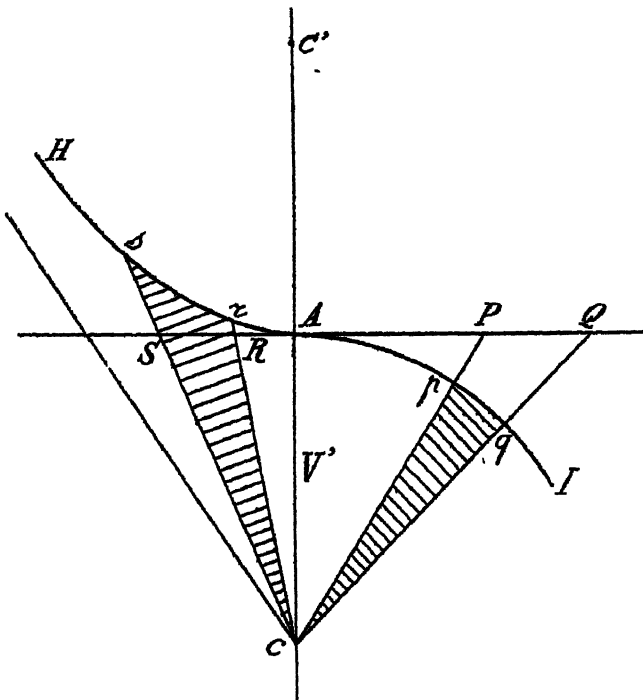
$$S = H + \frac{1}{b_2} \log \frac{1 - \tau^2 e^{-2b_2 H}}{1 - \tau^2}.$$

7° En deux points où les vitesses sont les mêmes,  $y_1$  dans le mouvement ascendant et  $y_2$  dans le mouvement descendant ( $y_1$  et  $y_2$  étant comptés à partir du sommet), on a la relation

$$2 = e^{2b_2 y_1} + e^{-2b_2 y_2}.$$

8° Soit, dans un système d'axes rectangulaires, pris  $AC = V'$ , et

Fig. 18.



deux courbes, la circonférence  $AI$  de centre  $C$ , de rayon  $V'$  et l'hyperbole équilatère  $AII$  de centre  $C'$  et de sommet  $A$ .



a. Prenons  $AQ = V_0$  et  $AP = v$ . *Démontrer que le temps, dans le mouvement ascendant, est donné par la formule*

$$t = 2 \frac{\text{sect. } cpq}{g \sqrt{v}};$$

b. Prenons  $AR = V_0$  et  $AS = v$ . *Démontrer que le temps, dans le mouvement descendant, est donné par la formule*

$$t = 2 \frac{\text{sect. } crs}{g \sqrt{v}} \quad (\text{Prony, Leçons de Méc. analyt., 1815.})$$

9° *Formules différentielles.* — Calculons les corrections qui seraient dues à de petites variations des caractéristiques ( $V_0$ ,  $g$ ,  $b_n$ ). Les formules du sommet sont celles du n° 131 (mouvement ascendant où l'on fera  $n = 2$ ) :

$$\begin{aligned} g \partial T_s &= \frac{\partial V_0}{1 + v_0^2}, & g \partial Y_s &= \frac{V_0 \partial V_0}{1 + v_0^2}, \\ g \partial T_s &= \left( g T_s - \frac{V_0}{1 + v_0^2} \right) \frac{\partial g}{2g}, & g \partial Y_s &= - \frac{V_0^2}{1 + v_0^2} \frac{\partial g}{2g}, \\ g \partial T_s &= \left( \frac{V_0}{1 + v_0^2} - g T_s \right) \frac{\partial b_2}{2b_2}; & g \partial Y_s &= \left( \frac{V_0^2}{1 + v_0^2} - 2g Y_s \right) \frac{\partial b_2}{2b_2}. \end{aligned}$$

Pour le point de chute, on a à calculer  $\partial V_\omega$  et  $\partial T$ .

On trouve les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_\omega}{V_\omega} &= \frac{1}{1 + v_0^2} \frac{\partial V_0}{V_0}, & g \partial T &= \frac{1 + \sqrt{1 + v_0^2}}{1 + v_0^2} \partial V_0, \\ \frac{\partial V_\omega}{V_\omega} &= \frac{v_0^2}{1 + v_0^2} \frac{\partial g}{2g}, & g \partial T &= - \left( g T + \frac{1 + \sqrt{1 + v_0^2}}{1 + v_0^2} V_0 \right) \frac{\partial g}{2g}, \\ \frac{\partial V_\omega}{V_\omega} &= - \frac{v_0^2}{1 + v_0^2} \frac{\partial b_2}{2b_2}; & g \partial T &= - \left( g T - \frac{1 + \sqrt{1 + v_0^2}}{1 + v_0^2} V_0 \right) \frac{\partial b_2}{2b_2}. \end{aligned}$$

Les formules de la première colonne sont déduites de la relation

$$v_\omega^2 = \frac{v_0^2}{1 + v_0^2}$$

et celles de la seconde colonne, de l'équation

$$b_2 V T = \frac{\pi}{2} - 2\theta - \log \tan \theta,$$

avec  $\tan 2\theta = \frac{1}{v_0}$ .

Ce sont des cas particuliers de celles du n° 131.

136. **Cas d'une résistance**  $cV(n) = b_0 + b_1 v + b_2 v^2$ . — On aura,

pour le mouvement ascendant :

$$dt = - \int_{v_0}^v \frac{dv}{g + b_0 + b_1 v + b_2 v^2}, \quad dx = - \int_{v_0}^v \frac{v dv}{g + b_0 + b_1 v + b_2 v^2},$$

ce qui ( $b_0$  étant supposé positif) conduira aux formules du n° 100, au remplacement près de  $b_0$  par  $(g + b_0)$ . Les deux cas sont distingués par  $(g + b_0)b_2 - \frac{b_1^2}{4}$  plus grand ou plus petit que zéro.

Les formules donnant l'altitude maximum ou le temps d'ascension sont celles qui donnent  $T_0$  et  $X_0$  au n° 100.

Pour le mouvement descendant, on a

$$dt = - \int_{v_0}^v \frac{dv}{-g + b_0 + b_1 v + b_2 v^2}, \quad dx = - \int_{v_0}^v \frac{v dv}{-g + b_0 + b_1 v + b_2 v^2}.$$

Ce seront encore les mêmes formules, mais où  $b_0$  sera remplacé par  $(b_0 - g)$ .

Si  $b_0 > g$ , le mobile lancé de haut en bas ne retomberait pas.

La vitesse terminale  $V'$  est déterminée par l'équation du second degré

$$b_2 V'^2 + b_1 V' + b_0 - g = 0,$$

d'où

$$V' = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4b_2(b_0 - g)}}{2b_2},$$

qui n'est réelle que si  $\frac{b_1^2}{4} > b_2(b_0 - g)$ , et positive que si ( $b_2$  étant positif)  $b_1^2 - 4b_2(b_0 - g) > b_1^2$ , c'est-à-dire  $g > b_0$ .

Si  $g < b_0$ , la vitesse terminale  $V'$  est nulle. Le temps  $T$  et l'espace  $X$  sont alors finis et donnés par les équations du n° 100.

**137. Cas d'une résistance cubique.** — On a dans cette hypothèse, et pour le mouvement ascendant, avec  $b_3 V'^3 = g$ ,

$$\frac{g t}{V'} = - \int_{v_0}^v \frac{dv}{1 + v^3}.$$

On décomposera l'élément d'intégrale comme il suit :

$$\frac{3 g t}{V'} = - \int_{v_0}^v \frac{dv}{1 + v} + \int_{v_0}^v \frac{v - 2}{v^2 - v + 1} dv,$$

et l'intégration donnera

$$(1) \quad \frac{3 g t}{V'} = \log \frac{v_0 + 1}{v + 1} \frac{\sqrt{v^2 - v + 1}}{\sqrt{v_0^2 - v_0 + 1}} + \sqrt{3} \arctan \frac{(v_0 - v) \sqrt{3}}{2 - (v_0 + v) + 2 v_0 v}.$$

Pour l'ordonnée, on aura

$$\frac{3g'v}{V^2} = - \int_{v_0}^v \frac{v \, dv}{1+v^2} = \int_{v_0}^v \frac{dv}{1+v} - \int_{v_0}^v \frac{(v+1) \, dv}{v^2 - v + 1}.$$

L'intégration donnera

$$(1) \quad \frac{3g'v}{V^2} = \log \frac{v+1}{v_0+1} \frac{\sqrt{v_0^2 - v_0 + 1}}{\sqrt{v^2 - v + 1}} + \sqrt{3} \operatorname{arc tang} \frac{(v_0 - v) \sqrt{3}}{2 - (v_0 + v) + 2v_0v}.$$

En faisant  $v = 0$ , on trouve que le projectile s'arrête pour

$$T_1 = \frac{V'}{3g'} \left( \log \frac{v_0+1}{\sqrt{v_0^2 - v_0 + 1}} + \sqrt{3} \operatorname{arc tang} \frac{v_0 \sqrt{3}}{2 - v_0} \right),$$

$$Y_1 = \frac{V'^2}{3g'} \left( \log \frac{\sqrt{v_0^2 - v_0 + 1}}{v_0+1} + \sqrt{3} \operatorname{arc tang} \frac{v_0 \sqrt{3}}{2 - v_0} \right).$$

Pour le point  $\Omega$ , à l'infini en amont de l'origine ( $v = \infty$ ), on a

$$T_\infty = \frac{V'}{3g'} \left( \log \frac{v_0+1}{\sqrt{v_0^2 - v_0 + 1}} - \sqrt{3} \operatorname{arc tang} \frac{\sqrt{3}}{2v_0 - 1} \right),$$

$$Y_\infty = \frac{V'^2}{3g'} \left( \log \frac{\sqrt{v_0^2 - v_0 + 1}}{v_0+1} - \sqrt{3} \operatorname{arc tang} \frac{\sqrt{3}}{2v_0 - 1} \right),$$

l'arc tang étant pris entre zéro et  $\pi$ .

Pour le temps total  $T_\infty^0$  et l'ordonnée totale  $Y_\infty^0$ , on a

$$T_\infty^0 = \frac{V'}{\sqrt{3}g'} \operatorname{arc tang}(-\sqrt{3}),$$

$$Y_\infty^0 = \frac{V'^2}{\sqrt{3}g'} \operatorname{arc tang}(-\sqrt{3}).$$

Or,  $\operatorname{arc tang}(-\sqrt{3}) = 120^\circ$ . Donc

$$T_\infty^0 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \frac{V'}{g'}, \quad Y_\infty^0 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \frac{V'^2}{g'}.$$

Ces formules coïncident avec celles du n° 130, 2°.

*Mouvement descendant.* — Quand le mobile redescendra, après avoir atteint sa hauteur maximum, son mouvement sera encore régi par les équations (1) et (2), contrairement à ce qui arrive dans le cas d'une résistance quadratique  $n = 2$ , mais ainsi que c'est la règle générale pour le cas de  $n$  impair; les formules sont valables en changeant simplement  $v$  en  $(-v)$ .

138. **Autres cas d'intégration.** — On peut encore résoudre les problèmes suivants :

1<sup>o</sup> *Cas d'une résistance binôme.* — Si  $cF(r) = b_0 + b_n r^n$ , le problème se résout par les mêmes formules que dans le cas d'une résistance monome, en remplaçant  $g$  par  $(g + b_0)$  (mouvement ascendant) ou par  $(g - b_0)$  (mouvement descendant).

2<sup>o</sup> *Loi de Didion*  $cF(r) = b_2 r^2 + b_1 r^3$ . — Le temps total  $T_\infty^0$  et l'ordonnée totale  $Y_\infty^0$  depuis  $V_0 = \infty$  jusqu'à  $r = 0$  sont donnés par les formules

$$\frac{1}{Q} (3g + b_2 Q^2) T_\infty^0 = \log \frac{g}{b_2 Q^2} + \frac{2(3g + 2b_2 Q^2)}{\sqrt{g(3g + 4b_2 Q^2)}} \left( \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{b_2 Q^2}} \right),$$

$$\frac{1}{Q} (3g + b_2 Q^2) Y_\infty^0 = \log \frac{b_2 Q^2}{g} + \frac{6g}{\sqrt{g(3g + 4b_2 Q^2)}} \left( \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{b_2 Q^2}} \right).$$

La valeur de  $Q$  se déduit de l'équation du troisième degré :

$$b_2 Q^3 - b_2 Q - g = 0 \quad (\text{de Saint-Robert}).$$

3<sup>o</sup> Même problème pour une fonction  $F(r) = \Lambda e^{mr}$ , pour le temps  $T_\infty^0$ .

L'intégrale  $T_\infty^0 = \int_0^\infty \frac{dv}{g + \Lambda e^{mv}}$  a pour valeur

$$mg T_\infty^0 = \log \left( 1 + \frac{g}{\Lambda} \right) \quad (\text{de Saint-Robert}).$$

139. **Influence de la masse sur la hauteur d'ascension.** — « La hauteur à laquelle s'élève un corps pesant projeté verticalement de bas en haut dépend de sa vitesse initiale, de sa masse et de la résistance de l'air. Parmi plusieurs projectiles sphériques de même dimension, lancés avec la même vitesse initiale, le plus dense est évidemment celui qui doit monter le plus haut; mais, au lieu de supposer connue la vitesse initiale, on peut se donner le travail dépensé pour créer cette vitesse (par exemple au moyen de la détente d'un ressort) et les choses se passent alors d'une façon moins simple. Si l'on prend une masse infiniment légère, une dépense finie de travail lui communique une vitesse infiniment grande; la résistance de l'air, qui croît sans limite avec la vitesse, absorbe, au bout d'un parcours infiniment petit, la force vive initiale et la hauteur d'ascension a une limite nulle. Si l'on prend, au contraire, une masse infiniment grande, la vitesse initiale est infiniment petite et, dans ce cas encore, le mobile ne peut s'élever. »

» On conçoit d'après cela que, pour un projectile de figure donnée et pour chaque valeur du travail dépensé au départ, il doive exister une

masse correspondant au maximum d'ascension. Proposons-nous de calculer cette masse dans l'hypothèse d'une résistance proportionnelle à une puissance constante de la vitesse » (Lecornu).

M. Lecornu traite ce problème de la manière suivante :

L'équation différentielle  $g Y_1 = - \int_{v_0}^0 \frac{v dv}{1 + \frac{b_n v^n}{g}}$  s'écrit, en introduisant explicitement la masse  $m$  du projectile :

$$g Y_1 = - \int_{v_0}^0 \frac{m v dv}{m + K v^n}$$

en posant  $m \frac{b_n}{g} = K$ .

Le coefficient  $K$  ne dépend pas de  $m$ , ce qu'on voit immédiatement en écrivant

$$Y_1 = - \int_{v_0}^0 \frac{m v dv}{m g + K g v^n}.$$

Au dénominateur,  $mg$  représente le poids du projectile, et  $K g v^n$  l'autre force agissant, c'est-à-dire la résistance de l'air, qui ne dépend pas de la masse  $m$ .

Par hypothèse, la force vive initiale est une constante. Donc

$$\frac{1}{2} m V_0^2 = \mathfrak{E}.$$

Posons  $v^2 = V_0^2 \zeta$ ; on aura

$$g Y_1 = \mathfrak{E} \int_0^1 \frac{d\zeta}{m + K V_0^n \zeta^{\frac{n}{2}}}.$$

Posons encore  $K V_0^n = \frac{m}{\mu}$ , ce qui, avec l'équation du travail, donne

$$m = (K \mu)^{\frac{2}{n+2}} (\mathfrak{E})^{\frac{n}{n+2}}.$$

On aura donc

$$g Y_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\mathfrak{E}}{K} \right)^{\frac{2}{n+2}} \frac{\mathfrak{E}^{\frac{n}{n+2}}}{\mu^{\frac{n}{n+2}}} \int_0^1 \frac{d\zeta}{\mu + \zeta^{\frac{n}{2}}}.$$

Il s'agit de choisir  $\mu$  de manière à rendre maximum le produit

$$\mu^{\frac{n}{n+2}} \int_0^1 \frac{d\zeta}{\mu + \zeta^{\frac{n}{2}}}.$$

En égalant à zéro la dérivée de ce produit par rapport à  $\mu$ , on trouve

$$n \int_0^1 \frac{d\zeta}{\mu + \zeta^{\frac{n}{2}}} = (n+2) \mu \int_0^1 \frac{d\zeta}{(\mu + \zeta^{\frac{n}{2}})^2}$$

Mais, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{d\zeta}{\mu + \zeta^{\frac{n}{2}}} &= \frac{1}{1+\mu} + \frac{n}{2} \int_0^1 \frac{\zeta^{\frac{n}{2}-1} d\zeta}{(\mu + \zeta^{\frac{n}{2}})^2} \\ &= \frac{1}{1+\mu} + \frac{n}{2} \int_0^1 \frac{d\zeta}{\mu + \zeta^{\frac{n}{2}}} - \frac{n}{2} \mu \int_0^1 \frac{d\zeta}{(\mu + \zeta^{\frac{n}{2}})^2}, \end{aligned}$$

ce qui permet de ramener l'équation précédente à la forme très simple

$$\int_0^1 \frac{d\zeta}{\mu + \zeta^{\frac{n}{2}}} = \frac{n+2}{2(\mu+1)},$$

qui détermine complètement le coefficient  $\mu$ , inconnue du problème, c'est-à-dire la vitesse initiale cherchée.

*Cas de  $n = 2$ .* — Soit  $n = 2$ . On aura

$$\log \left( 1 + \frac{1}{\mu} \right) = \frac{2}{\mu+1},$$

d'où, pour  $\mu$ , la valeur  $\mu = 0,255$ , ou, approximativement,  $\mu = \frac{1}{4}$ .

De cette dernière relation, on déduit alors le théorème suivant :

Quand on lance verticalement de bas en haut, avec une dépense de travail  $\mathfrak{E}$ , des mobiles ayant même forme extérieure, le mobile pour lequel la hauteur d'ascension est la plus grande vérifie les conditions que voici :

Sa masse est égale à  $m = \sqrt{\frac{K\mathfrak{E}}{2}}$ ; le carré de sa vitesse initiale est donné par la formule

$$V_0^2 = 2 \sqrt{\frac{2\mathfrak{E}}{K}}.$$

On a  $V_0 = 2V'$ . Sa hauteur d'ascension est égale aux  $\frac{1}{2}$  de la hauteur à laquelle il parviendrait dans le vide en vertu de sa vitesse initiale. La résistance  $R$  qu'il éprouve de la part de l'air, à l'instant initial, est quadruple de son poids.

(On a, en effet  $R = mb_n v^n = K g v^n$ .)

*Cas de  $n = 1$ .* — Dans ce cas, l'équation qui détermine  $\mu$  s'obtient aisément sous la forme

$$\log\left(1 + \frac{1}{\mu}\right) = \frac{1}{4} \frac{\nu + 1}{\mu(\mu + 1)}.$$

Numériquement, on trouve  $\mu = 0,243$ .

*Cas de  $n = 4$ .* — On a, pour déterminer  $\mu$ , l'équation

$$\text{arc tang} \frac{1}{\sqrt{\mu}} = \frac{3\sqrt{\mu}}{\mu + 1}.$$

Numériquement, on trouve  $\mu = 0,212$ .

*Remarque.* — Pour  $n = 0$  et pour  $n = \infty$ , on trouve  $\mu = 0$ .

*Autre problème.* — On traiterait tout à fait de la même façon l'étude du tir vertical à quantité de mouvement constante,  $mV_0 = K$ , condition qui correspond à une égale fatigue de l'affût employé au tir.

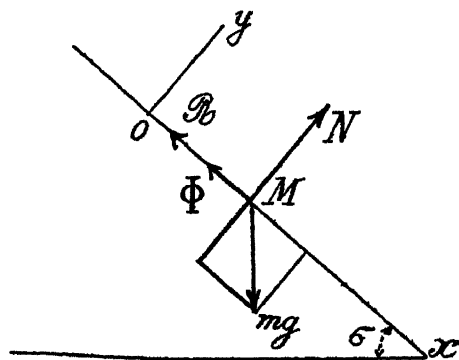
D'une façon générale, si l'on part de  $mV_0^a = K$ , on trouve l'équation de détermination de  $\mu$  sous la forme suivante :

$$\int_0^1 \frac{d^2 \zeta}{\mu + \zeta^2} = \frac{n + a}{a(\mu + 1)}.$$

**140. Mouvement rectiligne sur un plan incliné.** — Comme seconde application des théories actuelles, traitons, d'après M. Appell, le problème suivant :

Un point M est lancé suivant la ligne de plus grande pente du plan Ox,

Fig. 149.



incliné de l'angle  $\sigma$  sur l'horizontale. Les forces appliquées au point mobile M sont le poids  $mg$ , la résistance du milieu  $R = mb_n v^n$ , dirigée

en sens contraire de la vitesse, la réaction normale  $N$  du plan, et, enfin, la force  $\Phi$  de frottement, dirigée également en sens inverse de la vitesse. D'après les lois expérimentales du frottement, cette force est indépendante de la vitesse du point; elle est proportionnelle à la réaction normale  $N$ , et l'on a  $\Phi = N \tan \varphi$ , l'angle  $\varphi$  caractérisant le *coefficient de frottement*.

*Mouvement descendant.* — Prenons l'axe  $Ox$  dirigé vers le bas et un axe  $Oy$  perpendiculaire au plan incliné. En écrivant les deux équations du mouvement, on a

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg \sin \sigma - R - \Phi, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = N - mg \cos \sigma.$$

Comme  $y$  est constamment nul, on a

$$N = mg \cos \sigma, \quad \Phi = N \tan \varphi = mg \cos \sigma \tan \varphi.$$

Remplaçant aussi  $R$  par sa valeur  $mb_n v^n$ , on a l'équation

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = g (\sin \sigma - \tan \varphi \cos \sigma) - b_n v^n$$

Trois cas sont à considérer.

*Premier cas.* — On a  $\sigma > \varphi$ . Le premier terme est alors une constante positive. En l'appelant  $g'$ , on a

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = g' - b_n v^n,$$

équation identique à celle du mouvement descendant, étudié dans le cas d'une chute verticale dans un milieu résistant, sauf le changement de  $g$  en  $g'$ . La vitesse tend donc vers une limite  $V_g$  telle que

$$V_g^n = \frac{g'}{b_n} = \frac{g (\sin \sigma - \tan \varphi \cos \sigma)}{b_n} = V^n (\sin \sigma - \tan \varphi \cos \sigma).$$

*Deuxième cas.* — On a  $\tan \sigma < \varphi$ . Le premier terme est alors négatif. En appelant  $g_1$ , on a

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -g_1 - b_n v^n,$$

équation identique à celle du mouvement ascendant étudié plus haut (419) sauf le changement de  $g$  en  $g_1$ . La vitesse diminue et s'annule au bout d'un temps fini  $T$ ; le mobile arrive donc, au bout de ce temps, dans une position où la résistance de l'air et le frottement de glissement



s'annulent, car la vitesse devient nulle. Le point restera indéfiniment dans cette position; car s'il tendait à se remettre en mouvement, les forces de résistance et de frottement de glissement apparaîtraient immédiatement pour réduire de nouveau sa vitesse à zéro. Dans cette position, il y a donc équilibre entre le poids et une réaction oblique du poids, due au frottement au repos.

*Troisième cas.* — On a  $\tau = \varphi$ . L'équation est alors

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -b_n v^n, \quad \text{où} \quad \frac{dv}{dt} = -b_n v^n.$$

C'est exactement le cas du mouvement rectiligne dans un milieu résistant étudié au n° 92. L'influence retardatrice du frottement annule l'influence accélératrice de la pente du plan. Suivant la valeur de l'exposant  $n$ , le mobile s'arrêtera à distance finie ou infinie.

*Mouvement ascendant.* — L'équation différentielle est

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g(\sin \tau + \tan \varphi \cos \tau) - b_n v^n.$$

C'est exactement l'équation du mouvement ascendant étudié au n° 119, la gravité  $g$  prenant alors une valeur  $g(\sin \sigma + \tan \varphi \cos \sigma)$  toujours plus grande que  $g$ .

**141. Développement en série de Mac-Laurin.** — 1° Dans le cas du mouvement rectiligne vertical, on a les dérivées successives suivantes de l'ordonnée  $y$  par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= v, & \frac{d^3y}{dt^3} &= c(cF + g)F', \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -(cF + g), & \frac{d^4y}{dt^4} &= -c(cF + g)[cF'^2 + F''(cF + g)], \\ & & & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Ces formules sont celles du mouvement ascendant : si l'on change  $g$  en  $(-g)$ , on aura les formules du mouvement descendant.

Pour  $g=0$ , on retrouve les formules du mouvement rectiligne horizontal (109).

Posons :

$$\begin{aligned} P_2 &= -(cF_0 + g), & P_3 &= c(cF_0 + g)F'_0, \\ P_4 &= -c(cF_0 + g)[cF_0'^2 + F_0''(cF_0 + g)]. \end{aligned}$$

Avec ces notations, les six développements seront exactement ceux

données au n° 111 sous la forme générale; il n'y a donc pas lieu de les transcrire ici.

2° Nous écrirons, par contre, les formules qu'on obtient en introduisant le degré  $n$  de la résistance,  $n = \frac{V_0 F_0}{F_0}$ . Nous aurons

$$P_2 = n \frac{c F_0}{V_0} (c F_0 + g)$$

et, si  $n$  est constant,

$$P_4 = -n \frac{c F_0}{V_0^2} (c F_0 + g) [(2n-1)c F_0 + (n-1)g],$$

ou encore, en posant  $\rho_0 = \frac{c F_0}{g}$ ,

$$P_2 = n \frac{g^2}{V_0^2} \rho_0 (\rho_0 + 1), \quad P_4 = -n \frac{g^3}{V_0^3} \rho_0 (\rho_0 + 1) [(2n-1)\rho_0 + n-1].$$

Il viendra alors le système suivant :

$$\begin{aligned} (1) \quad & y = V_0 t \left\{ 1 - \frac{1}{2}(\rho_0 + 1) \frac{g t}{V_0} + \frac{n}{3!} \rho_0 (\rho_0 + 1) \left( \frac{g t}{V_0} \right)^2 \right. \\ & \quad \left. - \frac{n}{4!} \rho_0 (\rho_0 + 1) [(2n-1)\rho_0 + n-1] \left( \frac{g t}{V_0} \right)^3 + \dots \right\}, \\ (2) \quad & t = \frac{y}{V_0} \left\{ 1 + \frac{1}{2}(\rho_0 + 1) \frac{g y}{V_0^2} - \frac{1}{3!}(\rho_0 + 1) [(n-3)\rho_0 - 3] \left( \frac{g y}{V_0^2} \right)^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{5}{4!}(\rho_0 + 1) \left[ \frac{(n-3)(2n-5)}{5} \rho_0^2 + \frac{(n-5)(n-6)}{5} \rho_0 + 3 \right] \right. \\ & \quad \left. \times \left( \frac{g y}{V_0^2} \right)^3 + \dots \right\}; \\ (3) \quad & v = V_0 \left\{ 1 - (\rho_0 + 1) \frac{g t}{V_0} + \frac{1}{2!} \rho_0 (\rho_0 + 1) \left( \frac{g t}{V_0} \right)^2 \right. \\ & \quad \left. - \frac{n}{3!} \rho_0 (\rho_0 + 1) [(2n-1)\rho_0 + n-1] \left( \frac{g t}{V_0} \right)^3 + \dots \right\}, \\ (4) \quad & t = \frac{V_0 - v}{g (\rho_0 + 1)} \left\{ 1 + \frac{n}{2!} \frac{\rho_0}{\rho_0 + 1} \frac{V_0 - v}{V_0} \right. \\ & \quad \left. + \frac{n}{3!} \frac{\rho_0}{(\rho_0 + 1)^2} [(n-1)\rho_0 - (n-1)] \left( \frac{V_0 - v}{V_0} \right)^2 + \dots \right\}; \\ (5) \quad & v = V_0 \left\{ 1 - (\rho_0 + 1) \frac{g y}{V_0^2} + \frac{1}{2!}(\rho_0 + 1) [(n-1)\rho_0 - 1] \left( \frac{g y}{V_0^2} \right)^2 + \dots \right\}, \\ (6) \quad & y = \frac{V_0}{g} \frac{V_0 - v}{\rho_0 + 1} \left\{ 1 + \frac{1}{2!}(\rho_0 + 1) [(n-1)\rho_0 - 1] \left( \frac{V_0 - v}{V_0} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{n}{3!} \frac{\rho_0}{(\rho_0 + 1)^2} [(n-1)\rho_0 - (n+1)] \left( \frac{V_0 - v}{V_0} \right)^2 + \dots \right\}. \end{aligned}$$

On vérifie bien que, pour  $g = 0$ , ces six équations se confondent avec les équations du mouvement horizontal (111).

Faisons inversement  $c = 0$ . Les six équations donnent :

$$\left\{ \begin{aligned} y &= V_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \\ t &= \frac{y}{V_0} \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{g y}{V_0^2} + \frac{3}{3!} \left( \frac{g y}{V_0^2} \right)^2 + \frac{3 \cdot 5}{4!} \left( \frac{g y}{V_0^2} \right)^3 + \dots \right], \\ v &= V_0 \left( 1 - \frac{V_0}{g} t \right), \\ t &= \frac{V_0 - v}{g}; \\ v &= V_0 \left[ 1 - \frac{g y}{V_0^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{g y}{V_0^2} \right)^2 - \frac{3}{3!} \left( \frac{g y}{V_0^2} \right)^3 + \dots \right], \\ y &= \frac{V_0 (V_0 - v)}{g} \left( 1 - \frac{1}{2!} \frac{V_0 v}{V_0^2} \right). \end{aligned} \right.$$

Ce sont les équations du *vide*, la deuxième et la cinquième étant respectivement les développements de

$$t = \frac{V_0 - \sqrt{V_0^2 - 2gy}}{g} \quad \text{et de} \quad v^2 = V_0^2 - 2gy.$$

3° On remarquera, en outre, les deux formules suivantes, où s'introduisent  $y$  et  $v^2$ , déduites de celles du n° III (*Remarque*), et dont les deux premiers termes sont fort simples :

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{V_0^2} &= 1 - 2(\rho_0 + 1) \left( \frac{gy}{V_0^2} \right) + n \rho_0 (\rho_0 + 1) \left( \frac{gy}{V_0^2} \right)^2 + \dots, \\ 2gy &= \frac{V_0^2 - v^2}{\rho_0 + 1} + \frac{n \rho_0}{1(\rho_0 + 1)^2} \frac{(V_0^2 - v^2)^2}{V_0^2} + \dots \end{aligned}$$

4° Les fonctions balistiques  $\Delta$  ou  $\nabla$  et  $\Sigma$  ou  $\Xi$  sont développées dans le Tableau ci-dessus [équations (4) et (6)]. On les donne encore de la manière la plus générale, sans introduire le degré de la résistance :

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \Sigma (g > 0) \\ \text{ou} \\ \Xi (g < 0) \end{aligned} \right\} &= \frac{1}{g} \left( \frac{V_0 - v}{\rho_0 + 1} \right) + \frac{1}{2g} \rho_0 \left( \frac{V_0 - v}{\rho_0 + 1} \right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{6g} [(\rho_0 + 1) \rho_0'' - 3 \rho_0'] \left( \frac{V_0 - v}{\rho_0 + 1} \right)^3 + \dots \\ \left. \begin{aligned} \Delta (g > 0) \\ \text{ou} \\ \nabla (g < 0) \end{aligned} \right\} &= \frac{V_0}{g} \left( \frac{V_0 - v}{\rho_0 + 1} \right) - \frac{1}{2g} (\rho_0 - V_0 \rho_0' + 1) \left( \frac{V_0 - v}{\rho_0 + 1} \right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{6g} [(\rho_0 \rho_0'' + 2 \rho_0') (\rho_0 + 1) - 3 V_0 \rho_0'] \left( \frac{V_0 - v}{\rho_0 + 1} \right)^3 + \dots \end{aligned}$$

5° Etablir la formule

$$y = \frac{V_0 + v}{2} t - \frac{1}{2 \cdot 6g} \frac{\rho_0'}{\rho_0 + 1} (V_0 - v)^3.$$

6<sup>e</sup> *Formule de Littlewood.* — Posons  $z = v + gt$ , on écrira, pour le temps :

$$\frac{dz}{dt} = -cF(z - gt) = -c \left[ F(z) - gtF'(z) - \frac{g^2 t^2}{2} F''(z) + \dots \right],$$

d'où

$$- \frac{dz}{cF(z)} = dt - g \frac{F'(z)}{F(z)} t dt + \dots,$$

ou, puisque  $v = V_0 - gt + \dots$  en première approximation :

$$t = \frac{S(v + gt) - S(V_0)}{c} + \frac{g}{2} \frac{F'(V_0)}{F(V_0)} t^2 + \dots$$

On peut établir une formule analogue pour l'ordonnée  $y$ , en posant

$$\zeta^2 = v^2 + 2gy$$

et en développant en série. Les premiers termes sont :

$$y = \frac{D[(v^2 + 2gy)^{1/2}] - D(V_0)}{c} + \frac{g}{2} \frac{F'(V_0)}{V_0 F(V_0)} y^2 + \dots$$

#### IV. — DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES DE FONCTIONS

142. **Principe du développement.** — Le développement par la série de Mac-Laurin, qui a été donné précédemment (141), est tout à fait général en ce sens qu'il s'applique à un point quelconque du mouvement. Mais il n'est valable, avec un petit nombre de termes, tout au moins, que lorsqu'on ne s'éloigne pas trop du point pris pour origine du développement.

On peut donner, dans le cas du mouvement vertical dans l'air, deux autres séries qui comportent, dans l'expression de leurs termes, au lieu des dérivées successives de la fonction de la résistance prise à l'origine, des intégrales qui embrassent une région beaucoup plus étendue de la fonction  $F(v)$  et qui constituent des approximations successives du mouvement d'autant plus exactes que le nombre d'intégrales sera plus considérable.

Ces formules sont déduites de la comparaison de l'ordre de grandeur relatif des deux forces en présence, la *gravité*  $g$  et l'*accélération de la résistance de l'air*  $cF(v)$  : 1<sup>o</sup> lorsque le rapport  $\frac{g}{cF(v)}$  sera plus petit que l'unité, on pourra chercher un développement suivant les puissances

de  $\frac{1}{c}$ , inverse du *coefficient balistique*: 2° lorsque le rapport  $\frac{cF(v)}{g}$  sera plus petit que l'unité, on pourra, au contraire, chercher un développement suivant les puissances de  $c$ , *coefficient balistique*.

Ces deux développements s'excluent mutuellement au même point, l'un étant convergent et l'autre divergent.

**143. Développement suivant les puissances de l'inverse du coefficient balistique.** — On a, dans ce cas, par hypothèse,  $\frac{g}{cF(v)} < 1$ .

1° *Mouvement ascendant.* — On écrira la formule du n° 117 sous la forme

$$c \, dt = - \frac{dv}{F(v)} \frac{1}{1 - \frac{g}{cF(v)}}.$$

La fraction qui figure dans le second membre se développera, par la formule du binôme, en une série convergente, et l'on aura, pour le temps :

$$c \, dt = - \frac{dv}{F(v)} \left[ 1 - \frac{g}{cF} + \left( \frac{g}{cF} \right)^2 + \dots + (-1)^m \left( \frac{g}{cF} \right)^m \right].$$

De même, pour l'ordonnée  $y$ , on aura

$$c \, dy = - \frac{v \, dv}{F(v)} \left[ 1 - \frac{g}{cF} + \left( \frac{g}{cF} \right)^2 + \dots + (-1)^m \left( \frac{g}{cF} \right)^m \right].$$

Posons, comme définitions d'une série d'intégrales ou *fonctions balistiques* :

$$S_{-m} = -g^{m-1} \int_{V_0}^{v'} \frac{dv}{F^m}, \quad D_{-m} = -g^{m-1} \int_{V_0}^{v'} \frac{v \, dv}{F^m}.$$

Il viendra

$$ct = S_{-1} - \frac{1}{c} S_{-2} + \frac{1}{c^2} S_{-3} + \dots + (-1)^m \frac{1}{c^m} S_{-(m+1)},$$

$$cy = D_{-1} - \frac{1}{c} D_{-2} + \frac{1}{c^2} D_{-3} + \dots + (-1)^m \frac{1}{c^m} D_{-(m+1)}.$$

2° *Mouvement descendant.* — On écrira

$$c \, dt = - \frac{dv}{F(v)} \frac{1}{1 - \frac{g}{cF}} = - \frac{dv}{F(v)} \left[ 1 + \frac{g}{cF} + \left( \frac{g}{cF} \right)^2 + \dots + \left( \frac{g}{cF} \right)^m \right].$$

(On voit ainsi que, pour passer du mouvement ascendant au mouvement descendant, il suffit de changer  $g$  en  $(-g)$ .)

On aura, en remarquant que le sens où sont comptés le temps et l'ordonnée est inverse dans les deux mouvements :

$$-ct = S_{-1} + \frac{1}{c} S_{-2} + \frac{1}{c^2} S_{-3} + \dots + \frac{1}{c^m} S_{-m+1},$$

$$-cj = D_{-1} + \frac{1}{c} D_{-2} + \frac{1}{c^2} D_{-3} + \dots + \frac{1}{c^m} D_{-m+1}.$$

3° On remarquera que

$$S_{-1} = - \int_{V_0}^v \frac{dv}{F(v)} = S(v) - S(V_0);$$

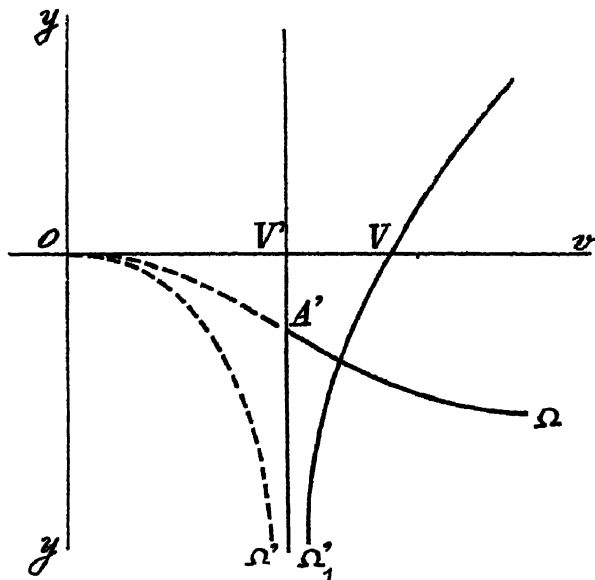
la fonction  $S$  étant la fonction balistique rencontrée dans le mouvement rectiligne horizontal (91).

De même, on a

$$D_{-1} = D(v) - D(V_0).$$

Les premiers termes du développement sont donc ceux du mouvement rectiligne, sous l'influence retardatrice de la seule résistance de l'air.

Fig. 150.



Les termes suivants, qui renferment  $g$ , introduisent de plus en plus l'influence de la gravité.

4° Si l'on se reporte à la discussion des courbes des fonctions  $\Sigma$  et  $\Xi$ ,  $\Delta$  et  $\nabla$  (124), on voit que cette première série sera :

*a.* Convergente pour le mouvement ascendant, de l'infini au point A où la vitesse devient  $V'$ , telle que  $cF(V') = g$ ;

*b.* Divergente de A' au sommet O et, pour le mouvement descendant, de O à  $\Omega'$ ;

*c.* Convergente, pour le mouvement descendant sur la branche  $\Omega, \Omega_1$ .

5<sup>e</sup> Application au cas d'une résistance monome. — Soit  $F(v) = B_n v^n$ . Posons

$$\rho = \frac{cF(v)}{g} = \frac{cB_n v^n}{g}.$$

On a, pour les intégrales du mouvement :

$$\begin{aligned} S_{-m} &= -\frac{1}{g} \left( \frac{g}{B_n} \right)^m \int_{V_0}^v \frac{dv}{v^{nm}} = \frac{1}{g} \left( \frac{g}{B_n} \right)^m \frac{1}{nm-1} [v^{1-nm} - V_0^{1-nm}] \\ &= \frac{c^m V_0}{(nm-1)g \rho_0^m} \left[ \left( \frac{V_0}{v} \right)^{nm-1} - 1 \right], \\ D_{-m} &= -\frac{1}{g} \left( \frac{g}{B_n} \right)^m \int_{V_0}^v \frac{dv}{v^{nm-1}} = \frac{1}{g} \left( \frac{g}{B_n} \right)^m \frac{1}{nm-2} [v^{2-nm} - V_0^{2-nm}] \\ &= \frac{c^m V_0^2}{(nm-2)g \rho_0^m} \left[ \left( \frac{V_0}{v} \right)^{nm-2} - 1 \right] \end{aligned}$$

Les formules du mouvement deviennent alors, en posant  $cB_n = b_n$   
Mouvement ascendant :

$$\begin{aligned} \frac{gT}{V_0} &= \frac{1}{(n-1)\rho_0} \left[ \left( \frac{V_0}{v} \right)^{n-1} - 1 \right] - \frac{1}{(2n-1)\rho_0^2} \left[ \left( \frac{V_0}{v} \right)^{2n-1} - 1 \right] \\ &\quad + \frac{1}{(3n-1)\rho_0^3} \left[ \left( \frac{V_0}{v} \right)^{3n-1} - 1 \right] + \dots \\ \frac{gJ}{V_0^2} &= \frac{1}{(n-2)\rho_0} \left[ \left( \frac{V_0}{v} \right)^{n-2} - 1 \right] - \frac{1}{(2n-2)\rho_0^2} \left[ \left( \frac{V_0}{v} \right)^{2n-2} - 1 \right] \\ &\quad + \frac{1}{(3n-2)\rho_0^3} \left[ \left( \frac{V_0}{v} \right)^{3n-2} - 1 \right] + \dots \end{aligned}$$

Mouvement descendant :

$$\begin{aligned} \frac{gT}{V_0} &= \frac{1}{(n-1)\rho_0} \left[ 1 - \left( \frac{V_0}{v} \right)^{n-1} \right] + \frac{1}{(2n-1)\rho_0^2} \left[ 1 - \left( \frac{V_0}{v} \right)^{2n-1} \right] \\ &\quad + \frac{1}{(3n-1)\rho_0^3} \left[ 1 - \left( \frac{V_0}{v} \right)^{3n-1} \right] + \dots \\ \frac{gJ}{V_0^2} &= \frac{1}{(n-2)\rho_0} \left[ 1 - \left( \frac{V_0}{v} \right)^{n-2} \right] + \frac{1}{(2n-2)\rho_0^2} \left[ 1 - \left( \frac{V_0}{v} \right)^{2n-2} \right] \\ &\quad + \frac{1}{(3n-2)\rho_0^3} \left[ 1 - \left( \frac{V_0}{v} \right)^{3n-2} \right] + \dots \end{aligned}$$

141. Développement suivant les puissances du coefficient balistique.

On a, dans ce cas, par hypothèse,  $\frac{cF(v)}{g} < 1$ .

1<sup>o</sup> *Mouvement ascendant.* — On écrira la formule du n<sup>o</sup> 117 sous la forme

$$g \, dt = - \frac{dv}{1 + \frac{cF(v)}{g}}.$$

Développant, par division, la fraction du second membre, en une série convergente, on aura, pour le *temps* :

$$dt = - \frac{1}{g} \left[ 1 - \frac{cF}{g} + \left( \frac{cF}{g} \right)^2 - \dots + (-1)^m \left( \frac{cF}{g} \right)^m \right] dv.$$

De même, pour l'*ordonnée y*, il viendra

$$dy = \frac{v}{g} \left[ 1 - \frac{cF}{g} + \left( \frac{cF}{g} \right)^2 + \dots + (-1)^m \left( \frac{cF}{g} \right)^m \right] dv.$$

Posons, comme définition d'une série d'intégrales ou fonctions balistiques :

$$\mathbf{S}_m = -g^{-m-1} \int_{V_0}^v v^m \, dv \quad \text{et} \quad \mathbf{D}_m = -g^{-m-1} \int_{V_0}^v v F^m \, dv.$$

Il viendra, en faisant  $t$  et  $y = 0$ , pour  $v = V_0$  :

$$\begin{aligned} t &= \mathbf{S}_0 - c\mathbf{S}_1 + c^2\mathbf{S}_2 + \dots + (-1)^{m-1} c^m \mathbf{S}_m, \\ y &= \mathbf{D}_0 - c\mathbf{D}_1 + c^2\mathbf{D}_2 + \dots + (-1)^{m-1} c^m \mathbf{D}_m. \end{aligned}$$

2<sup>o</sup> *Mouvement descendant.* — On écrira

$$g \, dt = \frac{dv}{1 - \frac{cF}{g}} = \left[ 1 + \frac{cF}{g} + \left( \frac{cF}{g} \right)^2 + \dots + \left( \frac{cF}{g} \right)^m \right] dv.$$

Introduisant les mêmes intégrales  $\mathbf{S}_m$  et  $\mathbf{D}_m$ , mais qui, à cause du changement de sens des limites, devront changer de signe, il viendra

$$\begin{aligned} t &= -[\mathbf{S}_0 + c\mathbf{S}_1 + c^2\mathbf{S}_2 + \dots + c^m \mathbf{S}_m], \\ y &= -[\mathbf{D}_0 + c\mathbf{D}_1 + c^2\mathbf{D}_2 + \dots + c^m \mathbf{D}_m]. \end{aligned}$$

3<sup>o</sup> On remarquera que :

$$\mathbf{S}_0 = -\frac{1}{g} \int_{V_0}^v dv = \frac{V_0 - v}{g} \quad \text{et} \quad \mathbf{D}_0 = -\frac{1}{g} \int_{V_0}^v v \, dv = \frac{1}{2g} (V_0^2 - v^2).$$

Les premiers termes des formules sont ainsi les termes du mouvement dans le vide. Les termes qui suivent introduisent progressivement la résistance de l'air.

4<sup>o</sup> Ce développement suivant les puissances de  $c$  est valable :



a. Sur la branche ascendante du point A' où la vitesse est V' au sommet O (143, 4°);

b. Sur la branche descendante de O' et Ω', car là vitesse v est toujours inférieure à V'.

5° *Application au cas d'une résistance monome.* — Soit  $F(v) = B_n v^n$ . On a, pour les fonctions balistiques :

$$\begin{aligned} S_m &= -\frac{1}{g} \left( \frac{B_n}{g} \right)^m \int_{V_0}^{V'} v^{nm} dv = \frac{1}{g} \left( \frac{B_n}{g} \right)^m \frac{1}{nm+1} (V_0^{nm+1} - v^{nm+1}) \\ &= \frac{1}{cm} \frac{V_0}{g} \frac{\rho_0^m}{(nm+1)} \left[ 1 - \left( \frac{v}{V_0} \right)^{nm+1} \right], \\ D_m &= -\frac{1}{g} \left( \frac{B_n}{g} \right)^m \int_{V_0}^{V'} v^{nm+1} dv = \frac{1}{g} \left( \frac{B_n}{g} \right)^m \frac{1}{nm+2} (V_0^{nm+2} - v^{nm+2}) \\ &= \frac{1}{cm} \frac{V_0}{g} \frac{\rho_0^m}{(nm+2)} \left[ 1 - \left( \frac{v}{V_0} \right)^{nm+2} \right]. \end{aligned}$$

On aura donc :

Mouvement ascendant :

$$\begin{aligned} \frac{gt}{V_0} &= \frac{V_0 - v}{V_0} - \frac{\rho_0}{n+1} \left[ 1 - \left( \frac{v}{V_0} \right)^{n+1} \right] + \frac{\rho_0^2}{2n+1} \left[ 1 - \left( \frac{v}{V_0} \right)^{2n+1} \right] + \dots, \\ \frac{gy}{V_0^2} &= \frac{V_0^2 - v^2}{2V_0^2} - \frac{\rho_0}{n+2} \left[ 1 - \left( \frac{v}{V_0} \right)^{n+1} \right] + \frac{\rho_0^2}{2n+2} \left[ 1 - \left( \frac{v}{V_0} \right)^{2n+2} \right] + \dots : \end{aligned}$$

Mouvement descendant :

$$\begin{aligned} \frac{gt}{V_0} &= \frac{v - V_0}{V_0} + \frac{\rho_0}{n+1} \left[ \left( \frac{v}{V_0} \right)^{n+1} - 1 \right] + \frac{\rho_0^2}{2n+1} \left[ \left( \frac{v}{V_0} \right)^{2n+1} - 1 \right] + \dots, \\ \frac{gy}{V_0^2} &= \frac{v^2 - V_0^2}{2V_0^2} + \frac{\rho_0}{n+2} \left[ \left( \frac{v}{V_0} \right)^{n+2} - 1 \right] + \frac{\rho_0^2}{2n+2} \left[ \left( \frac{v}{V_0} \right)^{2n+2} - 1 \right] + \dots \end{aligned}$$

*Point culminant.* — Dans les équations du mouvement ascendant, faisons  $v = 0$ , on aura

$$\begin{aligned} \frac{gT_\lambda}{V_0} &= 1 - \frac{\rho_0}{n+1} + \frac{\rho_0^2}{2n+1} - \frac{\rho_0^3}{3n+1} + \dots, \\ \frac{gY_\lambda}{V_0^2} &= \frac{1}{2} - \frac{\rho_0}{n+2} + \frac{\rho_0^2}{2n+2} - \frac{\rho_0^3}{3n+2} + \dots \end{aligned}$$

*Chute sans vitesse initiale.* — Dans les équations du mouvement descendant, on écrira

$$\begin{aligned} gt &= v - V_0 + \frac{1}{n+1} \frac{\rho_0}{V_0} (v^{n+1} - V_0^{n+1}) + \frac{1}{2n+1} \frac{\rho_0^2}{V_0^2} (v^{2n+1} - V_0^{2n+1}) + \dots, \\ gy &= \frac{v^2 - V_0^2}{2} + \frac{1}{n+2} \frac{\rho_0}{V_0} (v^{n+2} - V_0^{n+2}) + \frac{1}{2n+2} \frac{\rho_0^2}{V_0^2} (v^{2n+2} - V_0^{2n+2}) + \dots \end{aligned}$$

Donc, pour  $V_0 = 0$  :

$$\begin{aligned} gt &= 1 + \frac{b_n}{g} \frac{v^{n+1}}{n+1} + \left(\frac{b_n}{g}\right)^2 \frac{v^{2n+1}}{2n+1} + \dots \\ gy &= \frac{v^2}{2} + \frac{b_n}{g} \frac{v^{n+2}}{n+2} + \left(\frac{b_n}{g}\right)^2 \frac{v^{2n+2}}{2n+2} + \dots \end{aligned}$$

On peut écrire ces dernières d'une manière tout à fait analogue à celle du point culminant et introduire le rapport :  $\rho = \frac{b_n v^n}{g}$ . On aura

$$\begin{aligned} \frac{gt}{v} &= 1 + \frac{\rho}{n+1} + \frac{\rho^2}{2n+1} + \frac{\rho^3}{3n+1} + \dots, \\ \frac{gy}{v^2} &= \frac{1}{2} + \frac{\rho}{n+2} + \frac{\rho^2}{2n+2} + \frac{\rho^3}{3n+2} + \dots \end{aligned}$$

*Coefficient balistique des bombes d'aviation.* — Comme application des formules, soit à calculer le coefficient balistique  $b_n$  d'une bombe tombant en chute libre connaissant  $y$  et  $t$ . On trouve

$$b_n = \frac{(n+1)(n+2)}{n+3} \frac{1}{g^{n-1} t^n} \left( \frac{gt^2}{2y} - 1 \right).$$

Si la loi de résistance de l'air est quadratique, on a, en chaque point, l'origine des  $y$  et des  $t$  étant le point où la vitesse est nulle :

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{\frac{gt^2}{2}} = \text{const.}$$

Dans le cas d'une loi  $n^{\text{ième}}$ , on a

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{\frac{gt^2}{2}} = K t^{n-2}.$$

**145. Problèmes sur le mouvement dans le voisinage du point culminant.** — **PREMIER PROBLÈME.** — *On lance un corps de bas en haut avec une vitesse  $V_0$ ; quelle est la perte de vitesse qu'il aura subie en retombant à la même altitude  $y$ ?*

Prenons le cas d'une résistance monome.

Dans le mouvement ascendant jusqu'au point culminant ( $v = 0$ ), on aura

$$gy = \frac{1}{2} V_0^2 - \frac{b_n}{g} \frac{1}{n+2} V_0^{n+2} + \left(\frac{b_n}{g}\right)^2 \frac{1}{2n+2} V_0^{2n+2} + \dots$$

Dans le mouvement descendant, pour l'ordonnée  $Y$ , à partir de  $V_0 = 0$ ,

on a

$$g\lambda = \frac{1}{2}v^2 + \frac{b_n}{g} \frac{1}{n+2} v^{n+2} + \left(\frac{b_n}{g}\right)^2 \frac{1}{2n+2} v^{2n+2} \dots$$

Égalant ces deux valeurs de  $\lambda$ , il viendra

$$0 = \frac{1}{2}(V_0^2 - v^2) - \frac{b_n}{g} \frac{1}{n+2} (V_0^{n+2} + v^{n+2}) \\ + \left(\frac{b_n}{g}\right)^2 \frac{1}{2n+2} (V_0^{2n+2} - v^{2n+2}) - \left(\frac{b_n}{g}\right)^3 \frac{1}{3n+2} (V_0^{3n+2} + v^{3n+2}) + \dots$$

Posons  $v = V_0 - \varepsilon$ . On a, par la formule du binôme :

$$v^m = V_0^m \left(1 - \frac{\varepsilon}{V_0}\right)^m \\ = V_0^m \left[1 - m \frac{\varepsilon}{V_0} + \frac{m(m-1)}{2!} \left(\frac{\varepsilon}{V_0}\right)^2 - \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} \left(\frac{\varepsilon}{V_0}\right)^3 + \dots\right]$$

Portant dans l'égalité ci-dessus, développant, et ordonnant les termes, il viendra

$$\frac{b_n}{g} \frac{2}{n+2} V_0^{n+2} + \left(\frac{b_n}{g}\right)^2 \frac{2}{3n+2} V_0^{3n+2} + \left(\frac{b_n}{g}\right)^3 \frac{2}{5n+2} V_0^{5n+2} + \dots \\ = \varepsilon \left[ V_0 + \frac{b_n}{g} V_0^{n+1} + \left(\frac{b_n}{g}\right)^2 V_0^{2n+1} + \left(\frac{b_n}{g}\right)^3 V_0^{3n+1} + \dots \right] \\ - \frac{\varepsilon^2}{2} \left[ 1 + \frac{b_n}{g} (n+1) V_0^n + \left(\frac{b_n}{g}\right)^2 (2n+1) V_0^{2n} + \dots \right] \\ + \frac{\varepsilon^3}{3!} \left[ \frac{b_n}{g} n(n+1) V_0^n + \left(\frac{b_n}{g}\right)^2 2n(2n+1) V_0^{2n} + \dots \right].$$

D'après cela,  $\frac{\varepsilon}{V_0}$  est de l'ordre de  $\frac{b_n V_0^n}{g}$ . Si donc on conserve les termes en  $\varepsilon^2$ , il faudra prendre

$$\frac{b_n}{g} \frac{2}{n+2} V_0^{n+2} = \varepsilon \left[ V_0 + \frac{b_n}{g} V_0^{n+1} \right] - \frac{\varepsilon^2}{2},$$

d'où l'on tire, pour l'expression de  $\varepsilon = V_0 - v$ , la valeur

$$\varepsilon \left( 1 + \frac{b_n}{g} V_0^n \right) = \frac{2}{n+2} \frac{b_n}{g} V_0^{n+1} \left( 1 + \frac{b_n}{g} \frac{V_0^n}{n+2} \right),$$

ou

$$V_0 - v = \frac{2}{n+2} \frac{b_n}{g} V_0^{n+1} \left( 1 - \frac{n+1}{n+2} \frac{b_n V_0^n}{g} \right),$$

ou encore, puisque  $\frac{b_n V_0^n}{g} = 1$ , en introduisant la vitesse terminale  $V'$  :

$$\frac{v}{V_0} = 1 - \frac{2}{n+2} \left( \frac{V_0}{V'} \right)^n \left[ 1 - \frac{n+1}{n+2} \left( \frac{V_0}{V'} \right)^n + \dots \right].$$

Telle est la formule qui résout le problème posé.

La perte de force vive est donnée par la formule

$$V_0^2 - v^2 = \frac{4V_0^2}{n+2} \left(\frac{V_0}{V}\right)^n \left[1 - \left(\frac{V_0}{V}\right)^n - \dots\right].$$

*Remarque.* — Dans le cas de  $n = 2$ , on a

$$\frac{v}{V_0} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{V_0}{V}\right)^2 \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{V_0}{V}\right)^2 + \dots\right].$$

On peut vérifier que cette formule coïncide bien avec le développement suivant les puissances de  $\frac{V_0}{V}$  de la formule de Lambert (134) :

$$\frac{V_0}{V} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{V_0^2}{V^2}}}.$$

DEUXIÈME PROBLÈME. — Un corps tombe sans vitesse; il arrive à un plan situé à une hauteur  $\gamma$ , au-dessous de son point de départ au bout d'un temps  $t$ . Dans le vide, il aurait mis un temps  $(t - \alpha)$ . Quel est le retard  $\alpha$  qu'il a subi du fait de la résistance de l'air?

On a, dans l'air :

$$g\gamma = \frac{1}{2}v^2 + \frac{b_n}{g} \frac{v^{n+2}}{n+2} + \dots,$$

$$gt = v + \frac{b_n}{g} \frac{v^{n+1}}{n+1} + \dots$$

et, dans le vide :

$$g\gamma = \frac{1}{2}(v + \eta)^2, \quad g(t - \alpha) = v + \eta.$$

Égalant les valeurs de  $g\gamma$ , on en déduit pour  $\eta$  la valeur suivante :

$$\eta = \frac{1}{n+2} \frac{b_n}{g} v^{n+1}.$$

Portant dans la seconde équation, il vient

$$\alpha = t - \frac{v}{g} - \frac{1}{g} \frac{1}{n+2} \frac{b_n}{g} v^{n+1}.$$

Remplaçant  $t$  par sa valeur, on aura

$$\alpha = \frac{1}{g} \frac{b_n}{g} v^{n+1} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{g} \frac{b_n}{g} \frac{v^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$$

ou encore, en fonction du temps  $t$  :

$$\alpha = \frac{b_n}{(n+1)(n+2)} g^{n-1} t^{n+1}.$$

Le capitaine Bréger, dans ses études sur les chronographes, a employé une formule qui est un cas particulier ( $n = 2$ ) de la précédente :

$$a = \frac{1}{3.4} b_1 g t^3.$$

*Remarque.* — Par une méthode analogue, on pourra calculer les termes successifs de la série du mouvement descendant lorsque le mobile part d'une vitesse initiale nulle, auquel cas les développements de Mac-Laurin du n° 141 ne sont pas applicables.

On a, pour les premiers termes :

$$y = \frac{gt^2}{2} \left[ 1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)} \frac{b_n}{g} (gt)^n - \frac{2(3n+2)}{(n+1)(2n+1)(2n+2)} \frac{b_n^2}{g^2} (gt)^{2n} + \dots \right].$$

**146. Mouvement au voisinage de la vitesse terminale.** — Les séries précédentes, quand on y fait, pour le mouvement descendant, la vitesse  $v$  voisine de la vitesse terminale  $V'$ , ne donnent plus qu'un développement tout à fait illusoire, car les fonctions  $t$  et  $y$  croissent au delà de toute limite, tandis que la variable  $v$  n'éprouve que des variations insignifiantes. Aussi le problème doit il être traité à part.

Supposons donc que le projectile soit arrivé à posséder, dans son mouvement descendant soit sur la branche  $O\Omega'$ , soit sur la branche  $\Omega'\Omega'_1$  de la courbe du n° 129, une vitesse  $v$  peu différente en moins ou en plus de la vitesse terminale  $V'$ .

Posons identiquement  $v = V' - (V' - v)$  et supposons  $(V' - v)$  une petite quantité, relativement à laquelle nous effectuons les développements en série des deux formules du mouvement descendant :

$$g \, dt = \frac{dv}{1 - \frac{cF(v)}{g}} \quad \text{et} \quad g \, dy = \frac{v \, dv}{1 - \frac{cF(v)}{g}}.$$

On écrira, pour la première, en développant la fonction  $F(v)$  par la formule de Taylor :

$$1 - \frac{cF(v)}{g} = 1 - \frac{c}{g} F(V') + \frac{c}{g} (V' - v) F'(V') - \frac{c}{g} \frac{(V' - v)^2}{2} F''(V') + \dots,$$

et, comme  $\frac{c}{g} F(V') = 1$ , il viendra, en n'allant pas au delà des termes en  $F''$  :

$$cF'(V') \, dt = - \frac{d(V' - v)}{V' - v} - \frac{1}{2} \frac{F''}{F'} d(V' - v) + \dots$$

On intégrera, avec l'hypothèse  $v = V_0$ , pour  $t = 0$  :

$$cF't = \log \frac{V' - V_0}{V' - v} + \frac{1}{2} \frac{F''}{F'} (v - V_0) + \dots$$

L'ordonnée  $y$  s'intégrera d'une manière tout à fait analogue par l'équation

$$cF'y = V' \log \frac{V' - V_0}{V' - v} + \left( \frac{V' F''}{2F'} - 1 \right) (v - V_0) + \dots$$

Enfin, l'élimination de  $v$  entre ces deux équations donnera la formule

$$y = V't - \frac{V' - V_0}{cF'} (1 - e^{-cF't}) + \dots$$

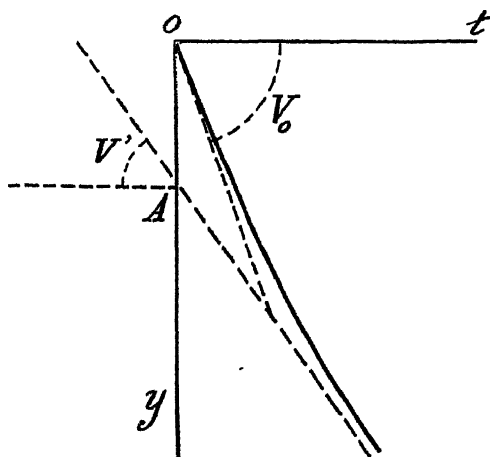
Mais, si  $F(v) = B_n v^n$ , on a

$$F' = n B_n v^{n-1},$$

d'où

$$\frac{c}{g} F' = n \frac{c}{g} \frac{F}{v};$$

Fig. 151.



et comme  $\frac{c}{g} F(V') = 1$ , on a

$$\frac{c}{g} V' F' = n.$$

Donc, on aura la formule

$$y = V't - \frac{V' - V_0}{ng} V' \left( 1 - e^{-ng \frac{t}{V'}} \right).$$

Ainsi le mouvement tend à devenir uniforme, avec une allure exponentielle.

La courbe  $(y, t)$  part du point  $O$  avec une tangente égale à  $V_0$ ; elle admet une asymptote inclinée de l'angle  $V'$  et qui coupe  $Oy$  au point  $A$  tel que :

$$OA = \frac{V_0 - V'}{e F'},$$

qu'on peut écrire encore

$$OA = \frac{1}{n} \frac{(V_0 - V') V'}{g}.$$

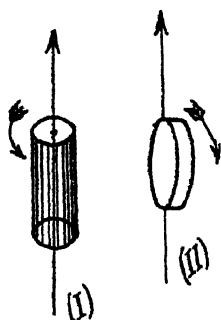
## V. — LA TRAJECTOIRE DES PROJECTILES CYLINDRIQUES ET DISCOÏDES.

**147. Hypothèses de la théorie.** — Comme application intéressante de l'étude qui vient d'être faite du mouvement vertical, nous traiterons le cas du mouvement dans l'air des projectiles *cylindriques* et *discoïdes*.

Ces deux espèces de projectiles, qui sont constitués l'un et l'autre par un cylindre de révolution, diffèrent au point de vue balistique en ceci : pour les *cylindriques* (I), la rotation autour de l'axe de figure que leur impriment les rayures du canon est, à la bouche, parallèle à la tangente initiale; pour les *discoïdes* (II), la rotation est, à la bouche, perpendiculaire à cette tangente.

Mais la théorie balistique des uns et des autres est la même, au degré, cependant, où nous pousserons notre étude qui est seulement qualitative; c'est cette première approximation que nous permet d'atteindre l'hypothèse suivante.

Fig. 157.



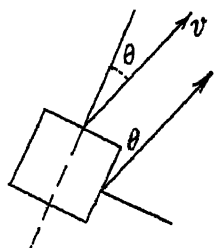
Si un plan se meut dans l'air avec une vitesse  $v$ , faisant avec la direction de la normale au plan un angle  $\theta$ , la résistance que l'air lui oppose est due à la seule vitesse  $v \cos \theta$ , normale au plan et appliquée au centre de figure de ce plan : elle sera donc exprimable par la formule  $c_1 F(v \cos \theta)$ ,

où  $c_1$  représente le *coefficient balistique* relatif à la section  $S_1$  du plan.

La même décomposition en deux forces sur la surface cylindrique du projectile conduira à exprimer la force agissante par  $c_2 F(v \sin \theta)$  et à la supposer appliquée au milieu de l'axe du projectile.

La résultante des actions de l'air passera ainsi au centre de gravité du cylindre; il n'existera, par suite, aucun couple perturbateur du mouvement de rotation, qui se conservera sans changement : *l'axe du projectile se maintiendra toujours dans la direction initiale.*

Fig. 151.



La nature de ces hypothèses ne permet d'espérer, par leur développement, autre chose qu'une indication générale sur les phénomènes qui se passent en réalité. Elles suffisent cependant pour expliquer certains mouvements balistiques d'apparence paradoxale, qu'on peut avoir l'occasion d'observer.

**148. Équations du mouvement des projectiles cylindriques et discoïdes.** — Supposons un projectile cylindrique (le raisonnement et les formules sont d'ailleurs tout à fait analogues pour les projectiles discoïdes) animé d'une grande vitesse de rotation autour de son axe de figure; à l'origine, cet axe coïncide avec la tangente à la trajectoire qu'il va décrire dans l'air, sous l'action de la vitesse  $V_0$  qui lui est imprimée; l'angle de projection est  $\alpha$ .

La vitesse de rotation restera inchangée et l'axe conservera une direction fixe dans l'espace.

Prenons pour axes de coordonnées :  $Oz$  direction de la tangente initiale et  $O\xi$  perpendiculaire à  $Oz$ , dans le plan de projection. Le projectile étant en  $M$ , si  $\theta$  est l'inclinaison de la tangente à la trajectoire, c'est-à-dire de la vitesse  $v$  sur l'axe  $Oz$ , les deux composantes de cette vitesse seront :

$$\begin{aligned} v \cos \theta, & \text{ normalement à la tête du projectile,} \\ v \sin \theta, & \text{ normalement à la surface latérale} \end{aligned}$$

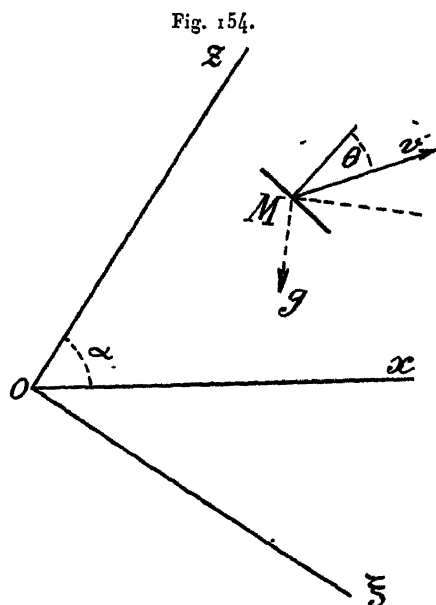


Les composantes de la *résistance* seront donc, dans notre hypothèse :

$$-c_1 F(v \cos \theta) \text{ sur } Oz \quad \text{et} \quad -c_2 F(v \sin \theta) \text{ sur } O\xi.$$

Les composantes de la gravité seront :

$$-g \sin \alpha \text{ sur } Oz \quad \text{et} \quad g \cos \alpha \text{ sur } O\xi.$$



On aura donc, pour équations différentielles du mouvement, en projetant sur  $Oz$ , puis sur  $O\xi$  :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -g \sin \alpha - c_1 F(v \cos \theta),$$

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = g \cos \alpha - c_2 F(v \sin \theta).$$

Mais on a

$$\frac{dz}{dt} = v \cos \theta \quad \text{et} \quad \frac{d\xi}{dt} = v \sin \theta.$$

Par suite, les deux équations deviennent

$$\frac{d(v \cos \theta)}{dt} = -g \sin \alpha - c_1 F(v \cos \theta),$$

$$\frac{d(v \sin \theta)}{dt} = g \cos \alpha - c_2 F(v \sin \theta).$$

Ainsi donc, les variables se trouvent séparées : les deux mouvements

suitant les axes sont indépendants l'un de l'autre et sont ceux d'un point lancé verticalement en l'air, problème dont la solution est connue.

On aura par suite, suivant  $Oz$  :

$$t = - \int_{V_0}^{v \cos \theta} \frac{d(v \cos \theta)}{g \sin \alpha + c_1 F(v \cos \theta)}, \quad z = - \int_{V_0}^{v \cos \theta} \frac{v \cos \theta d(v \cos \theta)}{g \sin \alpha + c_1 F(v \cos \theta)}.$$

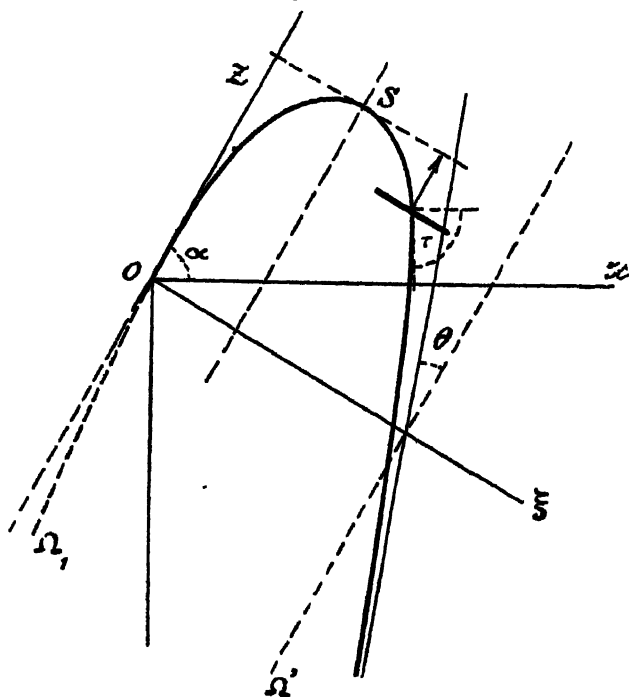
Sur  $O\xi$ , on établit deux équations analogues, en remarquant toutefois que les limites des intégrales sont  $v \sin \theta$  et 0 :

$$t = \int_0^{v \sin \theta} \frac{d(v \sin \theta)}{g \cos \alpha - c_2 F(v \sin \theta)}, \quad \xi = \int_0^{v \sin \theta} \frac{v \sin \theta d(v \sin \theta)}{g \cos \alpha - c_2 F(v \sin \theta)}.$$

L'élimination de  $v \cos \theta$  entre  $t$  et  $z$ , celle de  $v \sin \theta$  entre  $t$  et  $\xi$ , celle de  $t$  entre les deux dernières permettraient de déterminer la trajectoire et toutes les circonstances du mouvement.

149. Formes de la trajectoire. — 1° Si  $\alpha > 0$ , le mouvement suivant

Fig. 155.



l'axe  $Oz$  est celui d'un mouvement ascendant. La vitesse  $v \cos \theta$  part de la valeur  $V_0$  à l'origine, pour  $\theta = 0$ ; elle diminue et s'annule pour une

certaine valeur de  $t$ . La vitesse est alors dirigée parallèlement à l'axe  $O\xi$ .

À partir de ce moment, la projection du mobile sur  $Oz$  descendra et le mouvement sera réglé par l'équation différentielle

$$\frac{dv \cos \theta}{dt} = g \sin \alpha - c_1 F(v \cos \theta),$$

qui est celle du mouvement descendant, partant d'une vitesse nulle.

2° Suivant  $O\xi$ , on a un mouvement descendant, partant du point  $O$  avec une vitesse nulle. La vitesse  $v \sin \theta$  augmentera donc constamment jusqu'à la vitesse terminale  $V'$  donnée par l'équation

$$g \cos \alpha = c_2 F(V' \sin \theta'),$$

$\theta'$  étant la limite de  $\theta$ .

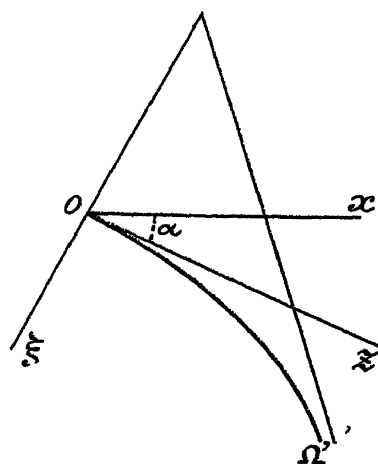
D'autre part, l'équation du mouvement descendant suivant  $Oz$  à partir de  $S$  donnera, à la limite, la relation

$$g \sin \alpha = c_1 F(V' \cos \theta').$$

Ces deux relations permettent de déterminer les deux inconnues  $V'$  et  $\theta'$ .

La courbe présente une asymptote oblique et affecte la forme de la figure 155.

Fig. 156.



Si  $\alpha < 0$ , le mouvement suivant  $Oz$  est descendant avec une vitesse initiale  $V_0$  (fig. 156).

**150. Résistance monome.** — 1° Dans le cas d'une résistance  $F(v) = B_n v^n$ ,

les inconnues  $V'$  et  $\theta'$  sont liées par les relations

$$g \sin \alpha = c_1 B_n V'^n \cos^n \theta',$$

$$g \cos \alpha = c_2 B_n V'^n \sin^n \theta'.$$

On en déduit

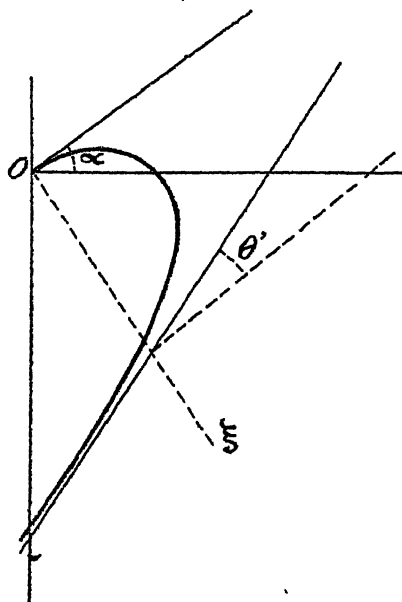
$$\tan^n \theta' \tan \alpha = \frac{c_1}{c_2}$$

et

$$V'^2 = \left( \frac{g}{B_n} \right)^{\frac{2}{n}} \left[ \left( \frac{\sin \alpha}{c_1} \right)^{\frac{2}{n}} + \left( \frac{\cos \alpha}{c_2} \right)^{\frac{2}{n}} \right].$$

Si l'angle asymptotique  $\theta'$  est plus petit que  $\left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$ , l'asymptote coupera la verticale au-dessous du point O; il en sera de même de la courbe.

Fig. 157.



On aura dans ce cas

$$\tan \theta' < \cot \alpha, \quad \text{c'est à-dire} \quad \tan^n \theta' < \cot^n \alpha,$$

d'où

$$\tan^{n-1} \alpha < \frac{c_2}{c_1}.$$

A la relation d'égalité correspond la limite de l'angle  $\alpha$  pour lequel a lieu cette propriété.

Si  $c_2 = c_1$ , l'angle limite est  $\frac{\pi}{4}$ .

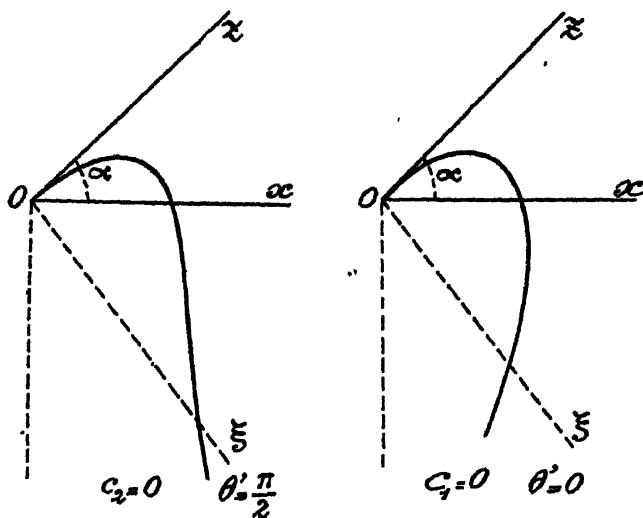
2° Si  $c_2$  est très petit par rapport à  $c_1$ , on a

$$\theta' = \frac{\pi}{2};$$

Si  $c_1$  est très petit par rapport à  $c_2$ , on a

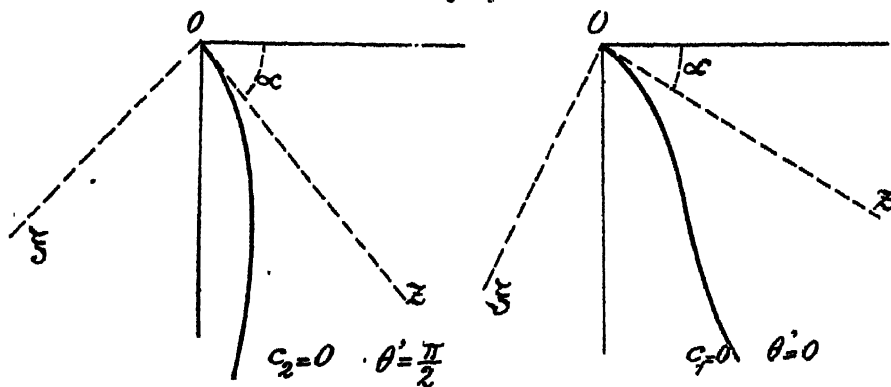
$$\theta' = 0.$$

Fig. 158.



Formes pour  $\alpha > 0$ .

Fig. 159.



Formes pour  $\alpha < 0$ .

Les figures ci-dessus représentent des formes limites de trajectoires.

3° Si l'on fait  $\alpha = 0$ , les équations du mouvement sont :

$$\frac{d(v \cos \theta)}{dt} = -c_1 F(v \cos \theta),$$

$$\frac{d(v \sin \theta)}{dt} = g - c_2 F(v \sin \theta).$$

Le premier, horizontal, est le mouvement d'un point soustrait à l'action de la pesanteur; il y aura une asymptote ou non suivant que  $\Lambda_0$  sera fini ou infini (92). On a  $\theta' = \frac{\pi}{2}$ ; l'asymptote est verticale.

4° Au point de vue analytique, la courbe se prolongerait en amont de l'origine, correspondant aux vitesses allant de  $\infty$  à  $V_0$  sur  $Oz$  et de  $\infty$  à 0 sur  $O\xi$ . Pour déterminer la direction limite de la courbe au point  $\Omega$ , remarquons que la trajectoire, pour les très grandes valeurs de  $v$ , est presque rectiligne [ $g$  négligeable devant  $F(v)$ ]. L'angle  $\theta$  varie ainsi très peu et est très voisin de sa valeur limite  $\theta_1$ . Les équations du mouvement seront donc

$$\cos \theta_1 \frac{dv}{dt} = c_1 v^n \cos^n \theta_1$$

et

$$\sin \theta_1 \frac{dv}{dt} = c_2 v^n \sin^n \theta_1;$$

d'où

$$c_1 \cos^{n-1} \theta_1 = c_2 \sin^{n-1} \theta_1,$$

c'est-à-dire

$$\tan^n \theta_1 = \frac{c_1}{c_2}.$$

Entre  $\theta_1$  et  $\theta'$  on a donc la relation

$$\tan^n \theta_1 = \tan^n \theta' \tan \alpha.$$

La trajectoire est finie ou infinie au point  $\Omega$ , admet ou non une asymptote, suivant les valeurs du degré  $n$  de la résistance (93). Le mouvement, presque rectiligne, ne dépend plus que des fonctions  $S(v)$  et  $D(v)$  et de leur valeurs limites pour  $v = \infty$ .

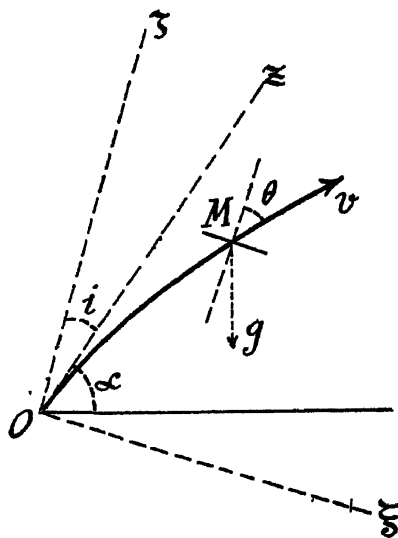
*Remarque.* — La propriété des projectiles discoïdes d'avoir, dans certaines conditions de tir (*fig.* 158), une trajectoire rétrograde qui les rendrait capables d'atteindre un but caché derrière un couvert a attiré l'attention de quelques artilleurs. Le colonel de Saint-Robert, puis le commandant Chapel, ont traité, dans le cas de  $n = 2$ , le problème que nous avons généralisé ci-dessus.

151. **Cas général d'une trajectoire plane.** — Le cas qui vient d'être traité précédemment correspond à l'hypothèse de l'axe initial de rotation

du projectile dirigé soit suivant la tangente initiale, soit suivant la normale, dans le plan initial de projection.

La trajectoire ne cesse pas d'être plane si l'axe de rotation est situé dans le plan vertical passant par la tangente à l'origine, mais possède une direction quelconque dans ce plan. Traitons maintenant ce problème.

Fig 160.



Prenons pour axes de coordonnées la direction  $O\zeta$  de l'axe de rotation qui se conserve constant et qui fait un angle  $i$  avec la tangente initiale  $O\xi$ , et  $O\xi$  perpendiculaire.

L'établissement des équations se fera comme au n° 148, en remarquant que, sur  $O\zeta$ , la projection de  $g$  est  $g \sin(\alpha + i)$  et sur  $O\xi$  est  $g \cos(\alpha + i)$ .

On aura donc, pour équations du mouvement :

$$\frac{d(v \cos \theta)}{dt} = -g \sin(\alpha + i) - c_1 F(v \cos \theta),$$

$$\frac{d(v \sin \theta)}{dt} = g \cos(\alpha + i) - c_2 F(v \sin \theta).$$

Ce sont des équations exactement de même forme que celle du n° 148, en remarquant seulement que, pour  $t = 0$ , on a

$$\frac{d\xi}{d\zeta} = \tan \theta = \tan i.$$

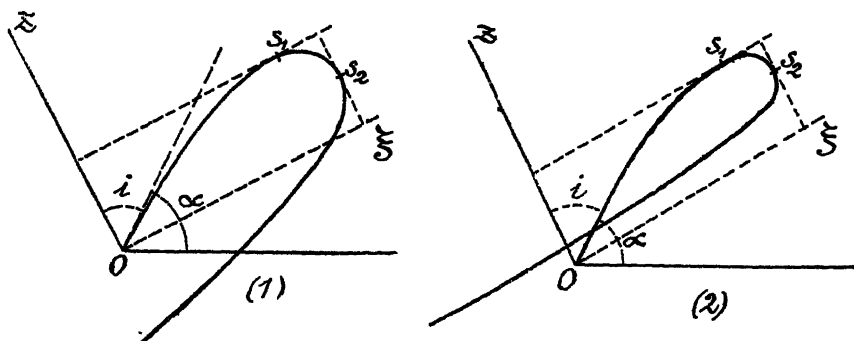
Donc, sur  $O\zeta$ , on aura à considérer un mouvement vertical ascendant

avec une vitesse initiale  $V_0 \cos i$ , puis descendant à partir du sommet; et, sur  $O\xi$ , un mouvement descendant avec une vitesse initiale  $V_0 \sin i$ .

On pourra donc construire la trajectoire comme dans l'exemple du n° 149 et la forme pourra être analogue.

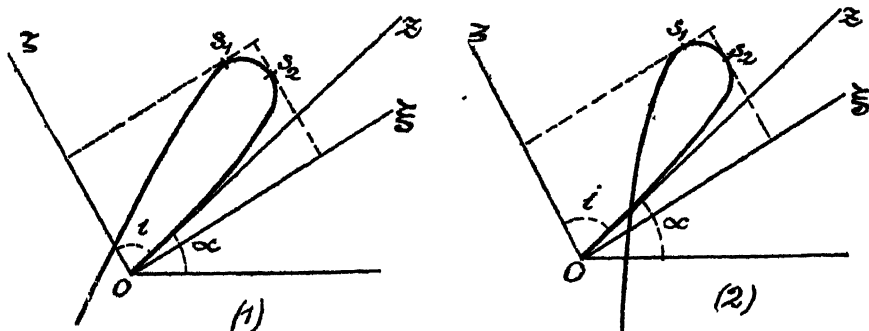
Mais supposons  $\alpha + i > \frac{\pi}{2}$ ; alors  $\cos(\alpha + i)$  est négatif et sur  $O\xi$  nous aurons affaire à un mouvement d'abord ascendant jusqu'à un point où la tangente deviendra parallèle à  $O\xi$ ; puis le mouvement suivant  $O\xi$  deviendra descendant.

Fig. 161.



Pour la discussion,  $i$  doit varier d'ailleurs de 0 à  $\frac{\pi}{2}$ , puisque nous avons vu que si l'axe est parallèle à la tangente ou perpendiculaire, le mouvement est tout à fait le même. On dira donc : si  $\alpha + i < \frac{\pi}{2}$ , on a les mêmes formes qu'au n° 149; si  $\alpha + i > \frac{\pi}{2}$ , on a la forme de la figure 161. Ainsi qu'il est indiqué sur la figure, la courbe peut présenter une boucle au-dessus de l'horizon.

Fig. 162.



Le point double peut se produire à l'origine, ramenant le projectile au point même d'où il a été lancé.



Mais le point  $S_2$ , sommet correspondant à l'annulation de la vitesse suivant  $O\xi$  peut aussi bien être avant  $S_1$  qu'après. À cette hypothèse correspondent les deux formes de la figure 162, la première sans boucle, la deuxième avec boucle. La trajectoire est d'abord au-dessus de la tangente; le projectile monte donc contre la résistance de l'air.

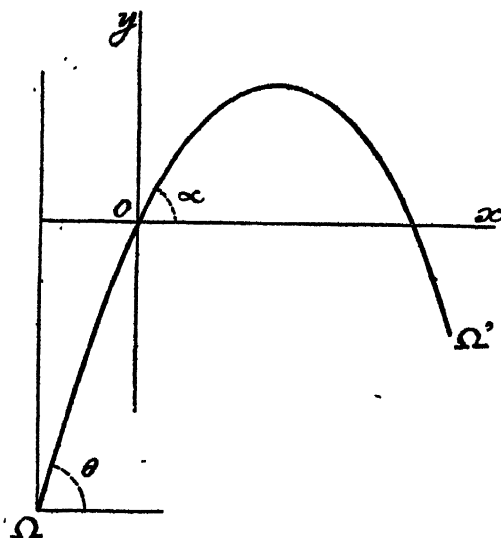
152. Au sujet d'une solution du problème balistique. — 1° Supposons  $i = \frac{\pi}{2} - \alpha$ , on aura  $\theta = \frac{\pi}{2} - \tau$ ; soit, de plus,  $c_1 = c_2$ , et posons  $\zeta = y$  et  $\xi = x$ ; les équations différentielles du mouvement seront :

$$\frac{d(v \sin \tau)}{dt} = -g - cF(v \sin \tau),$$

$$\frac{d(v \cos \tau)}{dt} = -cF(v \cos \tau),$$

c'est-à-dire celles qu'on obtient en décomposant, au point  $(v, \tau)$  la vitesse en deux, horizontale  $u$  et verticale  $w$ , et en supposant que la résistance  $F(v)$  se décompose elle-même de telle sorte, qu'au lieu de  $F(v) \cos \tau$  et  $F(v) \sin \tau$ , on prenne  $F(u)$  et  $F(w)$ .

Fig. 163.



Cette hypothèse, qui n'est exacte que dans le cas d'une résistance linéaire  $F(v) = b, v$ , a été cependant appliquée par certains balisticiens, par exemple Ehrenmalm (1788), au cas d'une résistance quadratique.

C'est la combinaison d'un mouvement horizontal d'un point soumis à

une résistance quadratique  $b_2 u^2$  et d'un mouvement vertical d'un point pesant soumis à la résistance  $b_2 w^2$ .

La trajectoire a la forme de la figure 163 (point  $\Omega$  à distance finie pour  $v = \infty$ , forme parabolique de la branche descendante). L'approximation donnée par cette méthode simple de résolution du problème balistique n'est point, en général, suffisante.

2° *Sur l'indépendance des mouvements.* — La solution si simple qu'on obtient par la décomposition du mouvement suivant la tangente et la verticale a été, sous diverses formes, utilisée par des balisticiens.

Voici ce que dit de Saint-Robert de ces recherches :

« Lorsque le mouvement a lieu dans le vide, ou dans un milieu qui résiste en raison de la simple vitesse, le mouvement du projectile peut se décomposer en deux autres mouvements, selon deux axes quelconques, qui s'effectuent indépendamment l'un de l'autre comme s'ils avaient lieu l'un après l'autre. Mais cette décomposition n'est plus possible lorsque la résistance est exprimée par toute autre fonction de la vitesse : parce que les composantes de la résistance suivant deux axes coordonnés ne sont proportionnelles aux composantes de la vitesse suivant les mêmes axes que dans le cas de la résistance en raison de la première puissance de la vitesse. [En d'autres termes, on n'a  $F(v) \cos \theta = F(v \cos \theta)$  et  $F(v) \sin \theta = F(v \sin \theta)$ , que si  $F(v) = b_1 v$ .]

» Pour n'avoir pas tenu compte de cette circonstance, plus d'un auteur qui a écrit sur la Balistique est tombé dans l'erreur, et c'est en cela précisément que pèche la théorie balistique de Lombard, de Hutton, de Scher de Lionastre, etc. »

Si l'on admet l'hypothèse de l'indépendance des mouvements, les équations différentielles s'écriront

$$\frac{du}{dt} = -cF(u), \quad \frac{dw}{dt} = -g - cF(w)$$

qui s'intégreront immédiatement, la première comme celle du mouvement rectiligne horizontal (90), la deuxième comme celle du mouvement rectiligne vertical (117).

**153. Cas de la trajectoire gauche.** — Supposons maintenant que l'axe de rotation du projectile ne soit plus situé dans le plan vertical contenant la tangente initiale, ni perpendiculaire à ce plan.

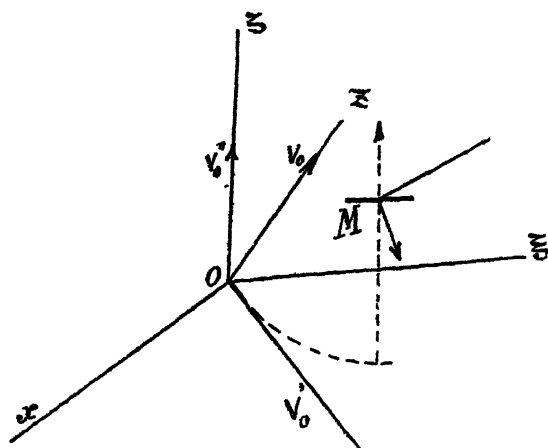
Prenons pour axe  $O\xi$  l'axe de rotation à l'origine et un plan  $xO\xi$  perpendiculaire à  $O\xi$ . L'axe  $O\xi$  sera l'horizontale de ce plan. Sur  $O\xi$ , la somme algébrique des projections des forces qui sollicitent le mobile

arrivé en  $M$  sera composée d'un terme constant dû à la pesanteur et d'un terme dû à la résistance de l'air, fonction  $F(v \cos \theta)$  de la vitesse  $v \cos \theta$  estimée suivant cet axe, d'après les hypothèses qui ont été faites (147).

Le mouvement parallèlement à  $O\xi$  sera donc réglé par les équations du mouvement vertical.

Sur le plan fixe  $\xi O x$ , la somme algébrique des forces qui sollicitent le mobile sera composée d'un terme constant, provenant de la pesanteur, et d'un terme  $F(v \cos \theta)$ , fonction de la projection de la vitesse sur ce

Fig. 164.



plan, toujours d'après les hypothèses faites. Cette résistance sera tangentielle relativement à la projection de la trajectoire sur le plan  $\xi O x$ , de sorte que le mouvement de la projection sur ce plan : 1° est indépendant du mouvement suivant l'axe  $O\xi$ ; 2° est le mouvement d'un point matériel soumis à l'action d'une force constante et d'une résistance tangentielle. C'est donc le problème principal de la Balistique Extérieure.

La question est donc ramenée à l'étude du mouvement de deux projectiles, l'un qui glisserait sans frottement sur l'axe des  $\xi$  en le touchant suivant sa génératrice et auquel on aurait imprimé une vitesse initiale égale à la projection sur cet axe de la vitesse initiale du projectile; le second qui glisserait sans frottement sur le plan des  $\xi\xi$  en le touchant toujours par sa base et auquel on aurait imprimé à l'origine une vitesse égale à la projection de la vitesse initiale sur le plan des  $\xi\xi$ .

Ces deux projectiles sont les projections du projectile réel pendant son mouvement dans l'air.

154. **Boomerang.** — A la théorie des projectiles discoïdes se rattache immédiatement celle de l'arme australienne dénommée *boomerang*. C'est un bâton recourbé, en forme d'arc parabolique, aplati de manière à présenter par sa tranche une très faible épaisseur.

« Pour lancer ce projectile, on l'incline par rapport à l'horizon et on lui communique à la main dans son plan un double mouvement, savoir une translation et une rotation autour de son centre de gravité. Le boomerang s'échappe et, en général, on le voit décrire dans l'air, en tournant sur lui-même, une parabole qui reste sensiblement dans le plan de l'appareil au départ.

» Le boomerang peut être regardé comme symétrique par rapport à un plan moyen. Il en résulte que son ellipsoïde central d'inertie a ce plan pour plan principal; la perpendiculaire au plan moyen élevée du centre de gravité est donc un axe principal, c'est-à-dire un axe naturel de rotation autour duquel la rotation, une fois commencée, peut se prolonger indéfiniment si des forces n'interviennent pas pour le modifier » (Collignon).

Le problème à résoudre est exactement celui qui vient d'être traité. Le plan des  $xO\xi$  est perpendiculaire à l'axe de rotation  $O\zeta$  du boomerang.

$O\xi$  est une horizontale de ce plan;  $Ox$ , la ligne de plus grande pente.

La vitesse initiale  $V_0$  a pour projection  $V'_0$  sur le plan  $\xi O x$  et  $V''_0$  suivant  $O\zeta$ . Sur le plan, la courbe décrite sera presque une parabole, car le boomerang se présente à l'air par sa tranche amincie. Suivant  $O\zeta$ , le mouvement vertical sera très retardé par la résistance de l'air qui agit sur la surface plane du boomerang.

De ces deux mouvements, résulte une trajectoire variée, suivant les conditions initiales du mouvement qui mettent en jeu trois données arbitraires, le plan  $\xi O x$ , l'angle de projection du boomerang, la vitesse de projection. Ainsi, comme cas particulier, l'instrument pourra monter en ligne droite suivant la ligne de plus grande pente  $Ox$  du plan, puis redescendre en suivant la même ligne de même qu'un corps pesant lancé de bas en haut monte et redescend suivant la verticale.

Le chavirement de l'instrument se produira quand, par suite de la diminution de la vitesse de rotation due à l'action permanente d'un couple produit dans le plan moyen par la résistance de l'air sur la tranche du boomerang, la stabilité autour de l'axe naturel ne sera plus assurée. La loi de la chute sera alors tout autre que dans le cas simple qui vient d'être traité.





---

# DEUXIÈME PARTIE.

## LES THÉORÈMES GÉNÉRAUX DE LA BALISTIQUE.

---

### LIVRE III.

#### LES PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DE LA TRAJECTOIRE ATMOSPHÉRIQUE.

---

#### CHAPITRE I.

##### ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU MOUVEMENT.

---

##### I. — FORME USUELLE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

133. **Les deux équations du second ordre.** — Dans l'étude du problème balistique principal (§), on se propose de déterminer le mouvement d'un point matériel, de masse  $m$ , soumis à l'action de deux forces : la *pesanteur*, dirigée suivant la verticale et la *résistance du milieu*, dirigée suivant la tangente à la trajectoire du point, et en sens inverse du mouvement.

Soient les axes,  $Ox$  horizontal,  $Oy$  vertical. Au temps  $t$ , le point mobile est en  $M$ ; la résistance de l'air  $R$  est une force exprimée en kilogrammes, comme le poids du projectile; la tangente  $MT$  fait, avec l'horizontale  $MM'$ , un angle  $\tau$ , qui est aussi l'angle que fait, avec l'horizon, la résistance  $R$ , que l'on suppose tangentielle (§).

En projetant successivement sur les deux axes  $Ox$  et  $Oy$  on écrira :

Sur l'axe des  $x$ ,

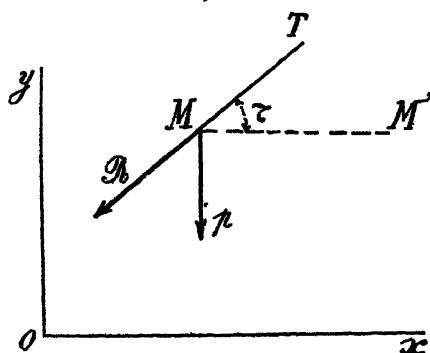
$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -R \cos \tau;$$

Sur l'axe des  $y$ ,

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -p - R \sin \tau.$$

Divisons les deux membres de chaque équation par  $m$ ; la quantité  $\frac{R}{m}$  représente l'accélération  $\delta$  due à la résistance de l'air (7). Cette accélération ne dépend, par hypothèse, pour un projectile donné, que de

Fig. 165.



la vitesse  $v$  de translation; elle a pour expression  $\delta = cF(v)$ . Dans cette formule,  $c$  représente le coefficient balistique :  $c = i\Delta \frac{a^2}{p}$ , et  $F(v)$  une fonction dont on connaît, au moins, une table numérique (7).

On aura donc, pour définir le mouvement principal, les deux équations du second ordre suivantes :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -cF(v)\cos\tau, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g - cF(v)\sin\tau,$$

ou, par une notation plus simple :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -cF\cos\tau, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g - cF\sin\tau.$$

**156. Les quatre équations différentielles du premier ordre.** -- Les deux équations du deuxième ordre ci-dessus sont équivalentes à quatre équations différentielles du premier ordre, qu'on obtiendra très aisément en remarquant que :

$$\frac{dx}{dt} = v\cos\tau \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dt} = v\sin\tau.$$

On aura alors

$$\frac{d(v\cos\tau)}{dt} = -cF\cos\tau, \quad \frac{d(v\sin\tau)}{dt} = -g - cF\sin\tau.$$

Les quatre équations qui viennent d'être écrites peuvent être développées et combinées de plusieurs façons.

Ainsi, développons les  $\frac{d}{dt}$  dans les deux dernières, il vient :

$$(1) \quad \cos \tau \frac{dv}{dt} - v \sin \tau \frac{d\tau}{dt} = -cF \cos \tau;$$

$$(2) \quad \sin \tau \frac{dv}{dt} + v \cos \tau \frac{d\tau}{dt} = -g - cF \sin \tau.$$

Multiplions (1) par  $\sin \tau$  et (2) par  $\cos \tau$  et retranchons (1) de (2), on aura

$$(3) \quad \frac{v d\tau}{dt} = -g \cos \tau.$$

Multiplions (1) par  $\cos \tau$  et (2) par  $\sin \tau$ , et ajoutons; il viendra

$$(4) \quad \frac{dv}{dt} = -g \sin \tau - cF.$$

Par l'élimination de  $dt$ , les équations (3) et (4), combinées, donnent

$$(5) \quad \frac{d(v \cos \tau)}{d\tau} = \frac{c}{g} v F.$$

Pour discuter et résoudre le problème balistique, on pourra prendre d'ailleurs telle ou telle combinaison de ces équations qu'on voudra et nous aurons, plus loin, l'occasion d'en utiliser quelques-unes.

**157. Systèmes des quatre équations usuelles.** — Nous choisirons généralement, pour tout le développement de la théorie du problème balistique principal, les équations (3) et (5) que nous joindrons aux équations de définition de  $v \cos \tau$  et de  $v \sin \tau$ , mais après y avoir remplacé la variable  $dt$  par la variable  $d\tau$ , au moyen de l'équation (3).

1° On obtient ainsi le système des quatre équations suivantes :

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{d(v \cos \tau)}{d\tau} = \frac{c}{g} v F(v), & \text{qui relie l'inclinaison } \tau \text{ à la vitesse } v, \\ dt = -\frac{v}{g} \frac{d\tau}{\cos \tau}, & \text{» le temps } t \text{ à } v \text{ et à } \tau, \\ dx = -\frac{v^2}{g} d\tau, & \text{» l'abscisse } x \text{ à } v \text{ et à } \tau, \\ dy = -\frac{v^2}{g} \tan \tau d\tau, & \text{» l'ordonnée } y \text{ à } v \text{ et à } \tau. \end{array} \right.$$

2° On introduit souvent la variable  $u$ , *vitesse horizontale* définie par la relation  $u = v \cos \tau$ .

On obtient alors le système suivant, identique, excepté la première



équation, à celui du vide (18) :

$$(II) \quad \begin{cases} du = \frac{c}{g} v F(v) d\tau; & dx = -\frac{u^2}{g} \frac{d\tau}{\cos^2 \tau}, \\ dt = -\frac{u}{g} \frac{d\tau}{\cos^2 \tau}; & dy = -\frac{u^2}{g} \tan \tau \frac{d\tau}{\cos^2 \tau}. \end{cases}$$

On remarquera, en plus, l'expression qui donne l'*arc* :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

et, par suite :

$$ds = -\frac{v^2}{g} \frac{d\tau}{\cos \tau} = -\frac{u^2}{g} \frac{d\tau}{\cos^3 \tau}.$$

3° Dans le système (II), l'accélération de la résistance de l'air  $cF$  ne figure que dans la première équation ; au lieu de  $g$ , dans les trois autres, on peut introduire  $cF$ , et l'on obtient le système suivant, qui rappelle, par la forme des équations  $dt$  et  $dx$ , celles du mouvement rectiligne horizontal (90) :

$$(III) \quad \begin{cases} d\tau = \frac{g}{c v F(v)} du, & dx = -\frac{v}{c F(v)} du, \\ dt = -\frac{du}{c F(v) \cos \tau}, & dy = -\frac{v}{c F(v)} \tan \tau du. \end{cases}$$

4° Enfin, au lieu de  $d\tau$  ou de  $du$ , qui entrent comme variables dans les systèmes précédents, on peut prendre un des trois autres infiniment petits ( $dt$ ,  $dx$ ,  $dy$ ). On aura ainsi trois nouveaux systèmes de formules.

Le Tableau suivant (IV) réunit les cinq systèmes obtenus en considérant les cinq variables ( $du$ ,  $d\tau$ ,  $dt$ ,  $dx$ ,  $dy$ ).

TABLEAU (IV).

	$du.$	$d\tau.$	$dt.$	$dx.$	$dy.$
$du...$	-	$\frac{d\tau}{du} = \frac{g}{c v F}$	$\frac{dt}{du} = -\frac{1}{c F \cos \tau}$	$\frac{dx}{du} = -\frac{v}{c F}$	$\frac{dy}{du} = -\frac{v \tan \tau}{c F}$
$d\tau...$	$\frac{du}{d\tau} = \frac{c}{g} v F$	-	$\frac{dt}{d\tau} = -\frac{v}{g \cos \tau}$	$\frac{dx}{d\tau} = -\frac{v^2}{g}$	$\frac{dy}{d\tau} = -\frac{v^2 \tan \tau}{g}$
$dt...$	$\frac{du}{dt} = -c F \cos \tau$	$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{g \cos \tau}{v}$	-	$\frac{dx}{dt} = v \cos \tau$	$\frac{dy}{dt} = v \sin \tau$
$dx...$	$\frac{du}{dx} = -\frac{c F}{v}$	$\frac{d\tau}{dx} = -\frac{g}{v^2}$	$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v \cos \tau}$	-	$\frac{dy}{dx} = \tan \tau$
$dy...$	$\frac{du}{dy} = -\frac{c F}{v \tan \tau}$	$\frac{d\tau}{dy} = -\frac{g}{v^2 \tan \tau}$	$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{v \sin \tau}$	$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\tan \tau}$	-

On pourrait introduire d'autres variables; ainsi, on emploie parfois

l'arc  $s$  tel que  $ds = \frac{dx}{\cos \tau}$ , la vitesse tangentielle  $v$  et la vitesse verticale  $w = v \sin \tau$ .

5° Donnons enfin le système que l'on obtient en remplaçant  $du$  par sa valeur

$$du = d(v \cos \tau) = \cos \tau dv - v \sin \tau d\tau,$$

ce qui donnera les équations suivantes, où  $v$  est la variable indépendante :

$$(V) \quad \begin{cases} d\tau = \frac{g \cos \tau}{v(cF + g \sin \tau)} dv, & dx = -\frac{v \cos \tau}{cF + g \sin \tau} dv. \\ dt = -\frac{dv}{cF + g \sin \tau}, & dy = -\frac{v \sin \tau}{cF + g \sin \tau} dv. \end{cases}$$

En vue de simplifier les notations, on posera très souvent

$$\rho = \frac{cF(v)}{g}.$$

Ainsi, le système (V) ci-dessus pourra s'écrire

$$(V \text{ bis}) \quad \begin{cases} d\tau = \frac{\cos \tau}{v(\rho + \sin \tau)} dv, & dx = -\frac{1}{g} \frac{v \cos \tau}{\rho + \sin \tau} dv, \\ dt = -\frac{1}{g} \frac{dv}{\rho + \sin \tau}, & dy = -\frac{1}{g} \frac{v \sin \tau}{\rho + \sin \tau} dv. \end{cases}$$

**158. Définition de l'hodographe.** — Parmi toutes les équations différentielles qui viennent d'être établies, la première des quatre équations des trois premiers systèmes, savoir :  $\frac{d(v \cos \tau)}{d\tau} = \frac{c}{g} v F(v)$ , possède seule l'importante propriété de n'être fonction que de deux variables, la vitesse  $v$  et l'inclinaison  $\tau$ . Son intérêt particulier résulte du théorème suivant :

*L'intégration de l'équation  $\frac{d(v \cos \tau)}{d\tau} = \frac{c}{g} v F(v)$  permet de ramener immédiatement aux quadratures la solution complète du problème balistique.*

Supposons, en effet, qu'on sache intégrer cette équation et exprimer, par suite,  $v$  en fonction de  $\tau$  sous la forme  $v = \Psi(\tau)$ ; on substituera cette valeur de  $v$  dans les trois autres équations du mouvement (syst. 1), qui prendront alors la forme

$$g dt = -\Psi(\tau) \frac{d\tau}{\cos \tau}, \quad g dx = -\Psi^2(\tau) d\tau, \quad g dy = -\Psi^2(\tau) \tan \tau d\tau.$$

La question est ramenée à de simples quadratures; la solution, au moins théorique, du problème balistique est complète et tous les éléments se trouvent exprimés en fonction de l'inclinaison  $\tau$ .

L'équation différentielle

$$\frac{d(v \cos \tau)}{d\tau} = \frac{c}{g} v F(v)$$

est désignée, en Balistique, sous le nom d'*équation différentielle de l'hodographe*.

**139. Démonstration géométrique de Greenhill.** — Soient deux points voisins  $P_1$  et  $P_2$  de l'arc de trajectoire  $ns$  : les vitesses sont

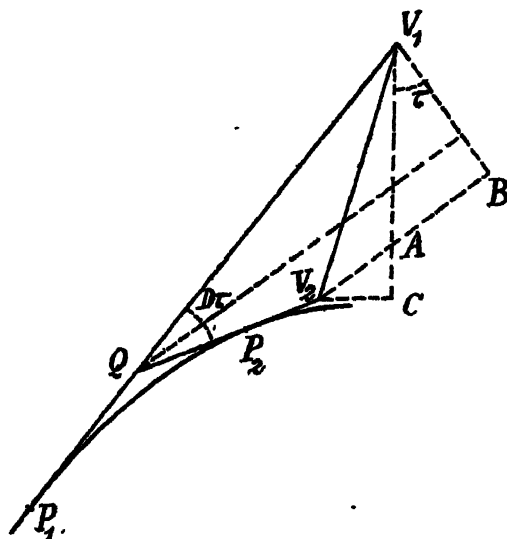
$$\left(v + \frac{1}{2} dv\right) \text{ en } P_1 \quad \text{et} \quad \left(v - \frac{1}{2} dv\right) \text{ en } P_2.$$

Soient

$$QV_1 = v + \frac{1}{2} dv \quad \text{et} \quad QV_2 = v - \frac{1}{2} dv.$$

Le segment  $V_1 V_2$  représentera, en grandeur et direction, l'accélération totale, résultante de  $V_1 A$ , accélération verticale due à la pesanteur, telle

Fig. 166.



que  $V_1 A = g dt$  et de  $V_2 A$  accélération tangentielle de la résistance de l'air.

On a  $V_2 A = c F(v) dt$ . La direction  $V_2 A$  est parallèle à la bissectrice de l'angle  $V_1 Q V_2$ , qui vaut  $dt \tau$ .

$V_1 B$  étant mené perpendiculairement à  $V_1 A$ , l'angle  $AV_1 B$  est égal à  $\tau$ . On a donc

$$V_1 A \cos \tau = V_1 B = (QV_1 + QV_2) \sin \frac{1}{2} d\tau = v \sin \frac{1}{2} d\tau,$$

d'où

$$(1) \quad g \cos \tau = v \frac{\sin \frac{1}{2} d\tau}{\frac{1}{2} dt}.$$

D'autre part,

$$V_2 C = V_2 A \cos \tau = c F \cos \tau dt$$

et

$$V_2 C = QV_1 \cos \left( \tau + \frac{1}{2} d\tau \right) - QV_2 \cos \left( \tau - \frac{1}{2} d\tau \right),$$

d'où

$$c F \cos \tau dt = \left( v + \frac{1}{2} dv \right) \cos \left( \tau + \frac{1}{2} d\tau \right) - \left( v - \frac{1}{2} dv \right) \cos \left( \tau - \frac{1}{2} d\tau \right),$$

c'est-à-dire

$$(2) \quad c F \cos \tau = \frac{dv}{dt} \cos \tau \cos \frac{1}{2} d\tau - v \sin \tau \frac{\sin \frac{1}{2} d\tau}{\frac{1}{2} dt}.$$

Mais, à la limite,

$$\frac{\sin \frac{1}{2} d\tau}{\frac{1}{2} dt} = - \frac{d\tau}{dt}, \quad \frac{dv}{dt} = - \frac{dv}{dt}, \quad \cos \frac{1}{2} d\tau = 1.$$

On a donc, pour (1) et (2) :

$$g \cos \tau = - \frac{v d\tau}{dt}, \quad c F \cos \tau = - \frac{dv}{dt} \cos \tau + v \sin \tau \frac{d\tau}{dt} = - \frac{d(v \cos \tau)}{dt}.$$

Ce sont les deux équations différentielles du mouvement; en éliminant  $dt$ , on aura l'hodographe.

Si l'on calcule  $V_2 B$ , on a

$$V_2 B = (QV_1 - QV_2) \cos \frac{1}{2} d\tau = v \cos \frac{1}{2} d\tau.$$

Mais aussi

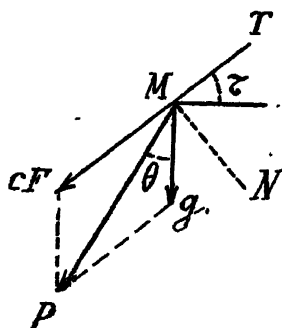
$$V_2 B = V_1 A + AB = c F dt + g \sin \tau dt.$$

On a donc, à la limite :

$$c F + g \sin \tau = - \frac{d(v \sin \tau)}{dt}.$$

projetés, d'une part sur la tangente MT, d'autre part sur la normale MN à la trajectoire au point M. Le rayon de courbure en M est  $r$ .

Fig. 167.



On aura, sur la tangente :

$$\frac{dv}{dt} = -g \sin \tau - cF(v)$$

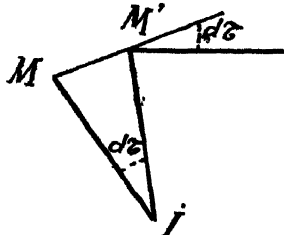
et, sur la normale :

$$\frac{v^2}{r} = -g \cos \tau.$$

La première est l'équation (4) déjà trouvée au n° 156.

La seconde peut se déduire de l'équation (3)  $\frac{v}{dt} \frac{d\tau}{dt} = -g \cos \tau$  de la

Fig. 168.



manière suivante : soient M et M' deux points très voisins : les normales en ces points se coupent en I.

Comme

$$MM' = MI d\tau, \quad MM' = v dt, \quad MI = r,$$

il vient

$$v dt = r d\tau.$$

L'équation  $\frac{v}{dt} \frac{d\tau}{dt} = -g \cos \tau$  pourra donc s'écrire

$$\frac{v^2}{r} = -g \cos \tau,$$

ce qui est l'équation *intrinsèque* sur la normale. On remarquera que cette équation est indépendante de la résistance de l'air.

En projetant sur l'axe des  $x$ , on obtient une équation qui est indépendante de la seconde force, la gravité; c'est l'équation

$$\frac{d(v \cos \tau)}{dt} = -cF(v) \cos \tau.$$

La seconde équation différentielle (153)

$$\frac{d(v \sin \tau)}{dt} = -g - cF(v) \sin \tau$$

peut s'écrire

$$\frac{d(v \sin \tau + gt)}{dt} = -cF(v) \sin \tau.$$

On a donc, en introduisant les vitesses  $u$  et  $w$  :

$$\frac{du}{dt} = -cF(v) \cos \tau, \quad \frac{d(w + gt)}{dt} = -cF(v) \sin \tau,$$

équations très symétriques, qui donnent, dans le *vide* :

$$u = u_0, \quad w = w_0 - gt.$$

*Accélération totale.* — Sur la figure 167, on a représenté en MP, diagonale du parallélogramme construit sur la *gravité*  $g$  et l'*accélération*  $\delta = cF(v)$ , la résultante de ces deux accélérations. C'est l'accélération totale que l'on désignera parfois par la lettre I.

On a, en désignant par  $\theta$  l'angle de I avec la verticale, les formules

$$I^2 = c^2 F^2 + g^2 + 2gcF \sin \tau, \\ \tan \theta = \frac{cF \cos \tau}{g + cF \sin \tau} = \frac{\rho \cos \tau}{1 + \rho \sin \tau}.$$

## II. — ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES EN COORDONNÉES OBLIQUES.

161. *Axes et coordonnées.* — Pour l'étude de certaines questions de Balistique, il est utile de rapporter le mouvement du projectile à deux axes obliques qui sont : 1° la *tangente* Oz à l'origine de la trajectoire; la coordonnée correspondante sera l'*éloignement*  $z$ , au *temps*  $t$ , du projectile suivant cette ligne; 2° la verticale Oy passant par l'origine; les  $y$  sont comptés positivement dans le sens où agit la pesanteur; ils représenteront donc l'*abaissement* du projectile au temps  $t$ , au-dessous de la ligne de projection Oz.

On nomme parfois les axes  $Oz$  et  $Oy$ , qui viennent d'être définis, *axes balistiques* de la trajectoire.

Dans toutes les questions où figurent l'*abaissement*  $y$  et l'*éloignement*  $z$ , ces deux lettres sont écrites en *romaine*. La lettre  $y$ , *italique*, désigne toujours l'*ordonnée*. De même, dans les axes obliques, s'introduira la lettre romaine  $p$  avec la définition  $p = \frac{dy}{dz}$ .

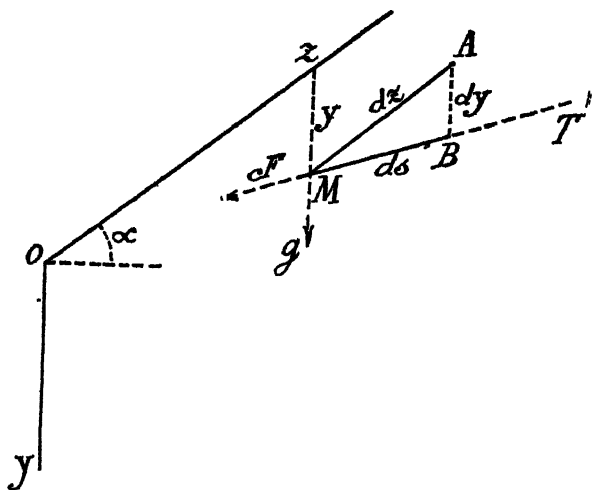
Dans les axes rectangulaires ordinaires, la lettre italique  $p$  est définie par  $p = \frac{dy}{dx} = \tan \tau$ .

**162. Établissement des équations.** — Soit  $M$  la position du projectile au temps  $t$ .

$MT$  étant la tangente à la trajectoire en  $M$ , l'accélération de la résistance de l'air  $cF$  agit en sens inverse de la vitesse  $v$ , dirigée suivant  $MT$ ; l'accélération  $g$  de la gravité agit dans le sens des  $y$  positifs.

Un petit arc de la trajectoire est désigné par  $ds$ ; sa projection oblique sur  $Oz$  est  $dz$  et sa projection oblique sur  $Oy$  est  $dy$  (triangle  $MAB$ ).

Fig. 169.



1° Les composantes de l'accélération  $cF(v)$  suivant les axes balistiques seront :

Suivant  $Oz$ ,

$$cF \frac{dz}{ds}, \quad \text{et, comme } ds = v dt, \text{ on a } \frac{cF}{v} \frac{dz}{dt};$$

Suivant  $Oy$ ,

$$cF \frac{dy}{ds}, \quad \text{et, comme } ds = v \, dt, \text{ on a } \frac{cF}{v} \frac{dy}{dt}.$$

On a donc, pour les équations différentielles du mouvement :

• Suivant  $Oz$ ,

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{cF}{v} \frac{dz}{dt};$$

Suivant  $Oy$ ,

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = g - \frac{cF}{v} \frac{dy}{dt}.$$

2° Nous allons, comme il a été fait précédemment, dans le cas des axes rectangulaires (156), remplacer ces deux équations du second ordre par quatre équations du premier ordre.

Éliminant d'abord  $\frac{cF(v)}{v}$  entre les équations, on a

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} \frac{dz}{dt} - \frac{d^2 z}{dt^2} \frac{dy}{dt} = g \frac{dz}{dt}.$$

Posons maintenant :

$$\frac{dz}{dt} = v_z,$$

$v_z$  est la vitesse du projectile projetée sur  $Oz$  suivant la verticale ;

$$\frac{dy}{dz} = p,$$

$p$  est une quantité qui mesure l'angle de la trajectoire avec  $Oz$  au point  $M$  ; au point  $O$ , la valeur de  $p$  est zéro.

Écrivant  $\frac{dy}{dt} = p \frac{dz}{dt}$  et différentiant, il viendra

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dp}{dt} \frac{dz}{dt} + p \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

En combinant avec (1), on aura

$$dp = \frac{g}{v_z^2} dz,$$

et, d'autre part, en combinant avec  $\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{cF}{v} \frac{dz}{dt}$ , il viendra

$$dv_z = -\frac{v_z^2}{g} \frac{cF}{v} dp.$$

Cette dernière équation ne renferme, en réalité, que deux variables, car  $v$  peut s'exprimer en fonction de  $v_z$  et de  $p$  comme il suit :



Dans le triangle AMB, on a

$$\overline{MB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AM}^2 - 2 AB \cdot AM \cos MAB.$$

Or

$$MB = ds, \quad AB = dy, \quad AM = dz, \quad MAB = \frac{\pi}{2} -$$

On a donc

$$\overline{ds}^2 = \overline{dy}^2 + \overline{dz}^2 - 2 dy dz \sin \alpha$$

ou, en divisant par  $\overline{dz}^2$  :

$$\left(\frac{ds}{dz}\right)^2 = p^2 + 1 - 2 p \sin \alpha.$$

Mais  $\frac{ds}{dz} = \frac{v}{v_z}$ . On a donc

$$v = v_z(1 + p^2 - 2 p \sin \alpha)^{\frac{1}{2}},$$

$v$  est ainsi fonction de  $v_z$  et de  $p$ .

3° On pourra, par suite, adopter, pour la solution du problème balistique, les quatre équations du premier ordre qui suivent :

$$\begin{aligned} dv_z &= -\frac{v_z^2}{g} \frac{cF}{v} dp, & dz &= \frac{v_z^3}{g} dp, \\ dt &= \frac{v_z}{g} dp, & dy &= \frac{v_z^2}{g} p dp. \end{aligned}$$

Ces équations correspondent, une à une, aux équations du n° 137 (I), dans le cas des axes rectangulaires, et il est très facile de passer des premières aux secondes, en faisant  $\sin \alpha = 0$  et  $p = \tan \tau$ , la vitesse  $v_z$  devenant la vitesse horizontale  $u$ . On a d'ailleurs

$$p \sin \alpha - \cos \alpha \tan \tau = \frac{\sin(\alpha - \tau)}{\cos \tau}.$$

La première équation  $dv_z = -\frac{v_z^2}{g} \frac{cF}{v} dp$  n'est fonction que de deux variables et son intégration permettrait de ramener le problème aux quadratures. C'est l'analogue de l'hodographe (138).

4° L'équation (1) qui ne renferme pas la résistance de l'air peut se transformer comme il suit :

$$g \frac{dz}{dt} = \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dz}{dt}}\right) = \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dz}\right) = \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \left(\frac{dz}{dt}\right) \frac{d}{dz} \left(\frac{dy}{dz}\right);$$

d'où

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = g \left( \frac{dt}{dz} \right)^2.$$

C'est l'analogie de l'équation  $\frac{v}{dt} \frac{dt}{dz} = -g \cos \tau$  en coordonnées rectangulaires, et qu'on obtient en projetant le mouvement sur la normale.

**163. Applications.** — 1° *Cas du vide.* — Faisant  $c = 0$ , la première équation du n° 3 donne  $v_z = \text{const.} = V_0$ .

Les équations du mouvement, rapportées aux axes obliques de l'origine seront donc :

$$\begin{aligned} v_z &= V_0, & z &= \frac{V_0^2}{g} p, \\ t &= \frac{V_0}{g} p, & y &= \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{g} p^2. \end{aligned}$$

A ces relations, il faut joindre l'expression de  $p$  en fonction de  $v$  :

$$v = V_0 (1 + p^2 - 2p \sin \alpha)^{\frac{1}{2}}.$$

L'équation de la trajectoire est  $y = \frac{g z^2}{2 V_0^2}$ ; elle est indépendante de l'angle de projection.

2° *Cas d'une résistance linéaire.* Si l'on fait  $cF = b_1 v$ , il viendra

$$dv_z = - \frac{b_1}{g} v_z^2 dp,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{1}{v_z} - \frac{1}{V_0} = \frac{b_1}{g} p.$$

Les équations du mouvement seront alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_z} - \frac{1}{V_0} &= \frac{b_1}{g} p, & z &= \frac{V_0^2}{g} \frac{p}{1 + \frac{b_1 V_0}{g} p}, \\ \frac{b_1 t}{g} &= \log \left( 1 + \frac{b_1 V_0}{g} p \right), & y &= \frac{g}{b_1^2} \left[ \log \left( 1 + \frac{b_1 V_0}{g} p \right) - \frac{b_1 V_0}{g} \frac{p}{1 + \frac{b_1 V_0}{g} p} \right]. \end{aligned}$$

En éliminant  $p$  entre les formules qui donnent  $z$  et  $y$ , on en déduit l'équation de la trajectoire sous la forme

$$y = \frac{g}{b_1^2} \left( \log \frac{V_0}{V_0 - b_1 z} - \frac{b_1 z}{V_0} \right).$$

Elle est indépendante de l'angle de projection  $\alpha$ .

164. **Théorème sur les vitesses.** — Entre la vitesse tangentielle  $v$  et ses projections  $v_z$  et  $v_1$  sur les axes des  $z$  et des  $y$ , on a la relation

$$\frac{v}{\cos \alpha} = \frac{v_z}{\cos \tau} = \frac{v_1}{\sin(\alpha - \tau)}.$$

Différentiant par rapport à  $t$ , on aura

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= g - \frac{v_1}{v} cF(v), \\ \frac{dv_z}{dt} - \frac{dv_1}{dt} \sin \alpha &= -g \sin \alpha - cF(v) \cos(\alpha - \tau). \end{aligned}$$

On a

$$v + v_1 = v_z \left[ \frac{\cos \alpha}{\cos \tau} + \frac{\sin(\alpha - \tau)}{\cos \tau} \right].$$

Quand  $\tau$  se rapproche de  $\alpha$ , on sait qu'à la limite, on aura

$$v_z = v + v_1.$$

Cette relation est rigoureuse pour  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

Les deux équations deviennent alors

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= g - \frac{v_1}{v} cF(v), \\ \frac{dv}{dt} &= -g - cF(v). \end{aligned}$$

La seconde est l'équation ordinaire du mouvement vertical.

Éliminant  $cF(v)$  entre les deux, on obtient

$$\frac{dv_1}{dt} - \frac{v_1}{v} \left( g + \frac{dv}{dt} \right) = g.$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre qu'il est facile d'intégrer.

On trouve

$$v_1 = v \left[ e^{\int_0^t \frac{g}{v} \frac{dt}{v}} - 1 \right].$$

Telle est la formule cherchée; elle est due au lieutenant Littlewood qui l'a utilisée pour le calcul des trajectoires.

Remplaçons  $dt$  par sa valeur et représentons une *fonction balistique*, dépendant de  $v$  et de  $\tau$  par la notation

$$\log I_{v,\tau}'' = - \int_{v_0}^v \frac{g \, dv}{v [g + cF(v)]},$$

on aura

$$v_1 = v (I_{v,\tau}'' - 1).$$

Dans le cas d'une *résistance linéaire*, on verra que l'expression ci-dessus donne

$$v_1 = \frac{v_0 - \frac{b_0}{g} v_0}{1 + \frac{b_0}{g} v_0}.$$

Dans le *vide*,  $v_1 = v_0 - v$ .

On calculera la valeur de  $(y)$  par la formule

$$(y) = \int_0^t v_1 dt.$$

Ainsi, dans le cas d'une résistance linéaire, on a

$$(y) = \frac{1}{1 + \frac{b_1}{g} v_0} (v_0 t - y).$$



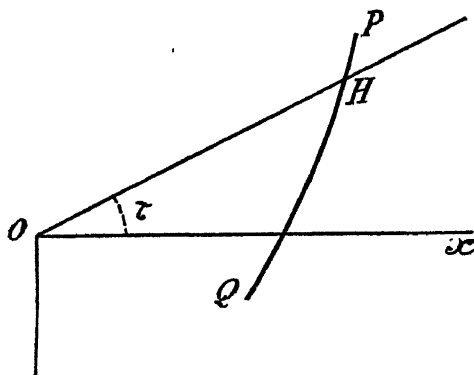
## CHAPITRE II.

### ÉTUDE DE L'HODOGRAPHE.

#### I. — GÉNÉRATION DE L'HODOGRAPHE.

**165. Définition de l'hodographe.** — En Mécanique, on appelle, en général, *hodographe* ou *courbe que décrit la vitesse*, une courbe engendrée comme il suit : par un point fixe  $O$ , on mène, à chaque instant, un vecteur  $OH$  parallèle à la tangente à la trajectoire, c'est-à-dire faisant un angle  $\tau$  avec une droite horizontale  $Ox$ . On prend, sur le

Fig. 170.



vecteur, une longueur  $OH$  égale (à une certaine échelle) à la vitesse  $v$  du point matériel sur la trajectoire. Le point  $H$  décrit ainsi une courbe  $PQ$  qui est l'hodographe.

On démontre de la manière suivante que, dans le cas du problème balistique, l'hodographe qui vient d'être défini, admet bien pour équation différentielle (158)

$$\frac{d(v \cos \tau)}{d\tau} = \frac{c}{g} v F(v).$$

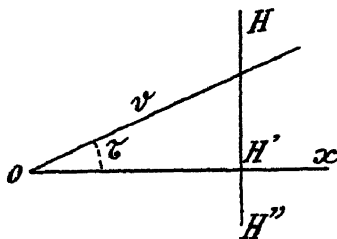
Soient deux rayons vecteurs  $OH$  et  $OK$  infiniment voisins, de longueur  $v$  et  $(v + dv)$ , faisant avec l'arc  $Ox$  des angles  $\tau$  et  $(\tau + d\tau)$ .



166. **Cas particuliers de l'hodographe.** — 1° *VIDE.* — *L'hodographe est une verticale.* — En effet, si  $c = 0$ , l'équation de l'hodographe donne

$$d(v \cos \tau) = 0, \quad \text{d'où} \quad v \cos \tau = \text{const.}$$

Fig. 172.



C'est la propriété connue de la constance de la vitesse horizontale dans le vide.

L'hodographe est la verticale  $HH'H''$  située à une distance  $OH' = V_0 \cos \alpha$  de l'origine.

2° **MOUVEMENT RECTILIGNE.** — *L'hodographe est une droite passant par l'origine.* — Car si  $g = 0$ , on doit avoir

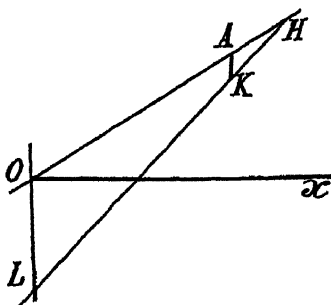
$$d\tau = 0, \quad \text{d'où} \quad \tau = \text{const.} = \alpha.$$

L'hodographe est le vecteur d'inclinaison  $\alpha$  passant par l'origine.

On aura aussi, nécessairement,  $d\tau = 0$  quand  $\tau = \pm \frac{\pi}{2}$ , cas auquel le numérateur  $d(v \cos \tau)$  est identiquement nul ; c'est le cas du mouvement vertical.

3° **RÉSISTANCE LINÉAIRE.** — *L'hodographe est une ligne droite.* —

Fig. 173.



Soit H un point de l'hodographe. Pour obtenir la tangente en H, on a vu (165) qu'il fallait prendre  $HA = c F dt$  et  $AK = g dt$ .

Dans le cas actuel, on a  $V(v) = B_1 v$ ,  $cB_1 = b_1$ . On écrira donc  $HA = b_1 v dt$ .

Soit L le point où la tangente HK rencontre la verticale du point O. On aura

$$\frac{OL}{LK} = \frac{OH}{AH} = \frac{1}{b_1 dt}, \quad \text{d'où} \quad OL = \frac{g}{b_1}.$$

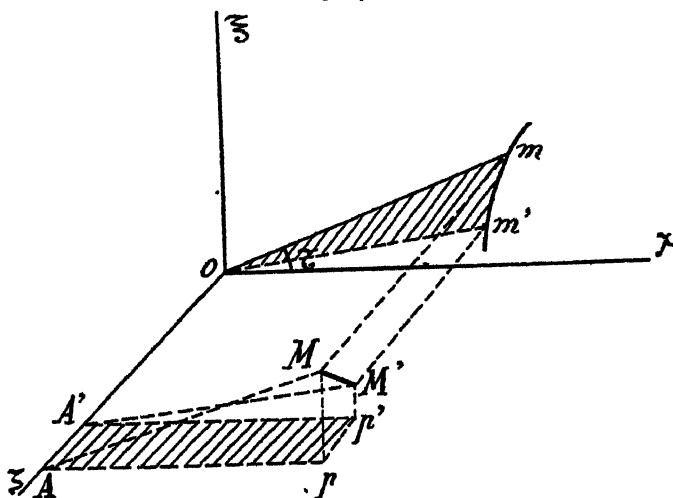
Le point L est donc un point fixe, et, par suite, l'hodographe est la droite HL elle-même.

**167. Théorèmes du colonel Henry.** — Nous avons montré (158) comment l'intégration de l'hodographe permet de ramener immédiatement à des quadratures la solution complète du problème balistique. Si l'on a, en effet,  $v = \Psi(\tau)$ , les équations du mouvement prennent la forme

$$gt = - \int_{\alpha}^{\tau} \Psi(\tau) \frac{d\tau}{\cos \tau}; \quad gx = - \int_{\alpha}^{\tau} \Psi^2(\tau) d\tau; \quad gy = - \int_{\alpha}^{\tau} \Psi^2(\tau) \tan \tau d\tau.$$

Voici une interprétation géométrique de ces équations.

Fig. 174.



Soit tracé l'hodographe H dans le plan  $\xi O \gamma$ . Les trois équations différentielles du mouvement sont (157, I) :

$$dt = - \frac{v}{g} \frac{d\tau}{\cos \tau}, \quad dx = - \frac{v^2}{g} d\tau, \quad dy = - \frac{v^2}{g} \tan \tau d\tau.$$

1° Soient les deux points  $mm'$  infiniment voisins sur l'hodographe.



L'aire élémentaire  $Omm'$  est égale à  $\frac{1}{2}v^2 d\tau$ . Donc  $g dx$  est le double de cette aire élémentaire.

2° Soit  $O\zeta$  une normale au plan  $\xi O\gamma$  de l'hodographe; en chaque point  $m$  de cette courbe, menons une droite  $mM$  parallèle à  $O\zeta$  et égale à  $\text{tang}\tau$ . Comme  $dy = dx \text{ tang}\tau$ , on aura

$$g dy = 2Mm \text{ aire } Omm'.$$

Si l'on mène alors  $MA$  parallèle à  $Om$ , cette droite aura pour équations

$$\zeta = \text{tang}\tau \quad \text{et} \quad \xi = \gamma \text{ tang}\tau.$$

Elle engendre donc le paraboloid  $\zeta = \frac{\xi}{\gamma}$  et l'on peut dire :

*Le produit  $g dy$  est le double du volume élémentaire compris dans le cylindre droit qui a pour base l'hodographe, entre cet hodographe et le paraboloid  $\zeta = \frac{\xi}{\gamma}$ .*

3° Projetons en  $Ap$  et  $A'p'$ , sur le plan  $\zeta O\gamma$ , les deux génératrices consécutives  $AM$  et  $A'M'$  du paraboloid. Comme  $Ap = \gamma$  et

$$AA' = d\xi = d \text{ tang}\tau = \frac{d\tau}{\cos^2\tau}.$$

l'aire  $AA'pp'$  sera

$$\gamma d\xi = v \cos\tau \frac{d\tau}{\cos^2\tau} = \frac{v d\tau}{\cos\tau}.$$

*Donc  $g dt$  est la projection, sur le plan  $\zeta O\gamma$ , de l'aire paraboloidale qui limite le volume élémentaire précédemment défini.*

En passant aux équations finies, on aura les trois théorèmes suivants :

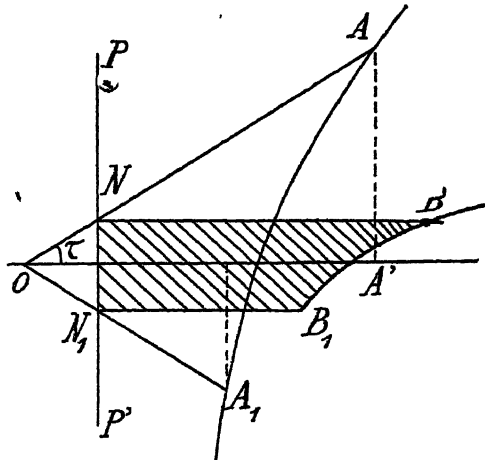
1° *L'aire balayée par le rayon vecteur de l'hodographe entre deux positions quelconques de ce rayon est égale à  $\frac{1}{2}gx$ .*

2° *Le cylindre droit qui a pour base l'aire balayée et est limité d'un côté par cette aire et de l'autre par le paraboloid  $\zeta = \frac{\xi}{\gamma}$  a un volume égal à  $\frac{1}{2}gy$  (ce volume doit être compté positivement pour des valeurs de  $\tau$  positives, négativement pour des valeurs de  $\tau$  négatives).*

3° *La fraction de paraboloid qui limite le volume précédent se projette sur le plan des  $\xi\gamma$  suivant une aire trapézoïdale égale à  $gt$ .*

— Soit l'hodographe  $AA_1$ , dont le pôle est en  $O$ . Pour obtenir  $t$ , mener  $PP'$  verticale à la distance  $OO' = 1$  de l'origine. On a  $O'N = \tan \tau$ .

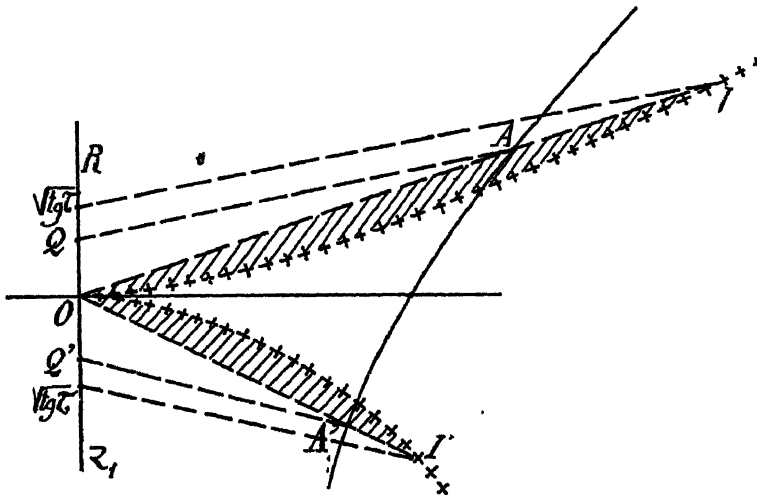
Fig. 175.



Mener  $NB = OA' = r \cos \tau$ , et construire point par point la courbe  $BB_1$ , transformée de  $AA_1$ . L'aire  $NBB_1N_1$  représente  $gt$ , car on a

$$g \, dt = - \frac{u \, d\tau}{\cos^2 \tau} = - u \, d \tan \tau.$$

Fig. 176.



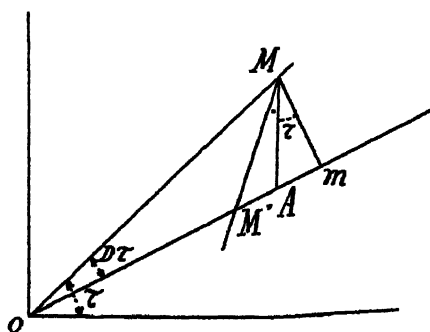
2° Pour obtenir  $y$ , on prend, sur la verticale de  $O$ , le point unité  $Q$  qu'on joint à un point  $A$  quelconque de l'hodographe. Par le point  $R$  tel

que  $OR = \sqrt{\tan \tau}$ , on mène une parallèle à  $QA$  qui rencontre le rayon vecteur  $OA$  en un point  $I$ .

Ce point décrit une courbe  $OI$  dont l'aire  $OAI$  représente  $\frac{1}{2} \frac{v}{g}$ . En effet, on a  $dy = \tan \tau dx$ . Or,  $dx$  est proportionnel à l'aire élémentaire décrite par le vecteur  $OA$  (167, 1°); donc pour avoir  $dy$ , il suffit de multiplier le vecteur par  $\sqrt{\tan \tau}$  et d'évaluer l'aire ainsi définie : c'est ce que la construction graphique réalise (aire ombrée de la figure 174).

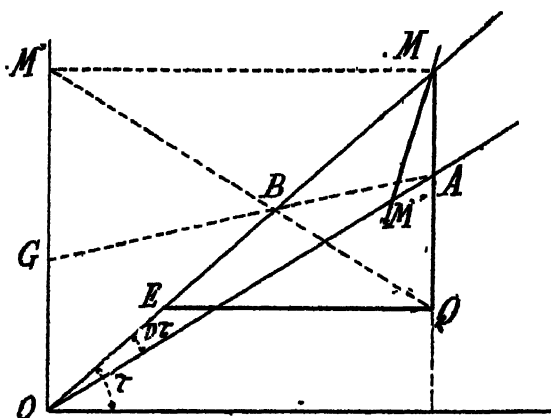
B. *Construction du commandant H. Parodi.* — Il est aisé de varier

Fig. 177.



ces méthodes graphiques pour construire, point par point, les éléments  $t$ ,  $x$ ,  $y$  d'une trajectoire quand l'hodographe est connu.

Fig. 178.



Ainsi, pour calculer le temps, mener  $MA$  vertical et  $Mm$  perpendiculaire au rayon vecteur. On a

$$MA = \frac{v d\tau}{\cos \tau} = g dt.$$

Pour l'ordonnée, prenons  $OG = 1$ , joignons  $GA$  qui coupe  $OM$  en  $B$ .

En joignant  $M'$ , projection de  $M$  sur la verticale, à  $B$ , la droite  $MB$  rencontre en  $Q$  la verticale  $MH$ . Il est facile de voir qu'on a  $MQ = g dx$ . On a aussi  $QE = g dx$ .

*Calcul de l'amplitude  $\nu\tau$  admissible pour chaque élément de l'intégration graphique* (C<sup>t</sup> H. Parodi). — On établit facilement, sur la figure 178, la formule

$$MQ = v^2 \tan \tau \frac{\tan g \nu \tau}{1 + \tan g \tau \tan g \nu \tau}.$$

Pour un angle  $\nu\tau$  ajouté à  $\tau$  au lieu de le retrancher, on aurait

$$MQ' = v^2 \tan \tau \frac{\tan g \nu \tau}{1 - \tan g \tau \tan g \nu \tau}.$$

La différence entre  $MQ$  et  $MQ'$  est supérieure à l'erreur commise. Prenons, comme valeur probable, la moyenne entre  $MQ$  et  $MQ'$  et calculons les différences entre cette valeur probable et les deux valeurs extrêmes calculées. On a

$$MQ - MQ' = 2v^2 \tan^2 \tau \frac{\tan g^2 \nu \tau}{1 - \tan g^2 \tau \tan g^2 \nu \tau},$$

$$MQ + MQ' = 2v^2 \tan \tau \frac{\tan g \nu \tau}{1 - \tan g^2 \tau \tan g^2 \nu \tau}.$$

L'erreur maximum commise est, en pour 100 :

$$\frac{MQ - MQ'}{MQ + MQ'} = \tan g \tau \tan g \nu \tau,$$

et c'est cette quantité qui doit être plus petite qu'une valeur donnée  $\eta$ , par exemple  $\frac{1}{100}$ .

Par des calculs analogues, on arrivera, pour  $\nu$  et  $\tau$ , à la même relation :  $\tan g \tau \tan g \nu \tau \leq \eta$ , pour définir l'amplitude de la variation  $\nu\tau$  permettant d'obtenir une précision donnée à l'avance.

Le Tableau suivant est établi pour  $\eta = \frac{1}{100}$  :

$\tau \dots$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$	$50^\circ$	$60^\circ$	$70^\circ$	$80^\circ$
$\nu\tau \dots$	$3''12'$	$1''30'$	$0''55'$	$0''40'$	$0''24'$	$0''18'$	$0''12'$	$0''6'$

**169. Sur la discussion de l'hodographe.** -- On peut, en considérant seulement les équations différentielles du mouvement, sans les intégrer (ce qui d'ailleurs est généralement impossible) et en les discutant direc-

tement, démontrer un certain nombre de propriétés qui appartiennent à toute trajectoire, quelle que soit la résistance de l'air.

Quelques-unes de ces propriétés furent reconnues par les premiers balisticiens, dans le cas spécial d'une résistance quadratique. C'est le colonel de Saint-Robert qui les a, le premier, présentées sous forme de doctrine générale. Les balisticiens modernes ont beaucoup étendu ce chapitre fondamental de la Balistique.

Parmi les théorèmes qui sont particulièrement propres à faire saisir la nature du mouvement du projectile sur la trajectoire, se classent ceux qui ont pour objet la discussion générale de l'hodographe, c'est le premier problème qui nous occupera.

Il ne sera fait d'autre hypothèse sur la fonction  $F(v)$  que de la considérer comme une fonction continue, qui croît avec  $v$ . On a donc, par hypothèse,  $F'(v) \geq 0$ .

Pour  $v=0$ , on pourra avoir  $cF(0) \geq g$ , ou  $cF(0) < g$ , ou enfin  $cF(0) = 0$ .

De même, nous ne supposons pas nécessairement  $F(\infty) = \infty$ .

On verra, dans le cours de la discussion, que, pour l'étude de nombreuses propriétés de la trajectoire, on est naturellement amené à prendre comme référence de la fonction arbitraire  $F(v)$  une fonction monome  $B_n v^n$ .

On rappelle (17) que l'exposant  $n$ , défini en un point quelconque par la relation  $n = \frac{vF'(v)}{F(v)}$ , est dit le *degré de la résistance en un point*  $v$ . Le degré  $n$  est toujours  $\geq 0$ , par hypothèse. On désigne par  $n_0$  le degré correspondant à  $v=0$ , et par  $n_\infty$  le degré correspondant à  $v=\infty$ .

Il arrivera souvent que des théorèmes seront établis dans le cas d'une résistance monome, puis généralisés ensuite pour le cas d'une résistance quelconque. D'autres fois, au contraire, le cas d'une résistance monome sera donné comme application d'un théorème général.

## II. — LES DEUX EXTRÉMITÉS DE L'HODOGRAPHE.

170. **Théorème I.** — *L'inclinaison  $\tau$  a pour limite inférieure  $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ . Dans l'équation différentielle de l'hodographe*

$$du = \frac{cvF(v)}{g} d\tau,$$

nous prendrons  $\tau$  comme variable indépendante, que nous ferons d'abord varier en donnant à  $d\tau$  des valeurs négatives depuis l'origine  $\alpha$ , angle de projection.

Démontrons tout d'abord que le projectile ne peut jamais s'arrêter, c'est-à-dire que sa vitesse ne peut devenir nulle, si l'on n'a pas  $\tau = -\frac{\pi}{2}$ .

En effet, les deux forces qui agissent sur le projectile sont la gravité  $g$ , qui tend à le faire descendre verticalement, et la résistance  $cF(v)$  dont la direction est opposée à celle de la vitesse  $v$ .

Au moment de l'arrêt, on doit avoir  $cF(0) = g$ , et ces deux forces doivent être opposées. Mais, un instant avant l'arrêt, pour une vitesse aussi petite que l'on voudra, l'accélération  $cF'(v)$ , qui était très voisine de  $cF(0)$ , était dirigée en sens inverse de  $v$ . Il faut donc qu'à la limite, la direction de  $v$  devienne justement verticale, c'est-à-dire celle de  $g$ , pour que l'équilibre soit possible.

Ainsi, on doit faire varier l'inclinaison  $\tau$  depuis  $\alpha$  jusqu'à  $(-\frac{\pi}{2})$  et, dans cet intervalle, l'hodographe ne passera jamais par l'origine: ce point, s'il est atteint, ne peut l'être que lorsque  $\tau = -\frac{\pi}{2}$ .

**171. Théorème II.** — *La vitesse horizontale  $u$  va constamment en décroissant jusqu'à la valeur zéro, obtenue pour  $\tau = -\frac{\pi}{2}$ .*

Puisque ni  $v$ , ni  $F(v)$  ne peuvent devenir négatifs et que  $d\tau$  est négatif,  $du$  sera négatif et  $u$  décroîtra sans cesse.

Pour chercher la valeur limite de  $u$ , écrivons l'équation différentielle de l'hodographe

$$du = \frac{cvF(v)}{g} d\tau$$

sous la forme identique

$$\frac{du}{u} = \frac{cF(v)}{g} \frac{d\tau}{\cos \tau}.$$

On intégrera par la formule

$$\log \frac{u}{u_0} = \int_{\alpha}^{\tau} \frac{cF(v)}{g} \frac{d\tau}{\cos \tau}$$

ou

$$\log \frac{u}{u_0} = k \int_{\alpha}^{\tau} \frac{d\tau}{\cos \tau}.$$

La constante  $k$  est finie ou infini, mais positive, puisqu'elle remplace la variable positive  $\frac{cF(v)}{g}$ . Intégrant de  $\alpha$  à  $\tau$ , on aura

$$\log u - \log u_0 = k \left[ \log \tan \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\tau}{2} \right) - \log \tan \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} \right) \right],$$

d'où

$$u = k' \operatorname{tang}^k \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2} \right).$$

Pour  $\tau = -\frac{\pi}{2}$ , le second membre tend vers zéro, l'exposant  $k$  étant positif. Il en est de même de la vitesse horizontale  $u$ . Le théorème est donc démontré, sans cas d'exception : même si  $v$  tend vers l'infini pour  $\tau = -\frac{\pi}{2}$ , le produit  $u = v \cos \tau$  tend vers zéro.

**172. Théorème III.** — *Pour une vitesse infinie, l'inclinaison  $\tau$  prend une valeur différente de  $\left(\pm \frac{\pi}{2}\right)$ .*

L'équation différentielle de l'hodographe s'écrira, en développant  $du = d(v \cos \tau)$ , sous la forme (157, 5°) :

$$\left(1 + \frac{g}{cF} \sin \tau\right) \frac{d\tau}{\cos \tau} = \frac{g}{c} \frac{dv}{vF}.$$

Supposons que,  $V_0$  étant une vitesse très grande, nous partions du point  $(V_0, \alpha)$  et que nous intégrions jusqu'à un autre point  $(v, \tau)$  où  $v$  est encore très grand, mais fini. Nous aurons, dans tous les cas :

$$\int_{\alpha}^{\tau} \left(1 + \frac{g}{cF} \sin \tau\right) \frac{d\tau}{\cos \tau} = \frac{1}{c} \int_{V_0}^v \frac{g}{vF} dv.$$

Mais, le rapport  $\frac{g}{cF} \sin \tau$  ne devient jamais infini dans les limites de l'intégration; prenons donc une valeur constante  $k$  comme valeur moyenne du facteur  $\left(1 + \frac{g}{cF} \sin \tau\right)$ . On aura

$$(1) \quad k \int_{\alpha}^{\tau} \frac{d\tau}{\cos \tau} = \frac{1}{c} \int_{V_0}^v \frac{g}{vF} dv.$$

Nous allons maintenant faire tendre  $V_0$  vers l'infini. Posons pour les très grandes valeurs de  $v$ , comme au n° 93,

$$F(v) = v^{n_{\infty}} [B_{n_{\infty}} + B' \Psi(v)],$$

$n_{\infty}$  étant un exposant tel que  $\frac{F}{v^{n_{\infty}}}$  ait une valeur finie pour  $v = \infty$ . La fonction  $\Psi(v)$  tend, par conséquent, vers zéro.

On aura ainsi, à la limite,

$$\int_{\alpha}^{\tau} \frac{g}{vF} dv = \int_{\infty}^v \frac{g}{B_{n_{\infty}} v^{n_{\infty}+1}} dv = -\frac{g}{n_{\infty} B_{n_{\infty}}} \frac{1}{v^{n_{\infty}}}.$$

Le second membre est donc une quantité finie, si  $n_\infty$  est différent de zéro.

Or, si le second membre de l'intégrale (1) est fini, il en sera de même du premier qui, intégré, donne

$$k \log \operatorname{tang} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2} \right) - k \log \operatorname{tang} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right).$$

L'inclinaison  $\tau$  ne peut donc prendre ni la valeur  $\left( +\frac{\pi}{2} \right)$ , ni la valeur  $\left( -\frac{\pi}{2} \right)$  qui rendraient infini le terme  $\log \operatorname{tang} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2} \right)$ .

Donc, pour  $r = \infty$ , l'inclinaison  $\tau$  a une limite, que nous désignerons par  $\Theta$ , et qui est différente de  $\left( \pm \frac{\pi}{2} \right)$ .

*Cas d'exception.* — On voit immédiatement que si dans l'intégrale  $\int_{\infty}^r \frac{g}{vF} dv$ , on a  $n_\infty = 0$ , c'est-à-dire  $F(r) = \text{const.}$ , pour  $r = \infty$  (la courbe des  $F(r)$  admet alors une asymptote horizontale pour les grandes valeurs de  $r$ ), cette intégrale, qui devient  $\log r$ , est infinie. On a donc  $\Theta = \frac{\pi}{2}$ , dans cette hypothèse.

**173. Théorème IV.** — Pour  $\tau = -\frac{\pi}{2}$ , la vitesse  $v$  du projectile tend vers une limite  $V'$ , telle que  $cF(V') = g$ .

On écrira l'hodographe

$$\frac{dv}{v} = \left( \frac{cF}{g} + \sin \tau \right) \frac{d\tau}{\cos \tau}.$$

D'après le théorème III, la vitesse  $v$  ne devient pas, en général, infinie dans le voisinage de  $\left( -\frac{\pi}{2} \right)$ . On pourra donc, entre  $\alpha$ , assez voisin de  $\left( -\frac{\pi}{2} \right)$ , et  $\left( -\frac{\pi}{2} \right)$ , remplacer  $\left( \frac{cF}{g} + \sin \tau \right)$  par une constante  $k'$ , valeur moyenne.

Intégrant alors l'équation  $\frac{dv}{v} = k' \frac{d\tau}{\cos \tau}$ , on aura

$$v \operatorname{tang} k' \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) = V_0 \operatorname{tang} k' \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2} \right).$$

Mais, pour  $\frac{\tau}{2} = -\frac{\pi}{2}$ , on a

$$\operatorname{tang} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2} \right) = 0.$$



Puisque  $v$  ne devient pas, en général, infini, au point  $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ , il faut que  $h'$  soit nul ou positif, car une valeur négative rendrait  $v$  infini.

Si  $h'$  était positif, on aurait  $v = 0$ . Le projectile s'arrêterait donc, sollicité cependant par une seule force, la gravité, si la résistance  $cF(v)$  est nulle. Donc  $v$  ne peut être nul que s'il existe, dans l'expression de la résistance, un terme de frottement, tel que  $cF_0 < g$ ; c'est un cas particulier.

Donc, en général,  $v$  ne sera ni nul ni infini.

On en conclut que  $h'$  doit tendre vers zéro. Donc, à la limite, on a

$$\frac{cF}{g} + \sin \tau = 0$$

Comme  $\sin \tau = -1$ , on voit que la vitesse  $v$  tend vers une limite  $V'$ , telle que  $cF(V') = g$ . C'est la *vitesse terminale* déjà considérée dans le tir vertical (123).

*Cas d'exception.* — S'il existe, dans l'expression de la résistance, un terme constant tel que  $\frac{cF(0)}{g}$ , soit  $\geq 1$ , la vitesse terminale est nulle; car, dans l'équation différentielle

$$\frac{dv}{v} = \left[ \frac{cF(v)}{g} + \sin \tau \right] \frac{d\tau}{\cos \tau},$$

on a

$$\frac{cF(v)}{g} > \frac{cF(0)}{g},$$

puisque  $F(v)$  croît par hypothèse avec  $v$ .

Donc, la parenthèse est toujours positive, et l'on a, avec  $h'$  positif,

$$v \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2} \right) = V_0 \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2} \right).$$

Le second membre s'annule pour  $\tau = \frac{\pi}{2}$ ; donc  $V' = 0$ .

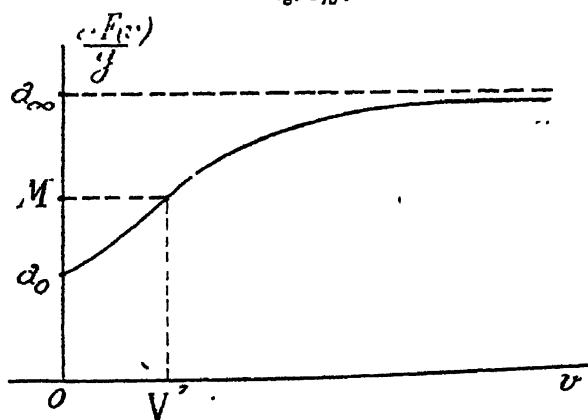
*Remarque.* — Le cas de  $V' = \infty$  est compatible avec  $\tau = \frac{\pi}{2}$  quand, pour  $v = \infty$ , on a  $\frac{cF(\infty)}{g} = \text{const.}$

RÉSUMÉ. — Soit, représentée, sur la figure 179, la fonction  $\frac{cF(v)}{g}$ , en fonction de  $v$ .

Soit  $a_0$  le point correspondant à la vitesse zéro; on a  $a_0 = \frac{cF(0)}{g}$ .

Soit  $a_\infty$  le point correspondant à la vitesse infinie; on a  $a_\infty = \frac{cF(\infty)}{g}$ .  
 On a toujours  $a_\infty > a_0$  puisque, par hypothèse,  $F(v)$  croît avec  $v$ .  
 Soit M le point qui représente l'unité sur l'échelle des  $\frac{cF(v)}{g}$ .

Fig. 179.



On distingue trois cas : le point M est entre  $0$  et  $a_0$ , ou entre  $a_0$  et  $a_\infty$ , ou au-dessus de  $a_\infty$ .

*Premier cas.* —  $a_0 = 1$ , la vitesse terminale est nulle;

*Deuxième cas.* —  $a_\infty > 1 > a_0$ , la vitesse terminale est différente de zéro et de l'infini; elle est telle que  $cF(V') = g$ ;

*Troisième cas.* —  $a_\infty = 1$ , la vitesse terminale est infinie.

**174. Théorème V.** — *Il existe deux espèces de trajectoires, les unes avec sommet, les autres sans sommet.*

D'après les théorèmes précédents, on voit que, sur la trajectoire, la vitesse  $v$  variera, d'une manière continue depuis l'infini, pour une certaine inclinaison  $\theta$ , jusqu'à  $V'$ , pour l'inclinaison  $(-\frac{\pi}{2})$ . Il n'est pas possible, dans l'intervalle, que la vitesse  $v$  puisse s'annuler, les deux forces qui agissent sur le projectile n'étant jamais de sens opposé, sinon pour  $\tau = -\frac{\pi}{2}$ . D'autre part, le projectile ne pourra quitter cette verticale une fois atteinte. Ainsi donc, l'inclinaison  $\tau$  variant d'une manière continue de  $\theta$  à  $(-\frac{\pi}{2})$ , la vitesse  $v$  variera de  $\infty$  à  $V'$ .

Le sommet de la trajectoire correspond à l'inclinaison  $\tau = 0$ . Donc,

si  $\Theta$  est positif, il existera une valeur de  $r$  annulant  $\tau$  : la *trajectoire aura un sommet*.

Si  $\Theta$  est négatif, la *trajectoire n'aura pas de sommet*.

Étant données les caractéristiques initiales ( $V_0, \alpha$ ) du tir, l'intégration de l'hodographe donne la relation  $\tau = \varphi(r, V_0, \alpha)$ . D'une manière générale, on aura donc  $\Theta = \varphi(\infty, V_0, \alpha)$ .

Si  $\varphi(\infty, V_0, \alpha) > 0$ , les trajectoires ont un sommet; si  $\varphi(\infty, V_0, \alpha) = 0$ , elles n'en ont pas. Pour  $\varphi = 0$ , le sommet existe, mais c'est le point  $\Theta$  limite de la trajectoire. Bien entendu, si  $\alpha > 0$ , il existera toujours un sommet,  $\tau$  variant de  $\alpha$  à  $(-\frac{\pi}{2})$ . Le problème ne se pose que pour les angles de projection négatifs.

On appelle, parfois, les trajectoires sans sommet, *trajectoires des bolides*, parce qu'elles correspondent à celles que ces corpuscules peuvent décrire en abordant, sous un angle, en général, négatif et avec une vitesse énorme, l'atmosphère terrestre dans laquelle ils s'allument.

**175. Application au cas d'une résistance monome.** — Faisons l'application des théorèmes qui viennent d'être démontrés au cas d'une résistance monome :  $c F(r) = b_n r^n$ .

(Exceptons le cas limite de  $n = 0$ , qui doit être traité spécialement.)

L'hodographe s'écrit, dans le cas d'une résistance  $n^{\text{ème}}$ ,

$$g \frac{d(r \cos \tau)}{b_n r^{n+1}} = d\tau.$$

Multiplions les deux membres par  $\frac{1}{\cos^{n+1} \tau}$ ; il viendra

$$\frac{g}{b_n} \frac{d(r \cos \tau)}{r^{n+1} \cos^{n+1} \tau} = \frac{d\tau}{\cos^{n+1} \tau}.$$

Les variables sont séparées, et l'on intégrera, de  $V_0$  à  $r$  et de  $\alpha$  à  $\tau$ , sous la forme

$$\frac{g}{n b_n V_0^n \cos^n \tau} + \int_0^\tau \frac{d\tau}{\cos^{n+1} \tau} = \frac{g}{n b_n V_0^n \cos^n \alpha} + \int_0^\alpha \frac{d\tau}{\cos^{n+1} \tau}.$$

Le second membre est une quantité finie. Donc  $\int_0^\tau \frac{d\tau}{\cos^{n+1} \tau}$  doit rester fini, même pour  $r = \infty$ . L'angle limite  $\Theta$  est différent de  $\frac{\pi}{2}$ , valeur qui rendrait infinie l'intégrale. Il a pour expression, en fonction des caracté-

ristiques initiales ( $V_0, \alpha$ ),

$$\int_0^{\tau} \frac{d\tau}{\cos^{n+1} \tau} = \frac{g}{n b_n V_0^n \cos^n \alpha} + \int_0^{\alpha} \frac{d\tau}{\cos^{n+1} \tau}.$$

C'est la relation  $\Theta = \varphi(\alpha, V_0, \alpha)$ .

Bien entendu, si  $\alpha$  est positif, il existera toujours un sommet. Soit  $\alpha'$  la valeur absolue de l'inclinaison négative initiale  $\alpha$ .

La trajectoire aura un sommet si

$$\frac{g}{b_n V_0^n} > n \cos^n \alpha' \int_0^{\alpha'} \frac{d\tau}{\cos^{n+1} \tau}.$$

Elle n'aura pas de sommet si l'inégalité est en sens inverse. Le cas d'égalité correspond à l'hypothèse où  $\Theta = 0$ .

Le premier membre de l'inégalité est le rapport de la gravité à la résistance initiale. Une table de la fonction de  $\alpha'$  qui figure dans le second membre pourrait être dressée et permettrait de résoudre immédiatement le problème de l'existence d'un sommet.

La valeur de la vitesse terminale est définie par la relation  $b_n V'^n = g$ .

$$\text{Donc } V' = \left( \frac{g}{b_n} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

*Exemple.* — Soit une résistance linéaire  $n = 1$ .

$$\text{L'intégrale devient } \tan \Theta = \frac{g}{b_1 V_0 \cos \alpha} + \tan \alpha.$$

La trajectoire aura un sommet si  $\frac{g}{b_1 V_0} > \sin \alpha'$ , c'est-à-dire si la projection de l'accélération initiale  $b_1 V_0$  sur la verticale est plus petite que la gravité.

### III. — VARIATIONS DE LA VITESSE.

**176. Théorème I.** — *La vitesse  $v$  du projectile passe par un minimum  $v_m$  pour un angle négatif  $\tau_m$ ; entre  $v_m$  et  $\tau_m$  existe la relation  $vF(v_m) + g \sin \tau_m = 0$ .*

L'équation différentielle de l'hodographe s'écrit, en effet,

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{v}{\cos \tau} \left( \frac{vF}{g} + \sin \tau \right),$$

et la dérivée  $\frac{dv}{d\tau}$  s'annule pour les deux valeurs  $v = 0$  et  $\frac{vF}{g} + \sin \tau = 0$ .

1° L'égalité  $v = 0$  ne peut être satisfaite que dans deux cas.

En premier lieu, s'il s'agit du tir vertical ascendant, où  $\Theta = \frac{\pi}{2}$ , et où la vitesse devient nulle au point culminant de l'ascension.

En second lieu,  $v$  peut s'annuler au point  $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ , lorsqu'on a  $cF(0) > g$  (173).

Ce sont là deux cas d'exception, qui représentent cependant des minima réels de la vitesse  $v$ .

2° Ces deux cas éliminés, reste le point  $(v, \tau)_m$  défini par la relation

$$cF(v_m) + g \sin \tau_m = 0.$$

D'abord, si ce point existe, la vitesse  $v$  passe bien par un minimum et non par un maximum.

En effet, la dérivée seconde est

$$\frac{d^2 v}{d\tau^2} = \frac{1}{\cos \tau} \left[ \frac{c(F + vF')}{g} + \sin \tau \right] \frac{dv}{d\tau} + v \left[ 1 + \left( \frac{cF}{g} + \sin \tau \right) \frac{\sin \tau}{\cos^2 \tau} \right],$$

ce qui, au point  $(v, \tau)_m$ , où  $\frac{cF_m}{g} + \sin \tau_m = 0$ , se réduit à

$$\left( \frac{d^2 v}{d\tau^2} \right)_m = v_m$$

C'est (excepté pour  $v_m = 0$ ) une quantité positive. Il s'agit donc bien d'un minimum de la vitesse. Ce minimum est d'ailleurs unique, car  $\frac{d^2 v}{d\tau^2}$  ne peut changer de signe pour une valeur annulant  $\frac{dv}{d\tau}$ .

3° En réduisant les termes, on mettra  $\frac{d^2 v}{d\tau^2}$  sous la forme

$$\frac{d^2 v}{d\tau^2} = \frac{v}{\cos^2 \tau} \left[ 1 + \left( \frac{cF}{g} \right)^2 \left( 1 + \frac{vF'}{F} \right) + \frac{cF}{g} \left( 3 + \frac{vF'}{F} \right) \sin \tau + \sin^2 \tau \right].$$

4° La possibilité de l'existence du point  $(v, \tau)_m$  de vitesse minimum étant ainsi établie, il s'agit de discuter maintenant la réalité de son existence. En effet, la relation  $\frac{cF(v)}{g} + \sin \tau = 0$ , qui le définit, est également satisfaite par  $\frac{cF(V')}{g} = 1$ , au point de vitesse terminale. En d'autres termes, il y a lieu de se demander si les deux points  $(v, \tau)$  et  $\left(V', -\frac{\pi}{2}\right)$  sont toujours distincts, ou, au contraire, s'il y a des cas où ces points se confondent.

Le principe de la discussion qui va suivre et qui permet de résoudre complètement ce problème a été indiqué par le colonel Siacci.

177. **Théorème II.** -- Dans une trajectoire avec sommet, si le degré  $n$  de la résistance est supérieur ou égal à l'unité ( $n \geq 1$ ), il existe toujours un point  $(v, \tau)_m$  de vitesse minimum, distinct du point  $(V, -\frac{\pi}{2})$ .

Écrivons l'équation différentielle de l'hodographe sous la forme

$$\frac{d(v \cos \tau)}{v^2 \cos^2 \tau} = \frac{c F(v)}{g v} \frac{d\tau}{\cos^2 \tau},$$

et intégrons, depuis le sommet  $(V, 0)$  jusqu'au point  $(v, \tau)_m$ . On aura

$$\frac{1}{v_m \cos \tau_m} - \frac{1}{V} = - \int_0^{\tau_m} \frac{c F}{g v} \frac{d\tau}{\cos^2 \tau} = -k \tan \tau_m;$$

$k$  est une valeur intermédiaire entre celles que, dans les limites de l'intégration, prend le rapport  $\frac{c F(v)}{g v}$ .

On en déduit

$$v_m = \frac{V}{\cos \tau_m - k V \sin \tau_m}.$$

Posons  $k V = \tan \psi$ , ce qui étant positif détermine un angle aigu; on aura

$$v_m = \frac{\sin \psi}{k \cos(\psi + \tau_m)}.$$

D'autre part,  $v_m$  et  $\tau_m$ , qui sont liés entre eux par l'équation ci-dessus, c'est-à-dire par l'hodographe intégré, sont en plus, au point de vitesse minimum, liés par la relation de définition du point  $(v, \tau)_m$ :

$$c F(v_m) + g \sin \tau_m = 0.$$

On a donc, par combinaison des deux équations,

$$\frac{c F(v_m)}{g v_m} + \frac{\sin \psi}{k \cos(\psi + \tau_m)} = -\sin \tau_m.$$

Posons

$$\beta = \frac{1}{k} \frac{c F(v_m)}{g v_m};$$

nous aurons

$$\beta \sin \psi + \sin \tau_m \cos(\psi + \tau_m) = 0,$$

ce qui revient, identiquement, à

$$(2\beta - 1) \sin \psi = -\sin(2\tau_m + \psi).$$

Supposons qu'on ait  $\beta = 1$ . On aura  $2\beta - 1 = 1$ .

Le premier membre de l'équation précédente sera plus petit que 1, et l'on pourra poser

$$(2\beta - 1) \sin \psi = \sin \varphi,$$

$\varphi$  étant un angle aigu.

L'équation  $-\sin(2\tau_m + \psi) = \sin \varphi$  donne

$$2\tau_m + \psi = \pi - \varphi; \quad \text{d'où} \quad \tau_m = -\frac{\varphi + \psi}{2}.$$

Or  $\varphi$  et  $\psi$  sont deux angles aigus. Donc  $\tau_m$  sera un angle aigu différent de  $(-\frac{\pi}{2})$ . c. q. f. d.

Si  $\beta = 1$ , on aura

$$\psi = \varphi; \quad \text{d'où} \quad \tau_m = -\frac{\psi}{2}.$$

1° Voyons maintenant la signification de la condition  $\beta \leq 1$ . Supposons, ainsi qu'il a été dit, que  $\frac{cF(v)}{v}$  croisse avec  $v$ , ce qui aura lieu si le degré  $n$ , de la résistance est  $> 1$ . Comme la vitesse  $v$  diminue depuis  $V_s$ , au sommet, jusqu'à  $v_m$ , au point  $\tau_m$ , on aura

$$\frac{cF(v_m)}{g v_m} < \frac{cF(V_s)}{g V_s},$$

et comme  $k$  est une moyenne entre ces deux valeurs,  $\beta = \frac{1}{k} \frac{cF(v_m)}{g v_m}$  sera compris entre 1 et une quantité  $\leq 1$ . On pourra donc poser, par suite,  $\beta \leq 1$ .

Le théorème est donc démontré; il existe, lorsque  $n > 1$ , un point  $(v, \tau)_m$  de vitesse minimum distinct du point  $(V', -\frac{\pi}{2})$ .

Dans le cas de  $n = 1$ , on a vu que l'hodographe était une droite (166, 3°); le point  $(v, \tau)_m$  est le pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur cette droite.

2° On doit remarquer que ce théorème ne dit pas que, pour  $n = 1$ , il ne pourra pas exister un point  $(v, \tau)_m$  distinct du point  $(V', -\frac{\pi}{2})$ .

La démonstration est fondée sur le fait que le sinus d'un angle aigu peut représenter le produit  $(2\beta - 1) \sin \psi$ , qui doit seulement être  $< 1$ . La condition  $\beta \leq 1$ , qui est suffisante, n'est donc pas nécessaire et, ainsi que nous le verrons, il existera des cas  $n < 1$ , où, cette condition n'étant pas réalisée, la vitesse minimum existe cependant. Mais on voit que la condition d'existence dépendra de  $\psi$ , c'est-à-dire de  $kV_s$ .

**178. Au sujet de cette démonstration.** — Avant l'étude complète du problème, qui a été faite par Siacci en 1902, les Traités de Balistique,

depuis Saint-Robert et même le *Traité de Siacci* de 1892, énonçaient et démontraient un théorème général, qui prouvait l'existence, dans tous les cas, quel que soit le degré  $n$  de la résistance, aussi bien pour les trajectoires sans sommet que pour les autres, d'un point  $(v, \tau)_m$  de vitesse minimum, distinct du point  $(V, -\frac{\pi}{2})$ .

Il importe ici d'examiner cette démonstration, en vue de se rendre compte d'une cause de faux raisonnement dans le procédé général qui consiste à remplacer, sous le signe  $\int$ , une quantité variable par une constante. Cette critique et le théorème précédent sont dus au capitaine Cavalli (1901).

On écrit Phodographe

$$\frac{d(v \cos \tau)}{v \cos \tau} = \frac{c F(v)}{g} \frac{d\tau}{\cos \tau},$$

et, posant  $k$  égal à une valeur moyenne, entre la vitesse au sommet  $V_s$  et  $v_m$ , du rapport  $\frac{c F(v)}{g}$ , on intégrera sous la forme

$$\log \frac{v_m \cos \tau_m}{V_s} = k \int_0^{\tau_m} \frac{d\tau}{\cos \tau} = k \log \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\tau_m}{2} \right).$$

On aura donc

$$(1) \quad v_m = \frac{V_s}{\cos \tau_m} \tan^k \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\tau_m}{2} \right),$$

relation qui existe avec l'équation de vitesse minimum

$$(2) \quad c F(v_m) + g \sin \tau_m = 0.$$

Ces deux équations, disait-on, sont incompatibles pour  $\tau_m = -\frac{\pi}{2}$ .

En effet, si  $\tau_m = \frac{\pi}{2}$ , l'équation (2) donne  $\frac{c F(v_m)}{g} = 1$ . Comme on a  $V_s > v_m$  (car  $v$  diminue à partir du sommet), on a  $\frac{c F(V_s)}{g} > 1$ , et, par suite,  $k > 1$ , puisque  $k$  est une valeur moyenne entre  $\frac{c F(V_s)}{g}$  et  $\frac{c F(v_m)}{g}$ .

Mais, si  $k = 1$ , le second membre de l'équation (1) pour  $\tau_m = -\frac{\pi}{2}$  devient nul; on aura donc  $v_m = 0$ , ce qui est incompatible, en général, avec  $\frac{c F(v_m)}{g} = 1$ .

Donc  $\tau_m$  différera de  $(-\frac{\pi}{2})$ ,

La vice de cette démonstration est qu'on peut avoir  $k = 1$ , à la limite,



et que, pour  $k=1$ , le théorème n'est plus vrai. On n'a plus l'incompatibilité  $v_m=0$ .

Si, en effet,  $\tau_m$  est très voisin de  $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ , on intégrera de  $V_s$  à  $(v_m - \varepsilon)$  et l'on aura bien  $k \gg 1$ . Mais, si l'on complète l'intégration, dans la seconde partie,  $\frac{cF(v)}{g}$  sera, à un infiniment petit près, voisin de  $\frac{cF(V')}{g}$  et  $k$  tendra vers l'unité, rendant impossible la démonstration correcte.

Au contraire, dans le théorème du n° 177, la démonstration a été correcte, parce que le théorème démontré est vrai pour  $\beta \geq 1$  et non, seulement, pour  $\beta > 1$ .

**179. Théorème III.** — *Vitesse minimum dans une trajectoire avec sommet  $\Theta > 0$ .*

Nous continuerons l'exposition de la théorie du point de vitesse minimum en raisonnant d'abord sur le cas d'une résistance monome, et en étudiant l'hodographe intégré dans cette hypothèse.

Prenons le cas d'une résistance  $F(v) = B_n v^n$ , avec  $cB_n = b_n$ . Nous avons trouvé (175) l'intégrale de l'hodographe

$$\frac{g}{nb_n v^n \cos^n \tau} + \int_0^\tau \frac{d\tau}{\cos^{n+1} \tau} = \int_0^{(\tau)} \frac{d\tau}{\cos^{n+1} \tau}.$$

La condition, qui, pour cette forme de résistance, définit le point de vitesse minimum  $(v, \tau)_m$ , est

$$\frac{b_n v_m}{g} + \sin \tau_m = 0.$$

Portant cette valeur dans l'hodographe, il viendra

$$-\frac{1}{\sin \tau_m \cos^n \tau_m} + n \int_0^{\tau_m} \frac{d\tau}{\cos^{n+1} \tau} = n \int_0^{(\tau)} \frac{d\tau}{\cos^{n+1} \tau},$$

et cette relation détermine l'inclinaison  $\tau_m$ .

Mais, on vérifie aisément, en différentiant les deux membres, l'identité suivante :

$$n \int_0^\tau \frac{d\tau}{\cos^{n+1} \tau} = \frac{\sin \tau}{\cos^n \tau} + (n-1) \int_0^\tau \frac{d\tau}{\cos^{n-1} \tau}.$$

Portant cette valeur dans l'équation qui détermine  $\tau_m$ , il viendra

$$(1) \quad -\frac{1}{\cos^{n-2} \tau_m \sin \tau_m} + (n-1) \int_0^{\tau_m} \frac{d\tau}{\cos^{n-1} \tau} = n \int_0^{(\tau)} \frac{d\tau}{\cos^{n+1} \tau}.$$

C'est l'équation qu'il convient de discuter maintenant.

*Discussion.* -- Nous supposons  $\theta > 0$ , puisque la trajectoire a un sommet. Donc le second membre de l'équation est positif. L'angle  $\tau_m$  est négatif.

1<sup>o</sup>  $n > 1$ . -- *Il existe toujours un point  $\tau_m$  de vitesse minimum.*

Dans le premier membre, le premier terme  $\frac{1}{\cos^{n-2}\tau_m \sin \tau_m}$  est positif et varie, quand  $\tau_m$  varie de 0 à  $(-\frac{\pi}{2})$ :

$$\begin{array}{ll} \text{de } +\infty \text{ à } 0, & \text{si } n < 2; \\ \text{de } +\infty \text{ à } -1, & \text{si } n = 2; \\ \text{de } -1 \text{ à } +\infty, & \text{si } n > 2 \end{array}$$

Le second terme du premier membre  $(n-1) \int_0^{\tau_m} \frac{d\tau}{\cos^{n-1}\tau}$  est négatif et varie de 0 à  $(-\infty)$ , pour  $\tau$  allant de 0 à  $(-\frac{\pi}{2})$ .

Donc, si  $n < 2$ , le premier membre varie de  $(+\infty)$  à  $(-\infty)$ . Il existe ainsi une valeur de  $\tau_m$  rendant le premier membre égal au second.

Si  $n = 2$ , le premier membre, pour  $\tau_m = -\frac{\pi}{2}$ , se présente sous la forme  $(\infty - \infty)$ . Mais, si l'on pose  $\tau_m = -\frac{\pi}{2} + \theta$ , on trouve, en faisant  $\cos \tau_m = \sin \theta$ ,  $\sin \tau_m = -\cos \theta$ :

$$\frac{1}{\sin \theta} + (n-1) \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\theta^2} = \frac{1}{\sin \theta} \left( 1 - \frac{n-1}{n-2} \right).$$

Comme  $n > 2$ , on a  $\frac{n-1}{n-2} > 1$ ; donc la limite du premier membre est encore  $(-\infty)$ , pour  $\theta = 0$ .

Ce premier membre variant ainsi de  $(+\infty)$  à  $(-\infty)$ , il existera une valeur de  $\tau_m$  qui satisfait à l'équation du point de *vitesse minimum*.

2<sup>o</sup> Pour  $n = 1$ , le point de vitesse minimum est donné par l'équation

$$\frac{1}{\tan \tau_m} = \tan \theta,$$

qui peut toujours être satisfaite par une valeur négative de  $\tau_m$ .

3<sup>o</sup>  $n < 1$ . Les deux termes du premier membre de l'équation (1) sont positifs; ils ne deviennent ni l'un ni l'autre infinis négatifs pour  $\tau_m = -\frac{\pi}{2}$ . Il n'est donc pas certain que la relation (1) puisse être satisfaite.

Cherchons quelle est la valeur minimum que peut prendre ce premier membre; elle s'obtiendra en égalant à zéro la dérivée par rapport à  $\tau$ .

Cette dérivée est égale à

$$\sin^{-1}\tau \cos^{1-n}\tau + (2-n) \cos^{1-n}\tau + (n+1) \cos^{1-n}\tau = \frac{\cos^{1-n}\tau}{\sin^2\tau}.$$

Elle s'annule pour  $\tau = -\frac{\pi}{2}$  seulement.

Ainsi donc, le premier membre de l'équation (1) diminue toujours. Sa plus petite valeur sera celle qui correspond à  $\tau = -\frac{\pi}{2}$ , auquel cas elle se réduit à

$$(n-1) \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \frac{d\tau}{\cos^{n-1}\tau}.$$

On aura donc ainsi, en changeant les signes, comme condition, la suivante :

$$(1-n) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\tau}{\cos^{n-1}\tau} = n \int_0^{\Theta'} \frac{d\tau}{\cos^{n+1}\tau},$$

ce qui détermine une certaine valeur  $\Theta'$  de l'inclinaison limite  $\Theta$ . Le théorème s'énoncera ainsi :

*Dans le cas de  $n < 1$ , si l'inclinaison limite  $\Theta$ , correspondant à  $r = \infty$ , est plus petite que la valeur  $\Theta'$  définie par l'équation*

$$n \int_0^{\Theta'} \frac{d\tau}{\cos^{n+1}\tau} = (1-n) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\tau}{\cos^{n-1}\tau},$$

*il n'existe pas de point de vitesse minimum.*

*Si  $\Theta > \Theta'$ , il existe un point de vitesse minimum.*

4<sup>e</sup> Cette relation de condition, qui renferme l'angle auxiliaire  $\Theta'$ , se convertit aisément en une autre qui ne renfermera que les caractéristiques initiales du tir ( $\alpha, V_0$ ).

Remplaçant, en effet,  $\int_0^{\Theta'} \frac{d\tau}{\cos^{n+1}\tau}$  par sa valeur (173), il viendra, comme condition d'existence d'un minimum de vitesse :

$$\frac{g}{b_n} \frac{1}{V_0^n \cos^n \alpha} + n \int_0^\alpha \frac{d\tau}{\cos^{n+1}\tau} > (1-n) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\tau}{\cos^{n-1}\tau}.$$

On peut aussi introduire la *vitesse au sommet*  $V$ , et, remarquant que  $\frac{g}{b_n} = V'^n$ , écrire

$$\left(\frac{V'}{V}\right)^n > (1-n) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\tau}{\cos^{n-1}\tau}.$$

180. **Théorème IV.** — *Vitesse minimum dans une trajectoire sans sommet*  $\Theta < 0$ .

L'équation qui détermine l'inclinaison  $\tau_m$  au point de vitesse minimum est toujours la même :

$$(1) \quad -\frac{1}{\cos^{n-2}\tau_m \sin \tau_m} + (n-1) \int_0^{\tau_m} \frac{d\tau}{\cos^{n-1}\tau} = n \int_0^{\Theta} \frac{d\tau}{\cos^{n+1}\tau}.$$

Mais ici l'angle limite  $\Theta$  est négatif.

1°  $n < 1$ . — *Il n'existe pas de point de vitesse minimum.* Car les deux termes du premier membre sont positifs. Le second membre est négatif.

2°  $n = 1$ . — *Il n'existe pas de point de vitesse minimum.* Car l'équation

$$-\frac{1}{\tan \tau_m} = \tan \Theta$$

a ses deux membres de signes opposés.

3°  $n > 1$ . — *La vitesse minimum existe toujours.*

Écrivons l'équation (1) sous la forme

$$(n-1) \int_0^{\tau_m} \frac{d\tau}{\cos^{n-1}\tau} - \frac{1}{\cos^{n-2}\tau_m \sin \tau_m} = (n-1) \int_0^{\Theta} \frac{d\tau}{\cos^{n+1}\tau} + \frac{\sin \Theta}{\cos^n \Theta},$$

d'après l'identité indiquée précédemment (179).

Si l'on fait  $\tau_m = \Theta$ , le premier membre est positif, tandis que le second est négatif.

Faisons maintenant  $\tau_m = \frac{\pi}{2}$ . Nous avons vu que le premier membre a pour limite  $(-\infty)$  (179).

Donc, pour  $\tau_m$  variant de  $\Theta$  à  $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ , le premier membre passe d'une valeur positive à une valeur égale à  $(-\infty)$ . Il existe ainsi une valeur  $\tau_m$  telle que le premier membre prend une valeur négative, égale à celle du second.

4°  $1 < n < 2$ . — C'est le cas qui reste à examiner.

Les deux termes du second membre sont de signes contraires. Raisonnant comme au théorème III (179, 3°), en faisant les mêmes calculs, on voit que la valeur maximum que peut prendre le second membre correspond à  $\tau_m = -\frac{\pi}{2}$  et la condition d'existence s'exprime exactement par la même équation.

Lorsqu'on a  $1 < n < 2$ , si l'inclinaison limite  $\Theta$  correspondant à  $r = \infty$  est plus grande (en valeur absolue) que la valeur  $\Theta'$  correspondant à l'équation

$$n \int_0^{(\theta)'} \frac{d\tau}{\cos^{n+1}\tau} = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\tau}{\cos^{n-1}\tau},$$

il n'existe pas de point de vitesse minimum.

Si  $\Theta < \Theta'$ , il existe un point de vitesse minimum.

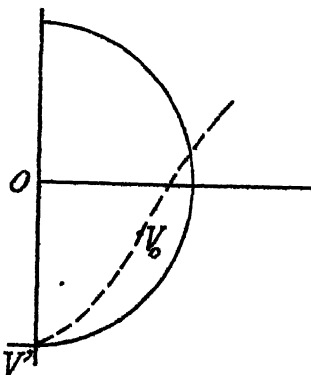
On exprimera, comme précédemment, l'équation de condition en introduisant les caractéristiques initiales,  $V_0$  et  $\alpha$ , mais non la vitesse  $V$ , qui n'existe plus.

**181. Théorème V.** — *Pour une loi générale de résistance, si le degré de la résistance est  $\geq 2$ , il existe toujours un point de vitesse minimum, quel que soit l'angle asymptotique  $\Theta$ , positif ou négatif.*

Nous allons maintenant chercher à nous affranchir des restrictions dues à ce que les théorèmes III et IV ont été établis dans le cas d'une résistance monome. Ici, comme il a été fait pour le théorème II, nous prenons une loi de résistance de l'air quelconque,  $cF(v)$ , sur laquelle le degré  $n$  varie arbitrairement, mais ne descend pas au-dessous de 2, au moins entre certaines limites, c'est-à-dire quand  $v$  croît de  $V'$  à  $V_0$ .

**LEMME.** — *Si le projectile est tiré à une vitesse  $V_0 \leq V'$ , la trajectoire renferme toujours un point de vitesse minimum. Car si le point initial est un de ceux où la vitesse décroît, cette décroissance a une limite,*

Fig. 180.



puisque'il faut que la vitesse remonte à  $V'$ . Si, au contraire, le point initial est de ceux où la vitesse est croissante, il suffira de considérer les

vitesse en amont de  $V_0$ , parmi lesquelles on trouvera une vitesse minimum, puisque la limite de  $r$  est infinie.

En d'autres termes, si l'hodographe, qui vient de l'infini, pénètre dans le cercle de rayon  $V'$ , il existe un point de cet hodographe qui est à une distance minimum de l'origine.

Si le projectile est tiré avec  $V_0 > V'$ , mais s'il passe par un point (différent de  $-\frac{\pi}{2}$ ) où la vitesse est  $V'$ , il y aura un minimum de vitesse.

Donc, chercher les conditions pour qu'il existe un minimum de vitesse, revient à chercher les conditions pour que le projectile passe par une vitesse égale à  $V'$ , avant d'atteindre le point  $(-\frac{\pi}{2})$ .

*Démonstration du théorème.* — Écrivons l'hodographe

$$\frac{d(v \cos \tau)}{v^{n+1} \cos^{n+1} \tau} = \frac{c F(v)}{g v^n} \frac{d\tau}{\cos^{n+1} \tau}.$$

Soit  $(V', \tau')$  le point, différent de  $(-\frac{\pi}{2})$ , où la vitesse est  $V'$ . Intégrons entre  $\alpha$  et  $\tau'$ . Nous aurons (175)

$$(1) \quad k \frac{1}{(V' \cos \tau')^n} + n \int_0^{\tau'} \frac{d\tau}{\cos^{n+1} \tau} = \frac{1}{k(V_0 \cos \alpha)^n} + n \int_0^{\alpha} \frac{d\tau}{\cos^{n+1} \tau}.$$

Dans cette relation,  $k$  est une valeur moyenne comprise entre les valeurs maximum et minimum de  $\frac{c F(v)}{g v^n}$ , c'est-à-dire entre  $\frac{c F(V_0)}{g V_0^n}$  et  $\frac{c F(V')}{g V'^n}$ . Mais comme, par définition,  $\frac{c F(V')}{g} = 1$ , la limite minimum de  $k$  sera  $\frac{1}{V'^n}$ , et l'on aura

$$(2) \quad \frac{1}{k V'^n} \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{k V_0^n} \leq \frac{g}{c F(V_0)}.$$

Ceci posé, montrons qu'une valeur  $\tau'$  différente de  $(-\frac{\pi}{2})$  peut satisfaire à l'équation (1).

1° Si, à  $\tau'$ , on substitue  $\alpha$ , le premier membre (I) de (1) est plus grand que le second, puisque, par hypothèse,  $V' < V_0$ .

2° Substituons maintenant  $(-\frac{\pi}{2})$  à  $\tau'$ .

3° étant un nombre compris entre 0 et 1 et étant mis pour  $\frac{1}{k V'^n}$ , on aura, pour premier membre (I) de (1), l'équation

$$(I) = n \int_0^{\tau'} \frac{d\tau}{\cos^{n+1} \tau} + \frac{\beta}{\cos^n \tau'},$$

ce qui, d'après l'identité établie au n° 179, se transforme en

$$(1) = (n-1) \int_0^{\tau'} \frac{d\tau}{\cos^{n-1}\tau} + \frac{\beta + \sin \tau}{\cos^n \tau}.$$

On écrira

$$(1) = \frac{1}{\cos^{n-2}\tau} \left[ \frac{(n-1) \int_0^{\tau'} \frac{d\tau}{\cos^{n+1}\tau}}{\cos^{\frac{1}{n-2}\tau}} + \frac{\beta + \sin \tau}{\cos^2 \tau} \right].$$

La première fraction de la parenthèse qui, pour  $\tau = -\frac{\pi}{2}$ , se présente sous la forme  $\frac{\infty}{\infty}$  a pour vraie valeur  $\frac{n-1}{n-2} \frac{1}{\sin \tau}$ ; au point  $(-\frac{\pi}{2})$ , elle devient  $(-\frac{n-1}{n-2})$ .

La fraction  $\frac{\beta + \sin \tau}{\cos^2 \tau}$  a, au point  $(-\frac{\pi}{2})$ , pour valeur  $(-\infty)$  pour  $\beta = 0$  et  $\frac{1}{2}$  pour  $\beta = 1$ . Comme on peut vérifier que sa dérivée ne peut s'annuler pour  $\beta < 1$ , la valeur maximum est  $\frac{1}{2}$ .

Donc la parenthèse aura une valeur qui, au plus, sera  $(-\frac{n-1}{n-2} + \frac{1}{2})$ , c'est-à-dire  $(-\frac{n}{2(n-2)})$ .

Par suite, si  $n > 2$ , le premier membre (1) tend vers  $(-\infty)$  et sera plus petit que le second.

Ainsi, entre  $\alpha$  et  $(-\frac{\pi}{2})$ , existe une valeur de  $\tau'$  différente de  $(-\frac{\pi}{2})$  qui satisfait à l'équation (1) et à laquelle correspond un point où la vitesse est  $V'$ .

Le théorème est donc démontré. Le point de vitesse minimum  $(v, \tau)_m$  existe, dans ce cas, aussi bien pour les trajectoires avec sommet que pour les trajectoires sans sommet.

**182. Théorème général VI.** — *Si, entre  $V_0$  et  $V'$ , le rapport  $\frac{v F(v)}{v^n}$  croît avec  $v$ , la condition suffisante pour qu'il existe une vitesse minimum au point  $(v, \tau)_m$  différent de  $(V', -\frac{\pi}{2})$  est*

$$n \int_0^\alpha \frac{d\tau}{\cos^{n+1}\tau} + \frac{\kappa}{c F(V_0) \cos^n \alpha} > (n-1) \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \frac{d\tau}{\cos^{n+1}\tau},$$

$\alpha$  étant l'angle de projection et  $V_0$  la vitesse initiale.

Nous supposons, bien entendu,  $n < 2$ , puisque, dans le cas de  $n \geq 2$ , le point de vitesse minimum existe toujours d'après le théorème précédent.

Raisonnons comme précédemment et cherchons si l'équation (1)

$$(1) = \frac{1}{k(V' \cos \tau')^n} + n \int_0^{\tau'} \frac{d\tau}{\cos^{n+1} \tau} = \frac{1}{k(V_0 \cos \alpha)^n} + n \int_0^{\alpha} \frac{d\tau}{\cos^{n+1} \tau}$$

peut être satisfaite pour  $\tau'$  compris entre  $\alpha$  et  $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ .

1° En substituant  $\alpha$  à  $\tau'$ , le premier membre (1) de (1) est plus grand que le second, puisque  $V' < V_0$ ;

2° En substituant  $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$  à  $\tau'$ , la condition, pour l'existence d'une racine, est que (1) soit plus petit que la plus petite des valeurs que peut prendre le second membre.

Comme on a  $\frac{1}{kV_0^n} > \frac{g}{cF(V_0)}$ , on écrira donc, pour la condition,

$$(1) < n \int_0^{\alpha} \frac{d\tau}{\cos^{n+1} \tau} + \frac{g}{cF(V_0) \cos^n \alpha}.$$

Remplaçant (1) par sa valeur calculée au numéro précédent, il viendra

$$(n-1) \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \frac{d\tau}{\cos^{n-1} \tau} + \left[ \frac{\beta + \sin \tau}{\cos^n \tau} \right] < n \int_0^{\alpha} \frac{d\tau}{\cos^{n+1} \tau} + \frac{g}{cF(V_0) \cos^n \alpha}.$$

Mais, pour  $\beta = 0$ , la fraction  $\frac{\beta + \sin \tau}{\cos^n \tau}$ , quand  $\tau = -\frac{\pi}{2}$ , devient égale à  $(-\infty)$ ; pour  $\beta = 1$ , sa vraie valeur est  $\left(-\frac{1}{n \sin \tau' \cos^{n-2} \tau'}\right)$  qui est nulle, pour  $n < 2$ .

Donc, le maximum de (1) aura lieu pour l'hypothèse  $\beta = 1$ , et l'on aura

$$(n-1) \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \frac{d\tau}{\cos^{n-1} \tau} < n \int_0^{\alpha} \frac{d\tau}{\cos^{n+1} \tau} + \frac{g}{cF(V_0) \cos^n \alpha}.$$

C'est la condition posée dans l'énoncé.

On voit aisément que cette condition renferme le théorème V; car, si  $n \geq 2$ , l'intégrale  $\int_0^{-\frac{\pi}{2}} \frac{d\tau}{\cos^{n-1} \tau}$  est égale à  $(-\infty)$  et l'inégalité est satisfaite.

Elle renferme aussi le théorème II; car si  $n \geq 1$ , l'intégrale précédente



est négative, et si  $\Theta > 0$  (trajectoire avec sommet), le second membre est positif.

*Remarque.* — La condition trouvée est *suffisante*, mais non *nécessaire*, puisque, partout, pour la démonstration, on a remplacé les variables par leurs valeurs limites.

### 183. Théorème VII. — *Variations de la vitesse verticale.*

Les variations  $d\omega$  de la vitesse verticale ( $\omega = v \sin \tau$ ) seront réglées par la fonction

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \sin \tau \frac{dv}{d\tau} + v \cos \tau = \frac{v}{\cos \tau} \left( 1 + \frac{cF}{g} \sin \tau \right).$$

Cette fonction s'annule en un point  $(v, \tau)_1$  tel qu'on ait

$$\frac{cF(v_1)}{g} \sin \tau_1 + 1 = 0.$$

Formons la dérivée seconde. On a

$$\frac{d^2 \omega}{d\tau^2} = \frac{v}{\cos^2 \tau} \left( \frac{cF}{g} + \sin \tau \right) \left[ 2 + \frac{c}{g} (vF' + F) \sin \tau \right],$$

ce qui, pour  $\frac{cF(v_1)}{g} = -\frac{1}{\sin \tau_1}$ , donne

$$\left( \frac{d^2 \omega}{d\tau^2} \right)_1 = (n-1) \frac{v}{\sin \tau_1}.$$

Au point  $(v, \tau)_1$ , s'il existe distinct du point  $\left( V, -\frac{\pi}{2} \right)$ , la vitesse verticale passe par un minimum ou un maximum. Comme  $\sin \tau_1$  est négatif, on aura un minimum, si  $n > 1$ , et un maximum, si  $n < 1$ .

On peut remarquer, en outre, qu'au point de vitesse minimum  $(v, \tau)_m$ , on a

$$\left( \frac{d\omega}{d\tau} \right)_m = v_m \cos \tau_m \quad \text{et} \quad \left( \frac{d^2 \omega}{d\tau^2} \right)_m = 0.$$

Cherchons, par le même procédé que pour la vitesse minimum  $(v, \tau)_m$  et d'abord pour une résistance monome, les conditions d'existence du point  $(v, \tau)_1$ .

En ce point, l'hodographe s'écrit

$$\frac{g}{b_n} \frac{1}{v_1^n \cos^n \tau} + \int_0^{\tau_1} \frac{d\tau}{\cos^{n+1} \tau} = \int_0^{\Theta} \frac{d\tau}{\cos^{n+1} \tau}.$$

En y joignant l'équation de définition du point  $(v, \tau)_1$  de  $\omega$  minimum,

qui est

$$\frac{g}{n b_n v_1^n} = -\sin \tau_1,$$

on aura

$$-\frac{\sin \tau_1}{\cos^n \tau_1} + n \int_0^{\tau_1} \frac{d\tau}{\cos^{n+1} \tau} = n \int_0^{\Theta} \frac{d\tau}{\cos^{n+1} \tau}.$$

Mais, d'après la relation établie au n° 179, le premier membre n'est autre que  $(n-1) \int_0^{\tau_1} \frac{d\tau}{\cos^{n-1} \tau}$ , et l'on aura, pour définir le point  $\tau_1$ , l'équation

$$(n-1) \int_0^{\tau_1} \frac{d\tau}{\cos^{n-1} \tau} = n \int_0^{\Theta} \frac{d\tau}{\cos^{n+1} \tau}.$$

PREMIER CAS. — *La trajectoire a un sommet  $\Theta > 0$ .*

Le second membre est positif.

1° Si  $n > 1$ , le premier membre,  $\tau_1$  étant négatif, est toujours négatif. L'inégalité ne peut jamais être satisfaite; *il n'existe jamais de point de vitesse verticale minimum.*

2° Si  $n = 1$ , l'équation donne zéro dans le premier membre, qui ne peut égaler le second.

Pas de point où  $v$  passe par un minimum.

3° Si  $n < 1$ , le premier membre est positif. Il part de 0 pour  $\tau_1 = 0$ . Comme la dérivée  $(n-1) \cos^{1-n} \tau$  est toujours positive, ce premier terme croît toujours. La plus grande valeur qu'il puisse prendre correspond donc à  $\tau_1 = -\frac{\pi}{2}$ .

Donc, dans le cas de  $n < 1$ , il y aura un point de vitesse verticale maximum si l'on a

$$(n-1) \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \frac{d\tau}{\cos^{n-1} \tau} > n \int_0^{\Theta} \frac{d\tau}{\cos^{n+1} \tau}.$$

En comparant tous ces résultats avec les conclusions du n° 179, on reconnaît aisément que : Quel que soit  $n$ , quand  $(v, \tau)_m$  existe,  $(v, \tau)_1$  n'existe pas, et inversement : *les points de vitesse minimum et de vitesse verticale maximum s'excluent réciproquement dans une trajectoire avec sommet.*

DEUXIÈME CAS. — *La trajectoire n'a pas de sommet  $\Theta < 0$ .*

Le second membre de l'équation est négatif.

1° Si  $n < 1$ , le premier membre est positif; il ne peut exister de point de vitesse verticale minimum.

2° Si  $n = 1$ , pas de point de  $v$  minimum.

3° Si  $n \geq 2$ , la vitesse verticale minimum existe toujours; car, pour  $n \geq 2$ , l'intégrale  $\int_0^{\tau_1} \frac{d\tau}{\cos^{n-1}\tau}$  varie depuis 0, pour  $\tau_1 = 0$ , à  $(-\infty)$ , pour  $\tau_1 = -\frac{\pi}{2}$ . Pour une certaine valeur  $\tau_1$ , l'égalité des deux membres se réalisera donc.

4°  $1 < n < 2$ . — Dans ce cas, la limite de l'intégrale n'est plus l'infini. Pour qu'il existe un point  $(v, \tau)_1$  de vitesse verticale minimum il faut que

$$(n-1) \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \frac{d\tau}{\cos^{n-1}\tau} > n \int_0^{(1)} \frac{d\tau}{\cos^{n+1}\tau}.$$

C'est la même condition que pour la vitesse minimum et l'on énoncera le théorème suivant :

*Quel que soit  $n$ , dans une trajectoire sans sommet, les deux points  $(v, \tau)_m$  de vitesse minimum et  $(v, \tau)_1$  de vitesse verticale minimum sont toujours associés, l'existence de l'un entraînant celle de l'autre, et inversement.*

**184. Théorème VIII.** — *Le point de vitesse verticale minimum  $(v, \tau)_1$  est situé avant le point de vitesse minimum  $(v, \tau)_m$ .*

Rapprochant les deux équations qui définissent  $(v, \tau)_m$  (179) et  $(v, \tau)_1$  (183) et qui ont même second membre, on aura

$$(n-1) \int_0^{\tau_1} \frac{d\tau}{\cos^{n-1}\tau} = (n-1) \int_0^{\tau_m} \frac{d\tau}{\cos^{n-1}\tau} - \frac{1}{\cos^{n-2}\tau_m \sin \tau_m}.$$

Donc, puisque  $\tau_m$  est négatif, l'intégrale

$$(n-1) \int_{\tau_m}^{\tau_1} \frac{d\tau}{\cos^{n-1}\tau} = - \frac{1}{\cos^{n-2}\tau_m \sin \tau_m}$$

sera positive et, par suite, comme  $n > 1$ , dans le cas d'existence des deux minima, on aura  $\tau_m > \tau_1$  (en valeur absolue).

G. Q. F. D.

#### IV. — FORME GÉNÉRALE DE L'HODOGRAPHE.

**185. Équation de la tangente à l'hodographe.** — L'hodographe est une courbe exprimée, en coordonnées polaires  $(v, \tau)$ , par l'équation

différentielle

$$\frac{d(v \cos \tau)}{d\tau} = \frac{c v F(v)}{g},$$

que nous prendrons aussi sous la forme développée

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{v}{\cos \tau} \left( \frac{c F}{g} + \sin \tau \right).$$

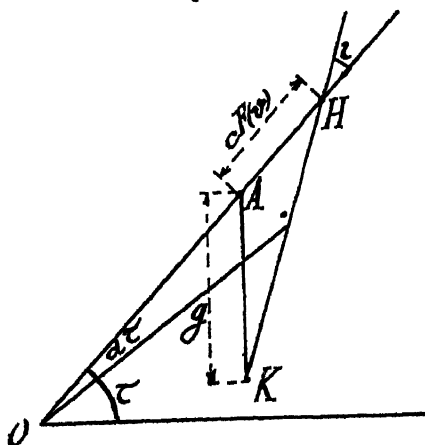
Étant donnée une courbe en coordonnées polaires  $(v, \tau)$ , la tangente en un point H est déterminée par la valeur de l'angle  $\iota$ , qui est telle que

$$\tan \iota = \frac{v d\tau}{dv}.$$

On a donc, dans le cas de l'hodographe,

$$\tan \iota = \frac{g \cos \tau}{c F + g \sin \tau}.$$

Fig. 181.



On sait (163) que l'on construit géométriquement la tangente à l'hodographe au point H, en prenant  $HA = c F(v)$  et  $AK = g$ , et en joignant HK.

Dans le triangle AHK, on a

$$\frac{AH}{AK} = \frac{\sin K}{\sin H};$$

or l'angle H est l'angle  $\iota$ , l'angle en K est égal à  $\frac{\pi}{2} - \tau$ .

Donc

$$\frac{c F(v)}{g} = \frac{\cos(\iota + \tau)}{\sin \iota};$$

on retrouve ainsi la formule

$$\operatorname{tang} i = \frac{g \cos \tau}{cF + g \sin \tau}.$$

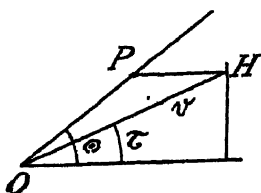
186. **Discussion.** — Examinons ce que donne l'équation ci-dessus pour la tangente aux différents points de l'hodographe.

1° *Point à l'infini*  $v = \infty$ . — Si  $n_u$ , degré de la résistance au point  $v = \infty$ , est plus grand que zéro,  $cF(v)$  tend vers l'infini. Donc l'angle  $i$  tend vers zéro. L'hodographe a pour direction limite, à l'infini, une droite faisant avec l'horizontale l'angle  $\Theta$  défini par le théorème du n° 172.

Si  $n_u = 0$ , nous savons que  $\Theta = \frac{\pi}{2}$ . On a également  $i = 0$ .

Dans le cas de  $n_u > 0$ , il s'agit de savoir s'il existe ou non une asymptote de direction  $\Theta$ . A cet effet, il suffit d'étudier la limite de la longueur PH pour  $v = \infty$ .

Fig. 182.



On a

$$PH = v \frac{\sin(\theta - \tau)}{\sin \theta},$$

qui se présente sous la forme  $(0 \times \infty)$ .

On écrira

$$PH = \frac{\sin(\theta - \tau)}{\left(\frac{\sin \theta}{v}\right)},$$

dont la vraie valeur est

$$PH = \frac{-\cos(\theta - \tau)}{-\frac{1}{v^2} \sin \theta \left(\frac{dv}{d\tau}\right)} = \frac{\cos(\theta - \tau)}{\sin \theta} \frac{v \cos \tau}{\frac{cF}{g} + \sin \tau},$$

ce qui, pour  $\tau = \Theta$ , devient

$$PH = \frac{\cos \Theta}{\sin \Theta} \frac{1}{\frac{\partial_n v^{n-1}}{g} + \frac{\sin \Theta}{v}} = \frac{\cos \Theta}{\sin \Theta} \frac{g}{\partial_n v^{n-1}}.$$

Si  $n_u > 1$ , limite  $PH = 0$ ; le rayon vecteur  $\Theta$  est une asymptote.



Donc

$$\operatorname{tang} \tau = -\operatorname{tang} \tau_1.$$

La tangente est horizontale.

7° *Point de vitesse terminale*  $(V', -\frac{\pi}{2})$ . — En ce point,  $\operatorname{tang} \tau$  se présente sous la forme  $\frac{0}{0}$ , puisque  $\cos \tau = 0$ ,  $\sin \tau = -1$  et  $cF(V') = g$ .

Comme on a  $\operatorname{tang} \tau = \frac{v}{\left(\frac{dv}{d\tau}\right)}$ , et que  $v$  a pour limite  $V'$ , il suffit de chercher la limite de  $\frac{dv}{d\tau}$ , pour  $\tau = 0$ .

On a

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{d\tau} = \frac{cF + g \sin \tau}{g \cos \tau};$$

d'où

$$\frac{1}{V'} \lim \left( \frac{dv}{d\tau} \right) = \frac{cF' \lim \left( \frac{dv}{d\tau} \right) + g \cos \tau}{-g \sin \tau},$$

et, au point  $(V', -\frac{\pi}{2})$ , on a

$$\frac{1}{V'} \lim \left( \frac{dv}{d\tau} \right) = \frac{cF'}{g} \lim \left( \frac{dv}{d\tau} \right).$$

Cette équation ne peut être satisfaite que par l'une ou l'autre des hypothèses suivantes :

$$\lim \left( \frac{dv}{d\tau} \right) = 0, \quad \lim \left( \frac{dv}{d\tau} \right) = \infty, \quad \frac{1}{V'} = \frac{cF'}{g}.$$

Dans ce dernier cas, comme au point  $(V', -\frac{\pi}{2})$ , on a aussi  $cF(V') = g$ , on en déduit  $F = V' F'$ , ce qui montre que le degré  $n'$  de la résistance est égal à 1, dans le voisinage du point  $V'$ . On sait que, dans ce cas, l'hodographe est une droite, inclinée sur la verticale, dont la direction dépend des conditions initiales du mouvement.

Ce cas particulier ( $n' = 1$ ) étant excepté, quelle est, de 0, ou de  $\infty$ , la valeur limite de  $\frac{dv}{d\tau}$ ? Pour le voir, il est nécessaire de procéder comme il suit :

Au voisinage du point  $(V', -\frac{\pi}{2})$ , posons

$$\tau = -\frac{\pi}{2} + \theta \quad \text{et} \quad v = V' - \varepsilon.$$

L'équation de l'hodographe développée

$$\cos \tau \frac{dv}{d\tau} - v \sin \tau = \frac{c}{g} v F$$

pourra s'écrire alors, en remplaçant  $\cos \tau$  par  $\theta$  et  $\sin \tau$  par  $(-1)$  :

$$-\theta \frac{dv}{d\theta} + (V' - z) = \frac{c}{g} (V' - z) F(V' - z).$$

Développant  $F$  par la formule de Taylor et remarquant que  $cF(V') = g$ , et que  $\frac{vF'}{F} = n'$ , il viendra

$$\bullet \quad \frac{dz}{d\theta} = n' \frac{z}{\theta}, \quad \text{d'où} \quad z = \alpha \theta^n,$$

$\alpha$  étant une constante dépendant des conditions initiales du tir.

Donc, la tangente au point  $(V', -\frac{\pi}{2})$  aura pour expression

$$\frac{dz}{d\theta} = \alpha n' \theta^{n-1}.$$

Par suite,  $n'$  étant, autour du point  $V'$ , le degré de la résistance, on énoncera les conclusions suivantes :

Au point  $(V', -\frac{\pi}{2})$  :

Si  $n' > 1$ , la tangente est *horizontale*,  $\frac{dv}{d\tau} = 0$ ,

Si  $n' = 1$ , " *inclinée*,  $\frac{dv}{d\tau} = -\alpha$ ,

Si  $n' < 1$ , " *verticale*,  $\frac{dv}{d\tau} = \infty$ .

Pour  $n' = 0$ , la démonstration précédente n'est plus valable.

Écrivons l'hodographe dans cette hypothèse :

$$\cos \tau \frac{dv}{d\tau} - v \sin \tau = \frac{b_0}{g} v,$$

il viendra, pour la tangente, l'expression (avec  $\frac{b_0}{g} = a$ ) :

$$\text{tang} \tau = \frac{v}{\left(\frac{dv}{d\tau}\right)} = \frac{\cos \tau}{a + \sin \tau}.$$

Si  $a \geq 1$ , on a  $\lim(\text{tang} \tau) = 0$ , pour  $\tau = -\frac{\pi}{2}$ . La tangente est donc verticale.



Si  $a = 1$ , l'expression se présente sous la forme  $\frac{0}{0}$ , et l'on trouve  $\lim(\tan \tau) = \lim\left(-\frac{\sin \tau}{\cos \tau}\right)$ , c'est-à-dire  $\infty$ . Dans ce cas, la tangente au point  $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$  est horizontale.

**187. Rayon de courbure et points d'inflexion de l'hodographe.** — Dans une courbe en coordonnées polaires  $(v, \tau)$ , le rayon de courbure  $R$  est donné par l'équation

$$R = \left[ v^2 + \left( \frac{dv}{d\tau} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \left[ v^2 + 2 \left( \frac{dv}{d\tau} \right)^2 - v \frac{d^2 v}{d\tau^2} \right]^{-1}.$$

En portant dans cette équation la valeur de  $\frac{dv}{d\tau}$  et celle de  $\frac{d^2 v}{d\tau^2}$ , calculée au n° 176, on trouve

$$R = \frac{g}{c} \frac{v}{\cos \tau} \frac{\left[ \cos^2 \tau + \left( \frac{cF}{g} + \sin \tau \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\left( \frac{cF'}{g} + \sin \tau \right) (vF' - F)}.$$

*a. Les points d'inflexion* correspondent aux valeurs qui rendent  $R$  infini.

1°  $R$  sera infini pour  $v = \infty$ ; car, au numérateur, on aura  $v^{3n+1}$  et, au dénominateur,  $v^{2n}$ .

2°  $R$  sera infini, si  $c = 0$  (cas du vide), ou  $g = 0$  (mouvement rectiligne); car,  $g$  est à la puissance  $(-2)$  au numérateur et  $(-1)$  au dénominateur.

3°  $R$  sera infini, si  $vF' - F = 0$ , c'est-à-dire chaque fois que le degré  $n$  de la résistance passera par la valeur 1.

4°  $R$  sera infini, si  $\frac{cF}{g} + \sin \tau = 0$ , c'est-à-dire au point de vitesse minimum  $(v, \tau)_m$ .

5° Au point  $\left(V', -\frac{\pi}{2}\right)$ ,  $R$  se présente sous la forme  $\frac{0}{0}$ .

La fraction dont il faut chercher la limite est

$$\frac{\left[ \cos^2 \tau + \left( \frac{b_n v^n}{g} + \sin \tau \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\cos \tau \left( \frac{b_n v^n}{g} + \sin \tau \right)}.$$

Comme au n° 178, 7°, faisons  $\tau = -\frac{\pi}{2} + \theta$ ; d'où

$$\cos \tau = \theta \quad \text{et} \quad v = V' \left( 1 - \frac{g}{V'} \right).$$

On aura

$$\frac{b_n v^n}{g} + \sin \tau = \frac{b_n}{g} V'^n \left( 1 - n \frac{\varepsilon}{V'} \right) - 1,$$

et, pour  $b_n V'^n = g$ , la valeur de ce terme sera  $\left( -n \frac{\varepsilon}{V'} \right)$ .

On aura ainsi à chercher la limite de la fraction  $\frac{\left( \theta^2 + n^2 \frac{\varepsilon^2}{V'^2} \right)^{\frac{1}{2}}}{-n \theta \frac{\varepsilon}{V'}}$ . Mais, on a (186, 7°)  $\varepsilon = a \theta^n$ .

La fraction devient donc, à la limite, pour  $n > 0$ ,

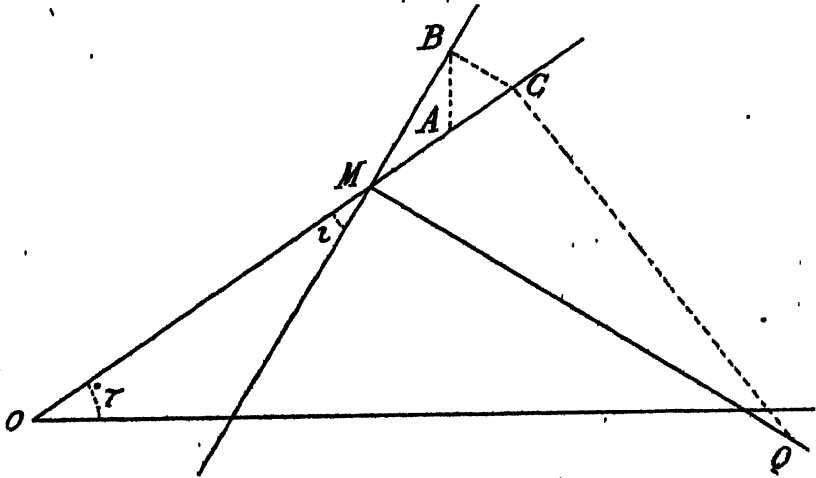
$$-\left( \frac{n}{V'} a \right)^2 \theta^{2n-1}.$$

Donc,  $n'$  étant le degré de la résistance au point  $V'$ , si  $n > \frac{1}{2}$ , la limite est zéro : il n'y a pas de point d'inflexion de l'hodographe au point  $\left( -\frac{\pi}{2} \right)$ . Si  $n' = \frac{1}{2}$ , la limite est finie, même conclusion.

Si  $n' < \frac{1}{2}$ , la limite est  $\infty$ . Il y a un point d'inflexion de l'hodographe au point  $\left( -\frac{\pi}{2} \right)$ .

b. Construction du rayon de courbure de l'hodographe (Ch. Pa-

Fig. 184.



rodé). — Dans l'expression du rayon de courbure de l'hodographe :

$$R = \frac{g}{c} \frac{v}{\cos \tau} \frac{\left[ \cos^2 \tau + \left( \frac{cF}{g} + \sin \tau \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\left( \frac{cF}{g} + \sin \tau \right) (vI^n - F)};$$

remplaçons  $\frac{vF}{g} + \sin \tau$  par sa valeur  $\frac{\cos \tau}{\tan \tau}$ , et  $(vF' - F)$  par  $(n - 1)F$ ; on obtiendra la formule

$$R = \frac{r}{n-1} \frac{\cos \tau}{\sin \tau \cos \tau \cos(\tau + \tau')}.$$

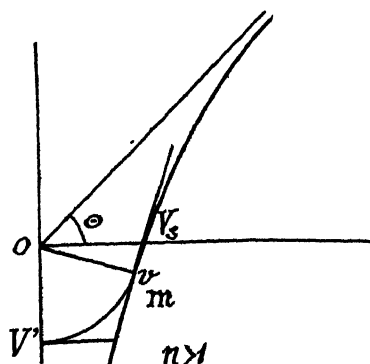
La traduction graphique de cette formule sera la construction suivante : prendre sur le rayon vecteur OM, la longueur  $MA = \frac{r}{n-1} = \frac{OM}{n-1}$ . Mener AB verticalement jusqu'à sa rencontre B avec la tangente en M; mener BC perpendiculaire à MB, puis CQ perpendiculaire à OM. Le point de rencontre Q de cette droite avec la normale MQ à l'hodographe donne, en Q, le centre de courbure cherché.

**188. Formes de l'hodographe. Trajectoires avec sommet  $\theta > 0$ .** — Nous sommes maintenant en mesure de donner le tracé général de l'hodographe, en nous appuyant sur les théorèmes qui ont été démontrés.

*Premier cas,  $n > 1$  :*

*Rayon vecteur  $\theta$ , asymptote;*

Fig. 185.



*Point  $(v, \tau)_m$  de vitesse minimum;*

*Inflexion en ce point;*

*Tangente horizontale au point  $(\cdot, \frac{\pi}{2})$ .*

*Cas limite,  $n = \infty$  (vide); l'hodographe est une verticale*

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad V_s = v_m, \quad \tau_m = 0, \quad V' = \infty.$$

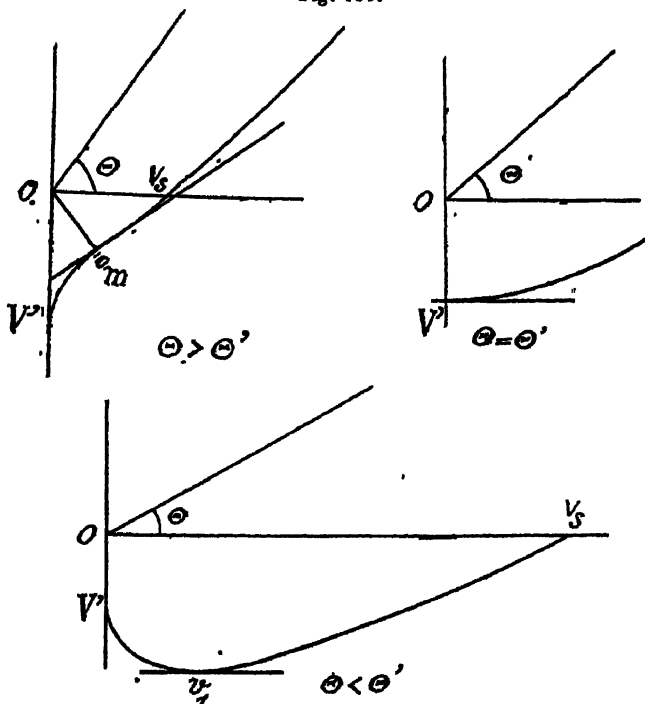
*Deuxième cas,  $n = 1$  : l'hodographe est une droite oblique ( $166, 3^\circ$ ).*

Troisième cas,  $n < 1$  :

Rayon vecteur  $\Theta$ , direction asymptotique ;

Tangente verticale au point  $V'$ .

Fig. 186.



a. Si  $\Theta \neq \Theta'$  (179), il existe un point de vitesse minimum  $(v, \tau)_m$  ; il y a inflexion en ce point ;

b. Si  $\Theta = \Theta'$ , il existe un point de vitesse verticale maximum  $(v, \tau)_i$  ; il n'y a pas d'inflexion ;

c.  $\Theta = \Theta'$ . Mais, dans l'hypothèse limite qui sert de transition aux deux précédentes, quelle est la forme de l'hodographe ?

Pour la déterminer, il faut partir de l'intégrale de l'hodographe (179) :

$$\frac{g}{b_n v^n \cos^n \tau} + n \int_0^\tau \frac{d\tau}{\cos^{n+1} \tau} = n \int_0^\tau \frac{d\tau}{\cos^{n+1} \tau},$$

qui s'écrit

$$\frac{g}{b_n v^n \cos^n \tau} = n \int_0^\tau \frac{d\tau}{\cos^{n+1} \tau} - \frac{\sin \tau}{\cos^n \tau} - (n-1) \int_0^\tau \frac{d\tau}{\cos^{n-1} \tau}.$$

L'hypothèse actuelle  $\Theta = \Theta'$  donne la relation (179)

$$n \int_0^{\Theta'} \frac{d\tau}{\cos^{n+1} \tau} = (1-n) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\tau}{\cos^{n+1} \tau}.$$

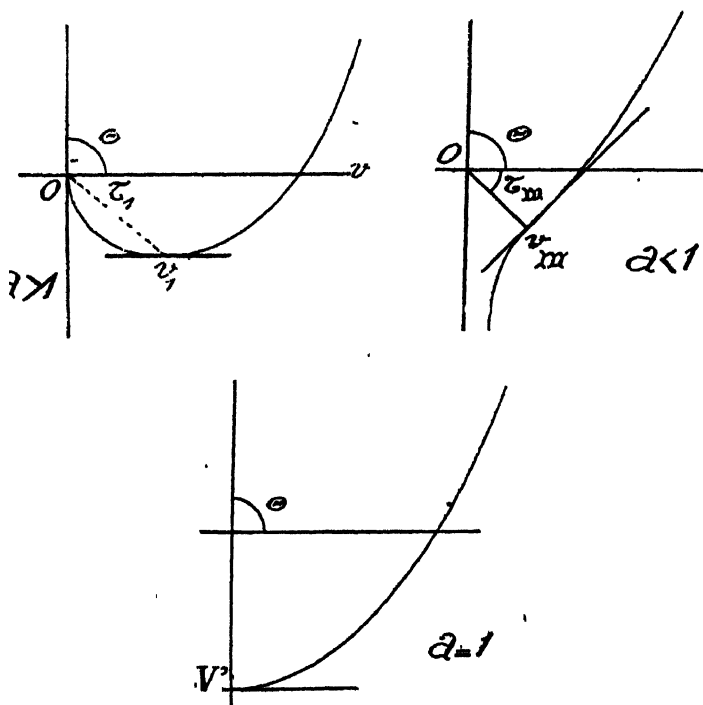
Posons alors, au voisinage du point  $(V', -\frac{\pi}{2})$ ,

$$v = V' \left(1 - \frac{\varepsilon}{V'}\right) \quad \text{et} \quad \tau = -\frac{\pi}{2} + \theta.$$

On aura

$$\frac{g}{b_n V'^n} \left(1 + n \frac{\varepsilon}{V'}\right) \frac{\left(1 + \frac{n}{3} \theta^2\right)}{\theta^n} = - \frac{\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)}{\theta^n} \left(1 + \frac{n}{3} \theta^2\right) - (n-1) \frac{\theta \left(1 + \frac{n}{3} \theta^2\right)}{\theta^{n-1}};$$

Fig. 187.



d'où, en remarquant que  $\frac{g}{b_n V'^n} = 1$ , il vient

$$\frac{\varepsilon}{V'} = \frac{3-n}{2n} \theta^2.$$

Donc

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{3-n}{n} 0,$$

ce qui, pour  $\theta = 0$ , montre que la tangente à l'hodographe est horizontale.

On pouvait prévoir ce résultat en remarquant qu'à la limite les deux points  $(v, \tau)_m$  et  $(v, \tau)_i$  se réunissent au point  $V'$  et que les deux tangentes en ces points ont pour limite une horizontale.

*Quatrième cas,  $n = 0$  :*

*Direction parabolique,  $\Theta = \frac{\pi}{2}$ .*

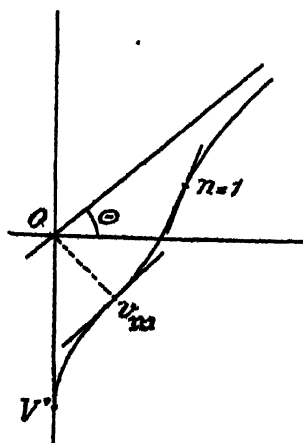
Si  $a > 1$ , on a  $V' = 0$ , et un point  $(v, \tau)_i$  de vitesse verticale minimum;

Si  $a = 1$ , on a une tangente horizontale au point  $V'$ ;

Si  $a < 1$ , on a  $V' = \infty$  et un point  $(v, \tau)_m$  de vitesse minimum.

*Remarque.* — Le degré  $n$  variant sur l'étendue de la loi de résistance, et  $n_\infty$  (pour  $v = \infty$ ) pouvant être différent de  $n'$  (pour  $v = V'$ ), les formes de l'hodographe à ses deux extrémités sont indépendantes et l'on peut avoir toutes les combinaisons de ces formes.

Fig. 188.



L'exemple suivant montre un cas où, en  $V'$ , on a  $n' < 1$  et où, pour  $v = \infty$ , on a  $n_\infty > 1$ ; il y a un point d'inflexion au passage de la fonction  $F(v)$  par  $n = 1$ .

*Problème.* — Comparer avec la forme véritable de l'hodographe

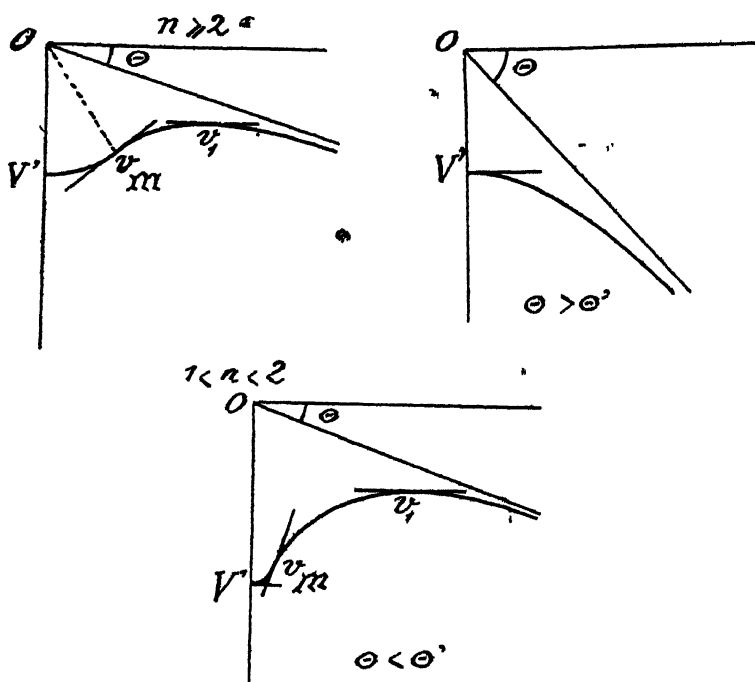
celle qui répond à l'équation

$$\sin \tau = \left( \frac{c F(v)}{g} \pm 1 \right) \left[ 1 - \left( \frac{v_m}{v} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{c F(v)}{g}$$

que le colonel A. Mata propose pour *équation finie de l'hodographe*.

189. Trajectoires sans sommet. — *Premier cas,  $n > 1$  :*

Fig. 189.



Rayon vecteur  $\Theta$ , asymptote; tangente en  $V'$  horizontale.

Si  $n = 2$ , il existe un point de vitesse minimum  $(v, \tau)_m$  et un point de vitesse verticale minimum  $(v, \tau)_l$ .

Si  $n < 2$ , ces deux points existent, lorsque  $\Theta < \Theta'$ . Il disparaissent lorsque  $\Theta = \Theta'$ . Si  $\Theta = \Theta'$ , ils sont réunis au point  $(V', -\frac{\pi}{2})$ .

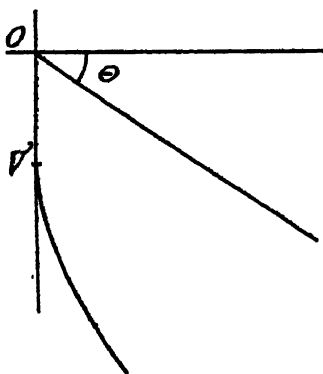
*Deuxième cas,  $n = 1$  :* Une droite inclinée passant au point  $V'$ . Pas de point  $(v, \tau)_m$ .

*Troisième cas,  $n < 1$  :* Ni point  $(v, \tau)_m$ , ni point  $(v, \tau)_l$  :

Tangente en  $V'$  verticale. Direction asymptotique  $\Theta$ .

*Quatrième cas,  $n = 0$  :* Ce cas ne peut pas exister, car toutes les trajectoires possibles admettent un sommet; on a toujours  $\Theta = +\frac{\pi}{2}$ .

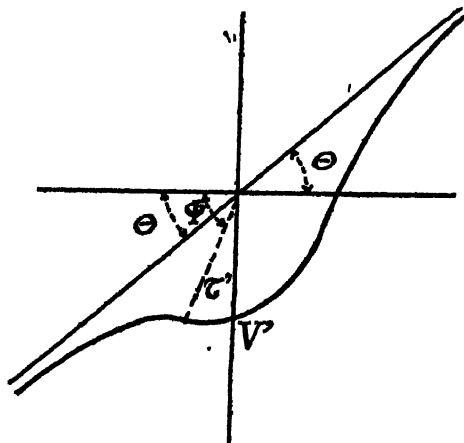
Fig. 190.



Cela résulte, en particulier, de l'équation de condition établie au n° 173 qui, pour  $n = 0$ , se réduit à  $a > 0$ , ce qui est toujours vérifié.

REMARQUES. — 1° *Sur le tracé continu de l'hodographe.* — Soit un hodographe correspondant à  $\Theta > 0$ ; nous l'avons limité à la valeur  $\tau = -\frac{\pi}{2}$ .

Fig. 191.



Mais, analytiquement, on peut considérer l'équation différentielle  $\frac{du}{d\tau} = \frac{c v F(v)}{g}$  pour des valeurs supérieures de  $\tau$ ; posons donc  $\tau = -\frac{\pi}{2} + \tau'$ .

On aura

$$\cos \tau = \cos \left( -\frac{\pi}{2} + \tau' \right) = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \tau' \right) = -\sin \tau'.$$



Mais, si  $\psi$  est l'angle complémentaire de  $\tau'$ , tel que  $\psi = \frac{\pi}{2} - \tau'$ , on aura  $\cos \tau = -\cos \psi$ .

D'autre part,  $d\tau = -d\tau' = d\psi$ .

Donc, l'équation différentielle  $\frac{d(v \cos \psi)}{d\psi} = -\frac{cnF(v)}{g}$ , en posant  $\psi = -\tau$ , sera la même équation que  $\frac{du}{d\tau} = \frac{cvF(v)}{g}$ ; mais elle représente alors l'hodographe qui admet un angle asymptotique  $\Theta$  négatif, dans le prolongement de l'angle asymptotique  $\Theta$  positif.

Les figures des n° 188 et 189 peuvent donc être juxtaposées, pour donner ce qu'on peut appeler l'hodographe complet du projectile (fig. 191). Le cas représenté correspond à  $n \geq 2$ .

2° Discuter l'hodographe dans le cas où l'on supposera  $n < 0$ . Prendre comme exemple,  $n = -1$ .

**190. Ensemble des hodographes d'un projectile.** — Étant fixée, une fois pour toutes, la fonction  $F(v)$  de la résistance de l'air, commune à tous les projectiles, un projectile particulier sera complètement déterminé au point de vue balistique : 1° par la connaissance de la vitesse terminale  $V'$ , telle que  $cF(V') = g$ ; cela revient à donner son coefficient balistique  $c$ ; 2° par l'angle limite  $\Theta$  correspondant à la vitesse  $v = \infty$ , et qui est déterminable à l'aide des trois caractéristiques initiales du tir ( $\alpha, c, V_0$ ).

Tous les hodographes d'un projectile seront donc déterminés par la seule variation de l'angle  $\Theta$ , qui variera de  $\left(+\frac{\pi}{2}\right)$  à  $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ . Tous les hodographes aboutissent au même point  $V'$ , pour  $\tau = -\frac{\pi}{2}$ , et ont même tangente en ce point.

1° Le lieu des points d'inflexion et de vitesse minimum de tous ces hodographes est la courbe  $cF(v) + g \sin \tau = 0$  (1).

Cette courbe, qu'on peut mettre, pour la discussion, sous la forme

$$b_n v^n + g \sin \tau = 0,$$

a pour inclinaison, sur le rayon vecteur en un point, l'angle  $i$  tel que  $\tan i = n \tan \tau$ .

Le cas de  $n = 0$  étant écarté, la courbe part de l'origine tangentiellement à l'horizontale, admet une tangente verticale pour  $\tan^2 \tau = \frac{1}{n}$  et vient finir au point  $V'$  avec une tangente horizontale.

2° Le lieu des points  $(v, \tau)$ , de vitesse verticale maximum est la courbe

$c F(v) \sin \tau + g = 0$  (II), qu'on mettra sous la forme

$$b_n v^n \sin \tau + g = 0.$$

Elle a pour inclinaison sur le rayon vecteur en un point

$$\tan i = -n \tan \tau.$$

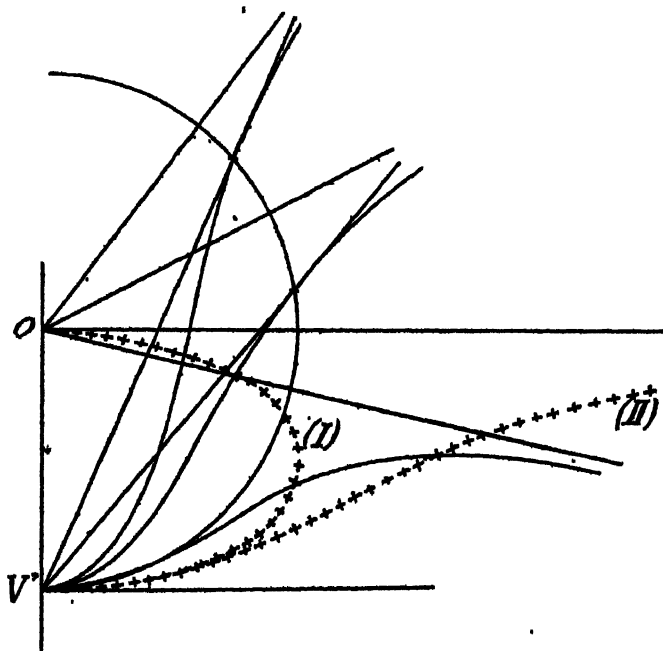
Pour  $\tau = 0$ , on a  $v = \infty$  et  $i = 0$ ;

Pour  $\tau = -\frac{\pi}{2}$ , on a  $v = V'$  et  $i = \frac{\pi}{2}$ .

3° S'il y a des points d'inflexion dus à la condition  $n = 1$  (187, 3°), ils sont sur une circonférence de centre O, puisqu'ils correspondent à une même vitesse d'après la courbe des  $F(v)$ .

4° Si l'on trace la circonférence de centre O et de rayon  $V'$ , les tangentes à tous les hodographes au point de rencontre vont passer par le point  $(V', -\frac{\pi}{2})$  (186, 4°).

Fig. 192.



5° D'ailleurs, cette propriété est vraie pour une circonférence quelconque de centre O. Les tangentes aux divers hodographes au point de rencontre avec la circonférence convergent (190, 4°) en un point P de la verticale tel que

$$OP = \frac{g v}{c F(v)}.$$

La figure ci-dessus correspond au cas des hodographes d'un projectile, dans l'hypothèse  $n \geq 2$ .

**191. Trajectoire orthogonale des hodographes.** — THÉOREME DU COLONEL JACOB. — *On peut obtenir par quadrature l'équation des trajectoires orthogonales des hodographes d'un projectile, quelle que soit la fonction  $F(v)$  de la résistance.*

Au point  $(v, \tau)$  de l'hodographe, la tangente à la courbe a pour expression

$$\text{tang } i = \frac{g \cos \tau}{cF + g \sin \tau}.$$

La trajectoire orthogonale au point  $(v, \tau)$  a une tangente  $i'$  telle que

$$\text{tang } i \text{ tang } i' = -1.$$

Donc

$$\text{tang } i' = -\frac{cF + g \sin \tau}{g \cos \tau}.$$

Mais, on a toujours, dans une courbe polaire  $(v, \tau)$ ,

$$\text{tang } i' = \frac{v \frac{d\tau}{dv}}{1}.$$

Par suite, dans le cas actuel, pour la trajectoire orthogonale de l'hodographe, on aura

$$\frac{v \frac{d\tau}{dv}}{1} = -\frac{cF + g \sin \tau}{g \cos \tau}.$$

On en déduit

$$\frac{cF}{g} dv + \sin \tau dv + v \cos \tau d\tau = 0$$

ou encore

$$\frac{cF}{g} dv - d(v \sin \tau) = 0.$$

Cette équation s'intégrera sous la forme

$$v \sin \tau + \frac{c}{g} \int F dv + K = 0,$$

qui définit une infinité de courbes, suivant la valeur donnée à l'arbitraire  $K$ .

Appelons  $V$  la valeur de la constante pour  $\tau = -\frac{\pi}{2}$ . On aura

$$v \sin \tau + V + \frac{c}{g} \int_V^v F dv = 0,$$

et, en faisant  $cF = b_n r^n$ ,

$$v \sin \tau + \frac{1}{n+1} \frac{v^{n+1} - V^{n+1}}{V^n} + V = 0.$$

Cette courbe, qui coupe déjà la verticale au point V, la rencontre encore au point

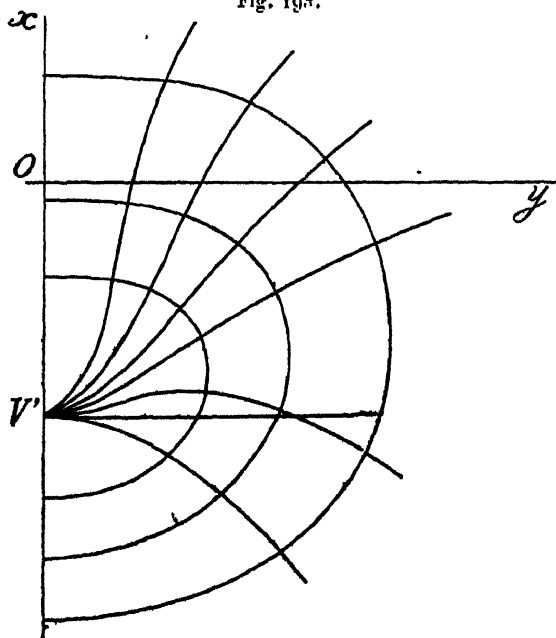
$$\frac{v^{n+1} - V^{n+1}}{v - V} = (n+1)V^n.$$

La trajectoire orthogonale, qui passe par l'origine, a pour équation

$$(n+1) \sin \tau + \left( \frac{v}{V'} \right)^n = 0.$$

Elle coupe l'axe vertical au point  $v = V'(n+1)^{\frac{1}{n}}$ .

Fig. 19<sup>A</sup>.



Celle qui passe par le point V a pour équation

$$(1) \quad \frac{1}{n+1} \left( \frac{v}{V'} \right)^{n+1} + \frac{n}{V'} \sin \tau + \frac{n}{n+1} = 0.$$

Elle coupe la verticale au point tel que

$$(2) \quad v[v^n - (n+1)V'^n] = -nV'^{n+1}.$$

Or, cette relation ne définit que le point V', car la fonction

$v[n - (n+1)V'^n]$  qui s'annule pour  $v = 0$  atteint sa valeur maximum pour  $v = V'$ , puisque sa dérivée  $[(n+1)v^n - (n+1)V'^n]$  s'annule pour  $v = V'$ . Donc, en aucun autre point, la relation (1) ne saurait être vérifiée.

Le point  $V'$  constitue donc le seul point auquel se réduit la courbe dans ce cas. On peut le démontrer directement :

La relation (1) qui s'écrit

$$\sin \tau = -\frac{V'}{v} \frac{1}{n+1} \left[ n + \left( \frac{v}{V'} \right)^{n+1} \right]$$

ne peut, en effet, être satisfaite. Le second membre a pour plus petite valeur l'unité, ce qu'on vérifie en prenant la dérivée de ce membre.

Donc il ne peut être égal à un sinus, sinon pour  $\tau = -\frac{\pi}{2}$ .

*Remarque.* — 1° Dans le cas de  $n = 1$ , l'équation de la trajectoire orthogonale s'écrit

$$v \sin \tau + \frac{b_1}{2g} v^2 + K = 0.$$

En coordonnées rectangulaires,  $x = v \sin \tau$ ,  $x^2 + y^2 = v^2$ ; on voit que cette courbe est la circonférence

$$x^2 + y^2 + \frac{2g}{b_1} x + \frac{2gK}{b_1} = 0,$$

dont le centre est au point  $V'$ . Ce résultat est bien conforme à la démonstration géométrique aisée qu'on peut en donner, puisque tous les hodographes sont, dans ce cas, des droites pivotant autour du point  $V'$ .

2° Dans le cas de  $n = 0$ , on a une ellipse dont l'équation est

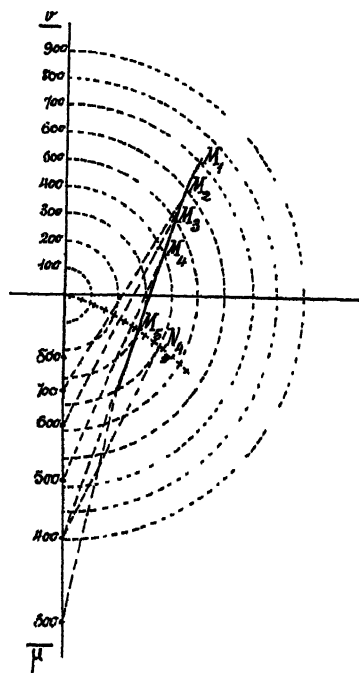
$$\left( \frac{b_0}{g} \right)^2 (x^2 + y^2) = (K - x)^2.$$

**192. Tracé graphique de l'hodographe.** — 1° Le commandant Parodi utilise, pour construire par points l'hodographe, la propriété de la tangente en un point  $(v, \tau)$  de couper la verticale au point  $\frac{g v}{c F(v)}$  au-dessous de l'origine.

Tracer des circonférences de centre O et de rayons 100, 200, 300, ..., 700, ...,  $v$ . Graduer la verticale au-dessous de O suivant les valeurs du rapport  $\frac{g v}{c F(v)}$ , avec les valeurs de  $v$  correspondantes comme cotes; cette échelle est marquée  $\mu$ .

On joindra l'origine  $M_1(x, y_0)$  qui est sur la circonférence  $r_{700}$ , au point  $\mu_{700}$ . Cette droite coupe la circonférence suivante  $v_{600}$  par exemple, en  $M_2$ . On joindra  $M_2\mu_{600}$ , qui donnera le point  $M_3$ , etc.

Fig. 191.



Si, par chaque point  $\mu$ , on mène la tangente à la circonférence de même cote, le point de tangence tel que  $N_1$ , appartient à la courbe des inflexions (c'est-à-dire de vitesse minimum), dans le réseau des hodographes du projectile.

2° Le commandant Parodi considère également la transformation en  $r^2$  de l'hodographe, dont l'équation différentielle est

$$\frac{dr^2}{r^2 d\tau} = \frac{1}{\frac{g}{2c F(v)} v^2 \cos \tau} \left[ v^2 + \frac{g v^2}{c F(v)} \sin \tau \right].$$

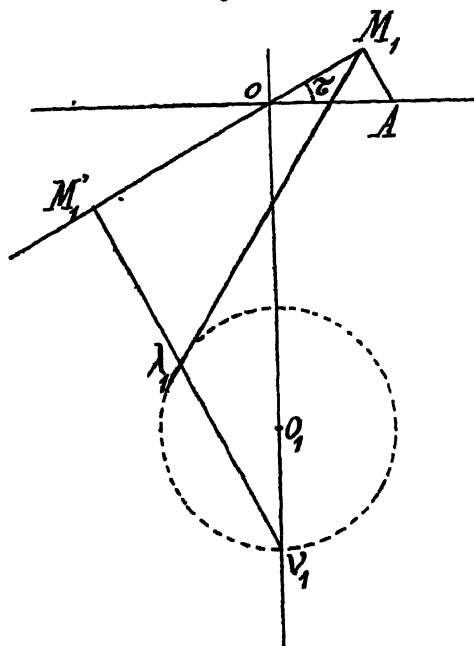
On gradue la verticale au-dessous de l'origine par une échelle  $v$  telle que

$$0 v_1 = \frac{g v_1^2}{c F(v_1)}, \quad 0 v_2 = \frac{g v_2^2}{c F(v_2)}, \quad \dots$$

On considère une série de circonférences ayant leurs centres sur la ver-

ticale en des points tels que  $OO_1 = \frac{3}{4} Ov_1$ ,  $OO_2 = \frac{3}{4} Ov_2$ , ..., et passant par les points  $v_1, v_2, \dots$ , c'est-à-dire que ces circonférences ont pour rayons respectifs  $\frac{Ov_1}{4}$ ,  $\frac{Ov_2}{4}$ , ...

Fig. 195.



Il est très aisé de voir que si l'on abaisse  $v_1 M'_1$  perpendiculaire sur le rayon vecteur  $OM_1$ , droite qui coupe la circonférence en  $\lambda_1$ , la tangente en  $M_1$  à la transformée en  $v^2$  est la droite  $M_1 \lambda_1$ .

La figure donne immédiatement  $OM_1 = v^2$  et  $M_1 A = v^2 \tan \tau$ . Elle donne donc les éléments nécessaires pour calculer par arcs l'abscisse  $ox = -\frac{v^2}{g} v \tau$ , et l'ordonnée  $oy = -\frac{v^2}{g} \tan \tau v \tau$ .

**193. Les hodographes des trois vitesses ( $v, u, w$ ).** — Comme on l'a fait pour la vitesse totale  $v$ , on peut étudier les courbes  $(u, \tau)$  et  $(w, \tau)$  des vitesses horizontale  $u$  et verticale  $w$ , en fonction de  $\tau$ .

Elle sont définies par les équations différentielles

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\tau} &= \frac{v}{\cos \tau} \left[ \frac{c F(v)}{g} + \sin \tau \right], & \frac{du}{d\tau} &= \frac{v F(v)}{g}, \\ \frac{dw}{d\tau} &= \frac{v}{\cos \tau} \left[ \frac{c F(v)}{g} \sin \tau + 1 \right]. \end{aligned}$$

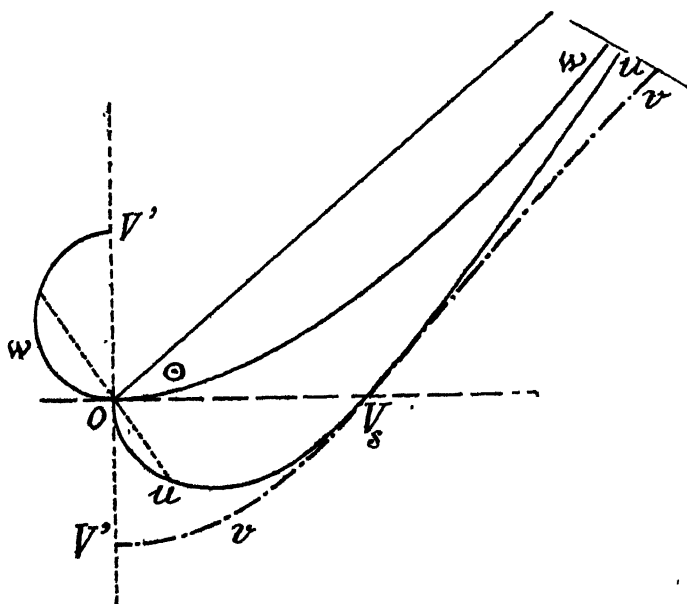
Leurs tangentes en un point sont données par les formules

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} i_v &= \frac{g \cos \tau}{c F + g \sin \tau}, & \operatorname{tang} i_u &= \frac{g \cos \tau}{c F(v)}, \\ \operatorname{tang} i_w &= \frac{g \cos \tau \sin \tau}{c F \sin \tau + g}. \end{aligned}$$

La figure ci-dessous donne le tracé des trois hodographes pour  $\Theta > 0$  et  $n > 1$ .

Les trois courbes ont même rayon vecteur asymptote  $\Theta$ .

Fig. 196.



L'hodographe ( $u$ ) est tangent à l'hodographe ( $v$ ) au sommet  $V_s$ , présente une tangente horizontale au point défini par la relation

$$2 \sin \tau = \rho - \sqrt{\rho^2 + 4},$$

où  $\rho = \frac{cF}{g}$  et vient finir à l'origine  $O$ , tangentiellement à la verticale.

L'hodographe ( $w$ ) est tangent, à l'origine, à l'horizontale, présente une tangente verticale au point défini par la même relation  $2 \sin \tau = \rho - \sqrt{\rho^2 + 4}$  que ci-dessus, et vient finir au point  $(-V')$  avec une tangente horizontale.

La trajectoire orthogonale des hodographes ( $u$ ) est

$$\sin \tau + \frac{c}{g} \int \frac{F(v)}{v} dv + K = 0.$$



194. **Étude de la courbe**  $(v, w)$ . — Au lieu d'étudier l'hodographe, c'est-à-dire la courbe  $(v, \tau)$ , on peut considérer des équations équivalentes, par exemple la courbe  $(v, w)$  des vitesses verticales  $w$  en fonction de la vitesse totale  $v$ , ou celle  $(u, v)$  des vitesses horizontale et totale. Nous donnerons d'abord une discussion sommaire de la première  $(v, w)$ , qui, sous une autre forme, rappellera des propriétés connues de l'hodographe.

En divisant membre à membre les deux équations écrites plus haut (193) :

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{v}{\cos \tau} \left( \frac{cF}{g} + \sin \tau \right), \quad \frac{dw}{d\tau} = \frac{v}{\cos \tau} \left( \frac{cF}{g} \sin \tau + 1 \right),$$

il vient

$$\frac{dw}{dv} = \frac{cF \sin \tau + g}{cF + g \sin \tau};$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{dw}{dv} = \frac{cvF + gv}{cvF + gw}.$$

1° Dans tous les cas, la courbe  $(v, w)$  est comprise entre les bissectrices des axes de coordonnées, puisque  $w = v \sin \tau \leq v$ .

Le point  $v = w = V'$ , tel que  $cF(V') = g$ , termine la courbe, et, en ce point, on a  $\frac{dw}{dv} = 1$ . La courbe se termine tangentielllement à la bissectrice du second quadrant.  $\Theta$  étant l'angle asymptotique correspondant à  $v = \infty$ , le rapport  $\frac{w}{v}$  a pour limite  $\sin \Theta$ . D'autre part, la différence  $\left( v \frac{dw}{dv} - w \right)$  a pour valeur

$$\frac{g \left( 1 - \frac{w^2}{v^2} \right)}{n^2 - 1 \left( b_n + \frac{g^2 w}{v^{n+1}} \right)},$$

qui, pour  $w = v \sin \Theta$ , devient

$$\frac{g \cos^2 \Theta}{b_n v^{n-1}}.$$

Si  $n > 1$ , cette quantité tend vers zéro pour  $v = \infty$ . La droite  $w = v \tan \theta$  d'inclinaison  $\theta$  telle que  $\tan \theta = \sin \Theta$  est une asymptote de la courbe  $(v, w)$ .

Si  $n < 1$ , il n'y a pas d'asymptote, mais seulement une direction asymptotique  $\theta$ .

2° Construisons, dans le plan  $(v, w)$ , les deux courbes

$$(I) \quad cvF(v) + gv = 0 \quad \text{et} \quad (II) \quad cvF(v) + gw = 0.$$

La courbe (I) est le lieu des points où  $\omega$  est minimum; la courbe (II) le lieu des points où  $v$  est minimum.

La courbe (I) qui, pour une résistance monome, est

$$b_n v^{n-1} \omega + g = 0,$$

part de  $(-\infty)$ , pour  $v = 0$ , si  $n_0 > 1$ , passe au point terminal  $V'$  et admet, pour tangente, la direction

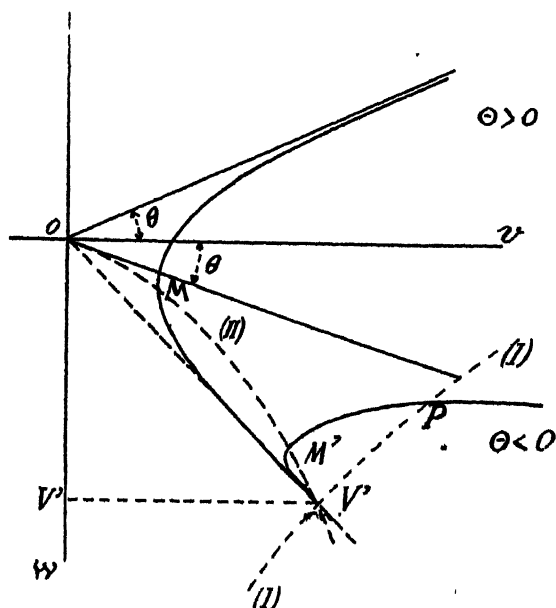
$$\frac{d\omega}{dv} = (n-1) \left( \frac{v'}{v} \right)^n;$$

elle finit asymptotiquement à l'axe des  $v$ .

Si  $n_0 < 1$ , elle part de l'origine, avec une tangente verticale, passe au point  $V'$  et a une forme parabolique.

La courbe (II) affecte la forme  $b_n v^{n+1} + g\omega = 0$ .

Fig. 197.



Elle part de l'origine, quel que soit  $n_0$ . On a, pour l'inclinaison de la tangente,

$$\frac{d\omega}{dv} = -(n+1) \left( \frac{v'}{v} \right)^n.$$

Elle est tangente à l'axe des  $v$  à l'origine, passe au point  $V'$ , où sa tangente est  $-(n+1)$  et a une allure parabolique à axe vertical.

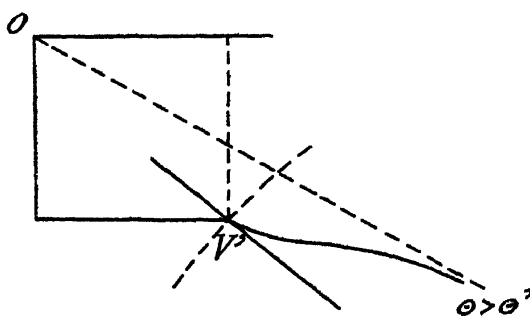
3° Ceci posé, on va pouvoir discuter les différentes formes de la courbe  $(v, w)$  en faisant état des théorèmes démontrés précédemment (§ 3).

*Premier cas :  $n > 2$ .* — Si  $\Theta > 0$  (trajectoire avec sommet), la courbe qui part de l'asymptote  $\theta$  rencontre l'axe des  $v$ , puis la courbe (II) où  $v$  passe par un minimum. Elle finit ensuite en  $V'$  tangentiellement à la bissectrice  $OV'$ .

Si  $\Theta < 0$  (trajectoire sans sommet), la courbe  $(v, w)$  rencontre d'abord en P la courbe (I) et, en ce point P, la vitesse verticale  $w$  passe par un minimum. Elle rencontre ensuite en  $M'$  la courbe (II); existe en ce point une vitesse  $v$  minimum.

*Deuxième cas :  $1 < n < 2$ .* — Même forme, si  $\Theta > 0$ , que dans le cas précédent.

Fig. 198.



Si  $\Theta < 0$ , il y a deux cas à distinguer suivant la valeur relative de  $\Theta$  et de  $\Theta'$ , ce dernier angle étant défini par la relation (180)

$$(n-1) \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \frac{d\tau}{\cos^{n-1}\tau} = n \int_0^{(\Theta)'} \frac{d\tau}{\cos^{n+1}\tau}.$$

Si  $\Theta < \Theta'$ , on a la même forme que dans l'exemple précédent.

Si  $\Theta > \Theta'$ , on a la forme ci-dessus.

*Troisième cas :  $n = 1$ .* — La courbe (I) devient une horizontale :  $b_1 w + g = 0$  qui passe par le point  $V'$ . La courbe (II) est la parabole :  $b_1 v^2 + g w = 0$ .

La courbe  $(v, w)$  a une asymptote qui ne passe pas par l'origine, mais par le point

$$w = -\frac{g \cos^2 \theta}{b_1} = -V' \cos^2 \theta.$$

Pour  $\Theta > 0$ , un point M de vitesse minimum.

Fig. 199.

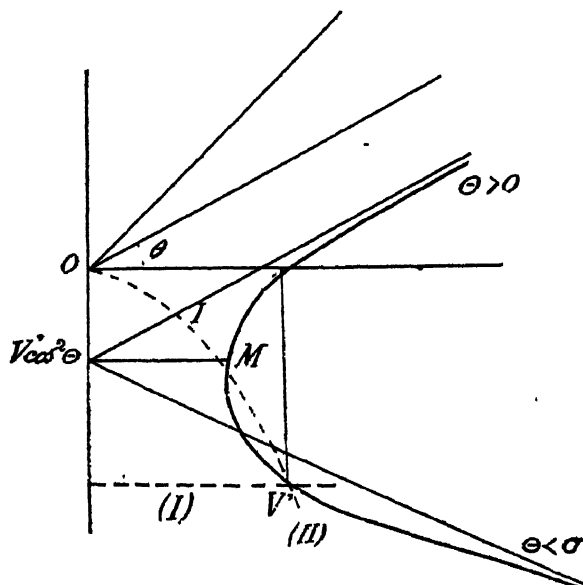
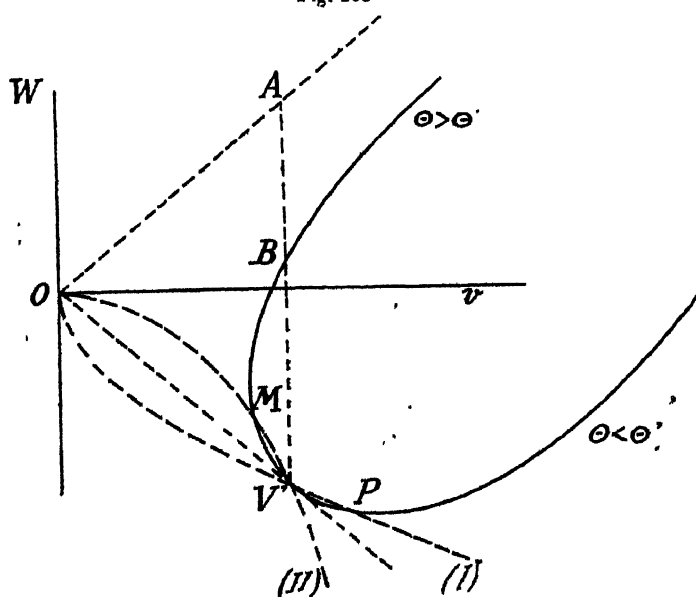


Fig. 200



Pour  $\Theta = 0$ , pas de vitesse ni de vitesse verticale minimum.

*Quatrième cas :  $n < 1$ .* — Si  $\Theta < 0$  (trajectoire sans sommet), il n'existe de minimum ni pour la vitesse, ni pour la vitesse verticale.

Si  $\Theta > 0$  (trajectoire avec sommet), ces deux mini s'excluent et l'un ou l'autre existera suivant qu'on a  $\Theta >$  ou  $< \Theta'$ .

PROBLÈME. — *Quel est le maximum de la différence  $(v - w)$ ?*

On a

$$\frac{d(v - w)}{dv} = 1 - \frac{dw}{dv};$$

d'où, d'après la valeur de  $\frac{dw}{dv}$ ,

$$1 - \frac{cvF + gw}{cvF + gw} = \frac{cF - g}{cvF + gw}(v - w),$$

ce qui s'annule pour  $cF(v) = g$  et, par suite, au point  $(V')$ , différent de  $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ , où la vitesse passe par une vitesse égale à la vitesse terminale.

Le minimum de  $(v - w)$  est représenté sur la figure par la ligne AB.

193. **Étude de la courbe  $(u, v)$ .** — Étudions, enfin, la courbe des vitesses horizontales  $u$  en fonction des vitesses  $v$ . Ces deux quantités sont liées par l'équation différentielle

$$\frac{du}{dv} = \frac{cF}{g} \frac{\cos \tau}{\frac{cF}{g} + \sin \tau}.$$

On a toujours  $v > u$ . Pour  $v = \infty$ , on a  $\lim \frac{du}{dv} = \cos \Theta$ . Cette droite définit l'asymptote ou la direction asymptotique de la courbe, car on a

$$\lim \left( v \frac{du}{dv} - u \right) = - \frac{v \sin \Theta \cos \Theta}{\frac{cF}{g} + \sin \Theta}.$$

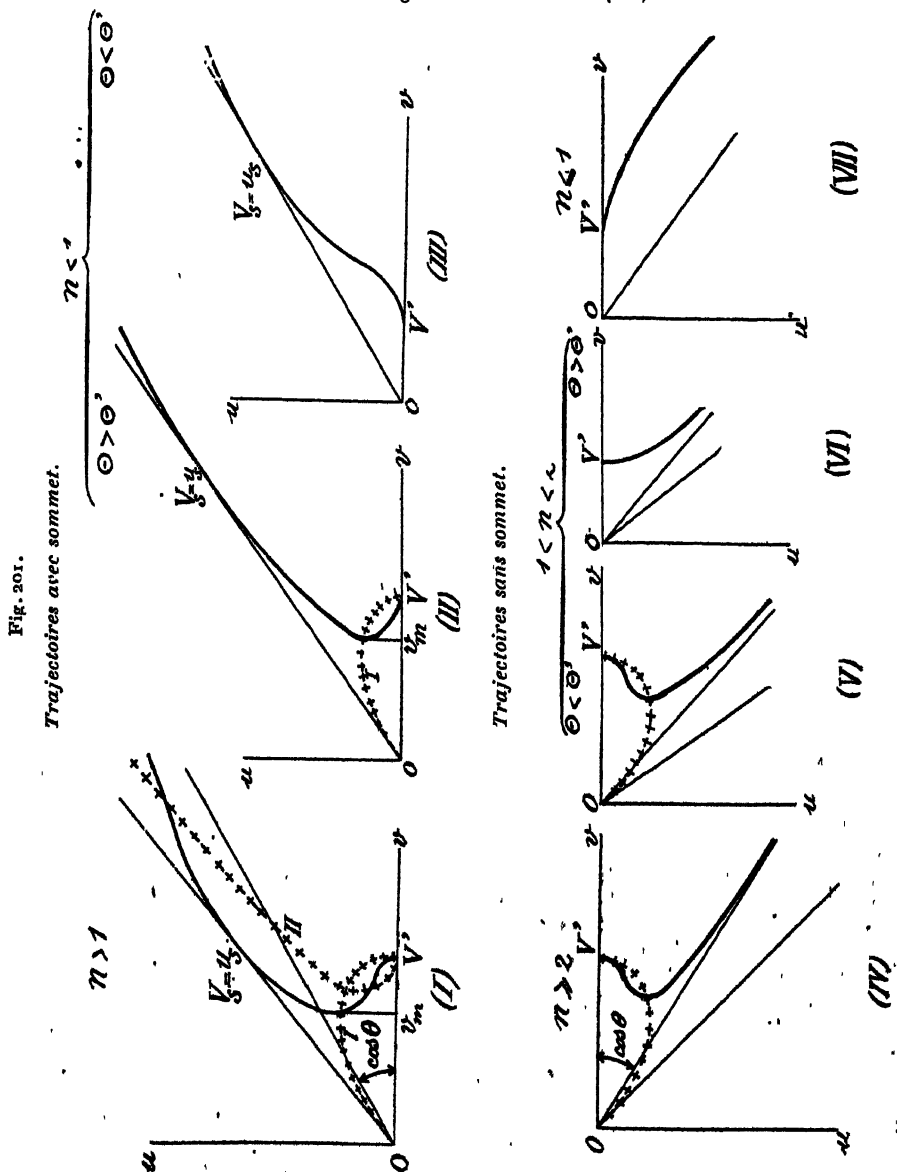
Cette quantité, pour  $n = \infty$  est nulle si  $n > 1$ , finie si  $n = 1$ , infinie si  $n < 1$ .

La courbe est tangente à la bissectrice des axes au sommet  $(u_s, v_s)$ . Elle admet une tangente verticale au point  $(v, \tau)_m$  de vitesse minimum tel que  $\frac{cF}{g} + \sin \tau = 0$  et elle vient finir au point  $(v = V', u = 0)$  sur l'axe des  $v$ .

En ce point, l'expression de la tangente  $\frac{du}{dv}$  se présente sous la

forme  $\frac{0}{0}$ , et l'on a

$$\lim \left( \frac{du}{dv} \right) = - \frac{\sin \tau \frac{d\tau}{dv}}{\frac{cF'}{g} + \cos \tau \frac{d\tau}{dv}} = \frac{g}{cF' \left( \frac{d\tau}{dv} \right)}.$$



Mais, on sait (486, 7°) que si  $n'$  est le degré de la résistance au point  $V'$ ,

on a

$$\frac{dv}{d\tau} = 0 \quad \text{si } n' > 1 \quad \text{et} \quad \frac{dv}{d\tau} = \infty \quad \text{si } n' < 1.$$

Donc si  $n' > 1$ , la tangente de la courbe au point  $V'$  est *verticale*; si  $n' = 1$ , elle est *inclinée*; si  $n' < 1$ , elle est *horizontale*.

Quand  $\theta$  varie (tir du même projectile sous différents angles), le lieu des points de vitesse minimum est défini par la relation  $\frac{cF}{g} + \sin \tau = 0$  ou, avec les variables  $u$  et  $v$ ,

$$\left(\frac{cF}{g}\right)^2 = 1 - \frac{u^2}{v^2} \quad (\text{courbe I}).$$

La courbe présente des points d'inflexion obtenus en écrivant  $\frac{d^2u}{dv^2} = 0$ . On trouve aisément la relation

$$n \sin^2 \tau + (n-1) \frac{cF}{g} \sin \tau - 1 = 0$$

ou

$$n \left(1 - \frac{u^2}{v^2}\right) + (n-1) \frac{cF}{g} \sqrt{1 - \frac{u^2}{v^2}} - 1 = 0.$$

D'après cela et en se reportant au n° 188, pour les différents cas qui peuvent se présenter, on aura les formes de la figure 201 qui représentent l'allure de la fonction  $(u, v)$ .

Considérons le cas de  $n = 1$ . On a

$$\frac{du}{dv} = \frac{b_1}{g} \frac{u}{\frac{b_1 v}{g} + \sin \tau}$$

ou

$$\left(\frac{b_1 v}{g} + \sin \tau\right) = \frac{b_1}{g} u \frac{dv}{du}.$$

Différentiant par rapport à  $u$ , on aura

$$\frac{b_1}{g} \frac{dv}{du} + \cos \tau \frac{d\tau}{du} = \frac{b_1}{g} \frac{dv}{du} + \frac{b_1}{g} u \frac{d^2 v}{du^2}.$$

Mais  $\frac{d\tau}{du} = \frac{g}{b_1 v^2}$ . On aura donc

$$v^2 \frac{d^2 v}{du^2} = \frac{g^2}{b_1^2},$$

et l'on vérifie que cette équation est satisfaite par la relation

$$v^2 = (1 + Q^2) u^2 + \left(\frac{g}{b_1}\right)^2 - 2Q \frac{g}{b_1} u$$

ou

$$v^2 = u^2 \left[ 1 - \left( Q - \frac{S}{b_1 u} \right)^2 \right],$$

formules où  $Q$  est une constante égale à  $\tan \Theta$ .

La courbe  $(u, v)$  est ainsi une hyperbole.

**196. Hodographe des résistances.** — On a quelquefois intérêt à considérer la courbe polaire  $(\beta, \tau)$  obtenue en portant sur le rayon vecteur d'inclinaison  $\tau$ , une longueur  $\beta = c F(v)$  proportionnelle à la résistance de l'air (7).

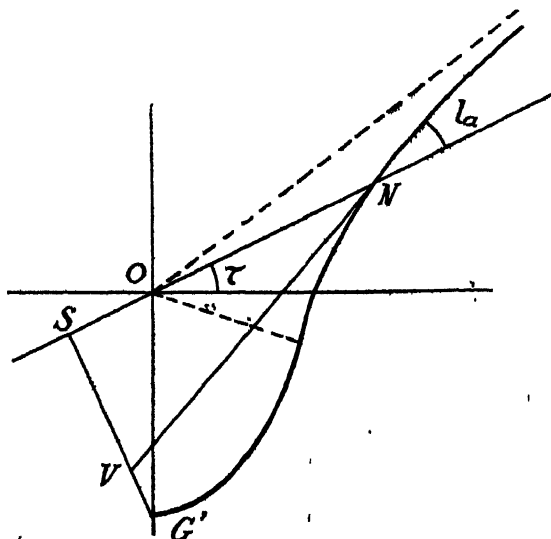
On a

$$\frac{d\beta}{d\tau} = c F' \frac{dv}{d\tau}.$$

L'angle  $\iota_a$  de la tangente à la courbe est donné par la formule

$$\tan \iota_a = \beta \frac{d\tau}{d\beta} = \frac{\beta}{F'} \frac{d\tau}{dv} = \frac{1}{n} \frac{\beta}{v} \frac{d\tau}{dv} = \frac{1}{n} \tan \iota_v.$$

Fig. 902.



Dans cette notation,  $\iota_a$  est la tangente à la courbe  $(\beta, \tau)$  et  $\iota_v$  la tangente à l'hodographe ordinaire des vitesses  $(v, \tau)$ .

On a encore

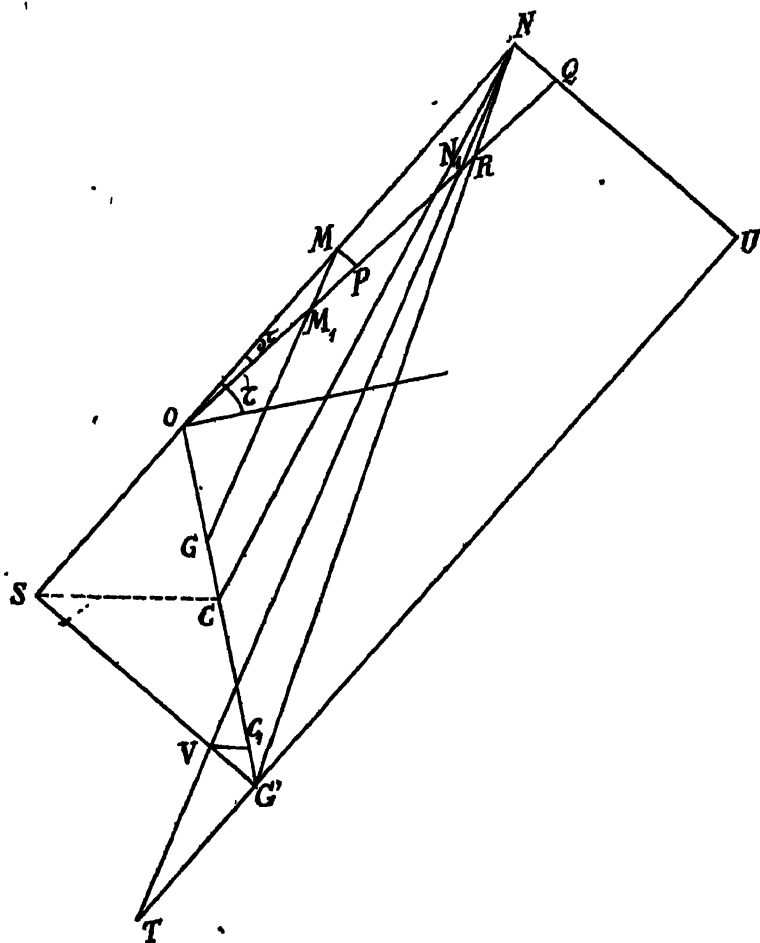
$$\tan \iota_a = \frac{1}{n} \frac{S \cos \tau}{\beta + S \sin \tau}.$$



Pour construire la tangente, au point N de l'hodographe des résistances, abaissant G'S perpendiculaire sur le rayon vecteur ON, on prendra  $OG' = g$ . On a

$$G'S = g \cos \tau.$$

Fig. 203.



Prendre alors  $SV = \frac{1}{n} G'S = \frac{1}{n} g \cos \tau$ , et joindre VN; on a, en effet,

$$SON = \beta + g \sin \tau; \quad \text{donc} \quad \tau_n = SNV.$$

La courbe  $(\beta, \tau)$  admet une asymptote inclinée de l'angle  $\Theta (\nu = \infty)$ : elle aboutit au point G' sur l'axe vertical tel que  $OG' = g$ . On a, en

effet,  $\frac{cF(V')}{g} = 1$  au point  $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ . Elle possède, en ce point, une tangente parallèle à celle de l'hodographe ordinaire, c'est-à-dire *horizontale*, si  $n > 1$ , *inclinée* si  $n = 1$ , *verticale* si  $n < 1$ .

D'ailleurs  $\frac{d\beta}{d\tau}$  ne s'annule que pour  $\frac{dv}{d\tau} = 0$ ; donc le point de résistance minimum correspond au même angle que dans l'hodographe des vitesses.

Mais la courbe  $(\beta, \tau)$  ne présente pas d'inflexion en ce point.

Employant, en effet, la formule du n° 187, où l'on remplacera  $v$  par  $\beta$ , on voit que le point d'inflexion correspond à

$$\beta^2 + 2 \left( \frac{d\beta}{d\tau} \right)^2 - \beta \frac{d^2\beta}{d\tau^2} = 0,$$

ce qui conduit à l'équation

$$(n+1) \sin^2 \tau + \frac{nb_n v^n}{g} \sin \tau - 1 = 0,$$

qui détermine le point d'inflexion.

*Démonstration du lieutenant-colonel Filloux.* — Soient  $M, M_1$  deux points voisins de l'hodographe des vitesses correspondant à  $\tau$  et  $(\tau - d\tau)$ .

Soient, sur les mêmes rayons vecteurs,  $N, N_1$  deux points de l'hodographe des résistances. La droite  $MM_1$  est la tangente au premier, la droite  $NN_1$  au second hodographe.]

Par  $N$ , menons  $NR$  parallèle à  $MM_1$ ; cette droite coupe la verticale de  $O$  au point  $G'$  tel que  $OG' = g$ .

En effet,

$$\frac{OG'}{OG} = \frac{OM}{ON} = \frac{v}{\beta} = \frac{v}{cF}.$$

Mais on sait que  $OG = \frac{gv}{cF}$ . Donc  $OG' = g$ . Le point  $G'$  est donc fixe.

Soient  $MP$  et  $NQ$  perpendiculaires sur le rayon vecteur. On a

$$M_1P = dv, \quad MP = v d\tau, \quad N_1Q = cF'(v) dv, \quad NQ = cF(v) d\tau, \\ RQ = (M_1P) \frac{OM}{ON} = \frac{cF}{v} dv.$$

Par  $G'$ , soit  $TG'U$  parallèle et  $G'S$  perpendiculaire au rayon vecteur; la première droite coupe  $NN_1$  en  $T$  et  $NQ$  en  $U$ . Par suite de l'égalité des longueurs  $SN$  et  $G'U$  et de la similitude des triangles  $NN_1R$  et

NTG', NRQ et NGU. TG'V et SNV, on a

$$\frac{G'V}{G'S} = \frac{N_1R}{N_1Q} = \frac{vF' - F'}{vF'} = \frac{n-1}{n}.$$

Or, puisque G' est fixe, S décrit une circonférence de diamètre OG' et de centre C. Pour une résistance  $n^{\text{ième}}$ , le point V décrit donc une circonférence de centre C<sub>1</sub> (VC<sub>1</sub> étant parallèle à SC).



---

## CHAPITRE III.

### ETUDE GÉNÉRALE DE LA COURBE BALISTIQUE.

---

#### I. — FORME DE LA TRAJECTOIRE.

197. **Théorème I.** — *La trajectoire est une courbe plane.* — En effet, le plan vertical mené à un instant quelconque du mouvement par la tangente à la trajectoire contient tous les éléments du mouvement, c'est-à-dire la vitesse, la résistance de l'air supposée tangentielle et la pesanteur. Le projectile ne peut donc sortir de ce plan.

Comme, des deux forces qui agissent sur le projectile, l'une, la résistance de l'air, ne peut avoir d'autre effet que de le retarder suivant la tangente, et l'autre, la gravité, que de l'abaisser suivant une verticale, la trajectoire tournera sa concavité vers le bas, c'est-à-dire vers les  $y$  négatifs.

198. **Théorème II.** — *L'inclinaison de la tangente va toujours en diminuant quand l'abscisse croît.* — En effet, on a (157)  $dx = -\frac{v^2}{g} d\tau$ , ce qui montre que  $dx$  et  $d\tau$  sont toujours de signes contraires.

Supposons qu'à l'origine du mouvement,  $\tau$  ait une valeur positive  $\alpha$ , qui est l'angle de projection. Dans le sens des  $x$  croissants,  $\tau$  diminue jusqu'à la valeur zéro.

Au point  $\tau = 0$ , correspond le sommet S de la trajectoire atmosphérique qui, dans l'hypothèse de  $\alpha$  positif, comprend ainsi une branche ascendante et une branche descendante.

A partir du sommet,  $\tau$  change de signe, devient, par conséquent, négatif et augmente en valeur absolue. Mais cet angle ne peut jamais dépasser la valeur  $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ , car, pour  $\tau = -\frac{\pi}{2}$ , la vitesse serait dirigée suivant la verticale et tous les éléments du mouvement, vitesse, résistance et gravité, seraient en ligne droite, de sorte que le projectile ayant atteint cette verticale ne pourra plus la quitter.

D'ailleurs, ainsi qu'il a été démontré, le projectile ne s'arrêtera jamais avant d'avoir atteint la limite  $\tau = -\frac{\pi}{2}$  (170).

Si l'angle de projection  $\alpha$  n'est pas positif, tantôt la trajectoire aura un sommet en amont de  $\alpha$ , tantôt elle n'en aura pas. La démonstration de cette propriété a été donnée plus haut (174).

199. **Théorème III.** — *La vitesse horizontale  $u$  diminue toujours quand l'abscisse croît* — En effet, on a l'équation (157)

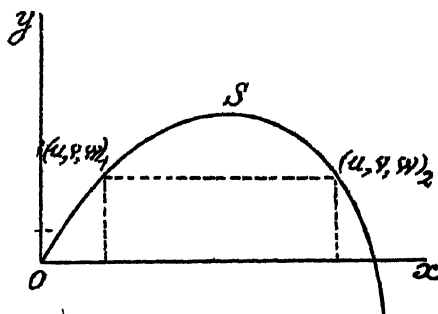
$$du = -\frac{c F(v)}{v} dx.$$

Si  $dx$  est positif, le second membre est négatif; donc  $du$  est négatif et  $u$  décroît jusqu'à la valeur zéro qu'il atteint pour  $\tau = -\frac{\pi}{2}$  (171).

200. **Théorème IV.** — *Dans une trajectoire avec sommet, les trois vitesses  $u_1, v_1, w_1$  correspondant à l'ordonnée  $y$  de la branche ascendante sont plus grandes que les vitesses  $u_2, v_2, w_2$  correspondant à la même ordonnée  $y$  de la branche descendante.*

1° *Vitesses horizontales* :  $u_1 > u_2$ . — Cette inégalité résulte du théorème III, puisque  $u$  va constamment en décroissant.

Fig. 201.



2° *Vitesses totales* :  $v_1 > v_2$ . — Cette propriété résulte de l'application du théorème des forces vives : étant donnés deux points situés à la même hauteur au-dessus du sol, le travail de la pesanteur, pour aller de l'un à l'autre, est nul et le travail de la résistance de l'air est négatif.

Ainsi on écrira

$$(1) \quad \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) = -\int_0^s c F(v) ds,$$

$ds$  étant l'élément de l'arc  $s$  de trajectoire. Le second membre étant négatif, on aura  $v_1 > v_2$ .

On arrive à la même inégalité entre  $v_1$  et  $v_2$  en partant de l'équation (157)

$$\frac{dv}{dt} = -g \sin \tau - c F(v),$$

qu'on écrira

$$v dv = -g v \sin \tau dt - c F(v) v dt,$$

d'où

$$v dv = -g dy - c F(v) ds.$$

L'intégration donne, depuis  $s = y = 0$ ;  $v = V_0$  jusqu'à  $(s, y, v)$ , la formule

$$c \int_0^s F(v) ds + g y = \frac{1}{2} (V_0^2 - v^2).$$

Si l'on multiplie les deux membres de l'équation par la masse  $m$  du projectile, le premier membre est la somme du travail de la résistance et du travail de la pesanteur; le second membre représente la force vive dépensée.

3° *Vitesse verticale* :  $w_1 > w_2$ . — On a (156)

$$dw = -g dt - c F \sin \tau dt.$$

Multiplions par  $w = v \sin \tau$ ; comme  $w dt = dy$ , il viendra

$$w dw = -g dy - c v F \sin^2 \tau dt.$$

Intégrant de  $y$  à  $y$ , de l'une à l'autre branche, on aura

$$\frac{1}{2} (w_2^2 - w_1^2) = -c \int_0^t v F \sin^2 \tau dt.$$

Le second membre est une quantité négative; donc

$$w_1 > w_2.$$

G. Q. F. D.

201. **Théorème V.** — Soit une trajectoire avec sommet, d'origine  $O$  et de sommet  $S$ . Considérons deux points  $A_1$  et  $A_2$  situés sur une même horizontale (mêmes  $y$ ).

Soient : 1° *Les inclinaisons des tangentes*  $\tau_1$  en  $A_1$ ,  $\tau_2$  en  $A_2$ ;

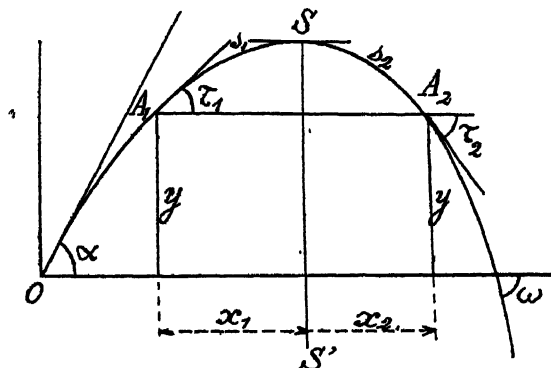
2° *Les abscisses*  $x_1$ , de  $A_1$  à  $S$ ,  $x_2$ , de  $S$  à  $A_2$ ;

3° *Les arcs de trajectoire*  $s_1$ , de  $A_1$  à  $S$ ,  $s_2$ , de  $S$  à  $A_2$ ;

4° *Les temps*  $t_1$ , de  $A_1$  à  $S$ ,  $t_2$ , de  $S$  à  $A_2$ .

On a les théorèmes suivants : 1°  $\tau_1 < \tau_2$ ; 2°  $x_1 > x_2$ ; 3°  $s_1 > s_2$ ; 4°  $t_1 < t_2$ .

Fig: 205.



1° On a  $\tau_1 < \tau_2$ .

L'équation différentielle qui donne  $dy$  (157) peut s'écrire

$$\frac{g dy}{v^2 \cos^2 \tau} = - \tan \tau \frac{d\tau}{\cos^2 \tau}.$$

Intégrons, sur la branche ascendante, depuis  $(\tau, y)$  jusqu'au sommet, où  $y = Y_s$ , on a

$$\int_y^{Y_s} \frac{g dy}{v^2 \cos^2 \tau} = \frac{1}{2} \tan^2 \tau_1.$$

Intégrons, sur la branche descendante, depuis  $(o, Y_s)$  jusqu'au point d'ordonnée  $y$ . On aura

$$\int_{Y_s}^y \frac{g dy}{v^2 \cos^2 \tau} = - \frac{1}{2} \tan^2 \tau_2,$$

ou encore, en changeant les signes,

$$\int_y^{Y_s} \frac{g dy}{v^2 \cos^2 \tau} = \frac{1}{2} \tan^2 \tau_2.$$

Mais, d'après le théorème IV, dans cette seconde intégrale, la vitesse horizontale  $v \cos \tau$  est toujours plus petite que la même fonction au dénominateur de la première intégrale. La seconde intégrale est donc plus grande que la première, car leurs limites sont les mêmes. Donc, on a  $\tau_2 > \tau_1$ .

C. Q. F. D.

2° On a  $x_1 > x_2$ .

Comme on a  $dx = \frac{dy}{\tan \tau}$ , on écrira, pour la branche ascendante,

$$x_1 = \int_0^{y_1} \frac{dy}{\tan \tau},$$

et, pour la branche descendante,

$$x_2 = \int_{y_1}^0 \frac{dy}{\tan \tau}.$$

Mais, pour le même  $y$ , on a toujours  $\tau_2 > \tau_1$ ; la seconde intégrale sera, élément par élément, plus petite que la première, et, les limites étant les mêmes, on aura  $x_1 > x_2$ . C. Q. F. D.

3° On a  $s_1 > s_2$ .

On part de l'équation  $ds = \frac{dy}{\sin \tau}$  et le raisonnement est absolument le même que précédemment.

4° On a  $t_1 < t_2$ .

On part de  $dt = \frac{dy}{w}$ ; d'où

$$t_1 = \int_0^{y_1} \frac{dy}{w}, \quad \text{et} \quad t_2 = \int_{y_1}^0 \frac{dy}{w}.$$

Mais, d'après le théorème IV, on a  $w_1 > w_2$  en deux points de même ordonnée. Donc, la seconde intégrale est plus grande que la première et le théorème  $t_1 < t_2$  est démontré.

**202. Origine et point de chute.** — Les théorèmes précédents appliqués à l'origine et au point de chute s'énonceront ainsi qu'il suit :

1° Les trois vitesses restantes ( $v_w, u_w, w_w$ ) sont plus petites que les trois vitesses initiales ( $v_0, u_0, w_0$ ).

2° L'angle de chute  $\omega$  est plus grand que l'angle de projection  $\alpha$ .

3° L'abscisse  $\lambda$ , du sommet S de la trajectoire est plus grande que la moitié de la portée  $\Lambda$ .

4° L'arc qui va de l'origine au sommet est plus grand que la moitié de l'arc total, de l'origine au point de chute.

5° Le temps  $T_s$  mis par le projectile pour aller au sommet est plus petit que la moitié de la durée du trajet T.

**203. Théorème VI.** — Le temps mis par le projectile pour parcourir la branche ascendante de la trajectoire atmosphérique est plus petit que le temps nécessaire pour parcourir la branche analogue dans le vide, à égalité de conditions initiales.



On a, en effet,

$$dt = -\frac{u}{g} \frac{d\tau}{\cos^2 \tau};$$

dans le vide :

$$t_{(\text{vide})} = \frac{u_0}{g} (\tan \alpha - \tan \tau)$$

et

$$t_{(\text{air})} = \frac{u_m}{g} (\tan \alpha - \tan \tau);$$

$u_m$  étant une moyenne entre  $u_0$  et  $u_s$ ; comme la vitesse horizontale diminue toujours sur la trajectoire atmosphérique, le théorème est démontré.

Il s'applique non seulement au sommet  $\tau = 0$ , mais à tout arc d'égale amplitude de  $\alpha$  à  $\tau$ , sur les deux trajectoires.

## II. — LES POINTS REMARQUABLES DE LA COURBE BALISTIQUE.

204. **Le point  $\Omega$ .** — L'origine ( $\alpha$ ,  $V_0$ ) de la trajectoire, définie par la bouche du canon, n'est qu'un point quelconque, analytiquement parlant, et sans propriétés spéciales, de la courbe balistique. On peut donc, en donnant à  $\alpha$  des valeurs négatives, suivre le projectile en amont de l'origine et chercher les propriétés de la trajectoire dans cette région, analytiquement définie par la même équation.

L'équation  $dx = -\frac{v^2}{g} d\tau$  montre que, si  $dx$  est négatif,  $d\tau$  sera toujours positif; l'inclinaison augmente donc en amont de l'origine. D'autre part, l'équation de l'hodographe  $\frac{du}{d\tau} = \frac{cv F(v)}{g}$  montre que  $du$  est positif en même temps que  $d\tau$ .

La vitesse horizontale  $u = v \cos \tau$  croît donc. Il a été démontré (172) qu'avant d'arriver à la limite  $\tau = \frac{\pi}{2}$ , la vitesse  $v$  devenait infinie. Le point  $\Omega$  de la trajectoire qui correspond à une vitesse infinie est l'extrémité de la courbe balistique et la véritable origine de la trajectoire. Ce sont les propriétés de la courbe en ce point  $\Omega$  que nous nous proposons d'étudier maintenant.

205. **Tangente au point  $\Omega$ .** — Nous avons déterminé (172) la limite  $\theta$  de l'inclinaison  $\tau$  sur l'hodographe. Cet angle  $\theta$  est aussi l'inclinaison limite de la tangente à la trajectoire du point  $\Omega$ .

Nous avons vu que la démonstration était basée sur l'hypothèse qu'une

certaine intégrale,  $\int_{\infty}^V \frac{g dv}{v F(v)}$ , prise entre une limite finie  $V_0$  et l'infini, ne devenait jamais infinie; d'ailleurs cette hypothèse est réalisée lorsque, pour les très grandes vitesses, le degré  $n_{\infty}$  de la résistance est plus grand que zéro.

On désigne par  $J(v)$  l'intégrale  $-\int_v^V \frac{g dv}{v F(v)}$ , où  $V$  est une vitesse auxiliaire quelconque.

On a donc

$$J(v) - J(V_0) = -\int_{V_0}^v \frac{g dv}{v F(v)}.$$

Nous supposons  $J(\infty)$  fini. Dans ces conditions, on énoncera le théorème suivant : *La tangente extrême de la trajectoire au point  $\Omega$ , où l'on a  $v = \infty$ , est oblique; elle fait avec l'horizontale un angle  $\Theta < \frac{\pi}{2}$ .*

Comme cas d'exception, on a  $\Theta = \frac{\pi}{2}$  si le degré  $n_{\infty}$  de la résistance, pour  $v = \infty$ , est tel que  $n_{\infty} = 0$ .

206. Éléments de la trajectoire au point  $\Omega$ . — L'hodographe étant écrit

$$\frac{g}{c} \frac{dv}{v F} = \frac{d\tau}{\cos \tau} \left( 1 + \frac{g}{c F} \sin \tau \right),$$

on voit que, dans le voisinage du point  $\Omega$ , c'est-à-dire pour les valeurs très grandes de  $v$ , le facteur  $\frac{g}{c F} \sin \tau$  devient très petit et, par suite, négligeable devant l'unité. Cette proposition ne sera cependant pas exacte si le degré  $n_{\infty}$  est égal à zéro.

Ce cas excepté, l'hodographe tendra donc à se réduire à la forme simple

$$\frac{g}{c} \frac{dv}{v F} = \frac{d\tau}{\cos \tau}.$$

Si l'on porte cette expression dans les équations différentielles du mouvement (157) :

$$dt = -\frac{v}{g} \frac{d\tau}{\cos \tau}, \quad dx = -\frac{v^2}{g} d\tau, \quad dy = -\frac{v^2}{g} \tan \tau d\tau,$$

il viendra

$$dt = -\frac{dv}{c F(v)}, \quad dx = -\frac{v \cos \tau dv}{c F(v)}, \quad dy = -\frac{v \sin \tau dv}{c F(v)}.$$

Mais, d'après l'équation  $\frac{g}{c} \frac{dv}{v F} = \frac{d\tau}{\cos \tau}$ , où  $\tau$  ne tend pas vers  $\frac{\pi}{2}$

quand  $v$  tend vers l'infini, les variations de l'angle  $\tau$  sont extrêmement faibles relativement à celles de la vitesse. On pourra donc poser, dans les trois équations ci-dessus,  $\tau = \Theta - \varepsilon$ , l'angle  $\varepsilon$  étant un infiniment petit d'un ordre qui dépend du degré  $n_\infty$  de la résistance;  $\varepsilon$  tend vers zéro pour  $v = \infty$ .

1° *Temps.* — Entre les points  $(V_0, \alpha)$  et  $(v, \tau)$ , où  $v$  est déjà assez grand pour que l'hodographe simplifié puisse s'appliquer, on aura

$$t = -\frac{1}{c} \int_{V_0}^v \frac{dv}{F(v)}.$$

On a déjà rencontré (95) la même fonction intégrale qui a été désignée par le symbole

$$S(v) = - \int \frac{v}{F(v)} dv.$$

Donc, pour  $V_0 = \infty$ , on aura

$$cT_\infty = S(\infty) - S(V_0).$$

**THÉORÈME.** — *Suivant que la fonction  $S(v)$  sera finie ou infinie pour  $v = \infty$ , le temps mis par le projectile pour aller du point  $\Omega$  à un point quelconque de la trajectoire sera fini ou infini.*

2° *Abscisse.* — On a  $\cos \tau = \cos \Theta + \varepsilon \sin \Theta$ , et, en ne conservant que le terme principal, il viendra

$$dx = -\cos \Theta \frac{v dv}{c F(v)} + \varepsilon(\dots);$$

d'où, en intégrant,

$$x = -\frac{\cos \Theta}{c} \int_{\infty}^{V_0} \frac{v dv}{F(v)} + \dots$$

Il s'introduit ici la fonction

$$D(v) = - \int \frac{v^2}{F(v)} dv.$$

Donc

$$cx = [D(\infty) - D(V_0)] \cos \Theta.$$

**THÉORÈME.** — *Suivant que la fonction  $D(v)$  sera finie ou infinie pour  $v = \infty$ , l'abscisse du point  $\Omega$  sera finie ou infinie.*

3° *Ordonnée.* — On écrira de même

$$cy = [D(\infty) - D(V_0)] \sin \Theta.$$

**THÉORÈME.** — *L'ordonnée est finie ou infinie dans les mêmes conditions que l'abscisse.*

1<sup>re</sup> *Asymptote*. — Lorsque le point  $\Omega$  est rejeté à l'infini dans la direction  $\Theta$ , la question se pose de savoir si la trajectoire admet une asymptote ou si elle tend seulement à prendre la direction  $\Theta$  à la manière d'une parabole qui, à l'infini, devient parallèle à son axe.

Au voisinage du point  $\Omega$ , l'hodographe peut s'écrire

$$\frac{d\tau}{\cos^2 \tau} = \frac{g}{c \cos \tau} \frac{dv}{F}.$$

Intégrant de  $\alpha$  à  $\tau$  et de  $V_0$  à  $v$ , on aura

$$\tan \tau - \tan \alpha = \frac{J(V_0) - J(v)}{c \cos \theta}.$$

ou encore

$$\tan \tau = q - \frac{J(v)}{c \cos \theta},$$

$q$  étant la constante

$$q = \tan \alpha + \frac{J(V_0)}{c \cos \theta}.$$

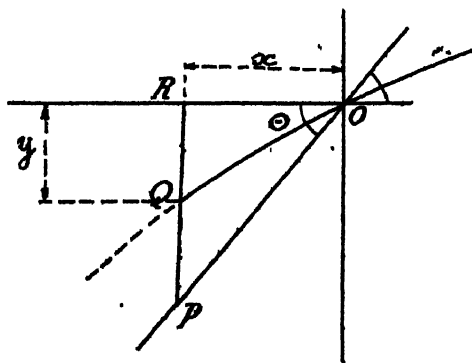
Comme  $\frac{dv}{dx} = \tan \tau$ , on aura, en intégrant une deuxième fois,

$$y = qx - \frac{1}{c \cos \theta} \int_{V_0}^v J(v) dv$$

Mais

$$dx = - \frac{v dv}{c F \cos \theta}.$$

Fig. 101.



On aura ainsi

$$y = qx + \frac{1}{c^2} \int_{V_0}^v J(v) \frac{v dv}{F(v)}.$$

Posons, comme définition d'une nouvelle fonction balistique,

$$\Delta(v) = - \int_{V_0}^v J(v) \frac{v dv}{F(v)},$$

On aura

$$y = qx - \frac{1}{c^2} [\mathbf{A}(v) - \mathbf{A}(V_0)].$$

A la limite, pour  $v = \infty$ , la constante  $q$  n'est autre que  $\tan \Theta$ .

Le terme  $(x \tan \Theta - y)$  représente la distance verticale PQ entre la trajectoire et la droite inclinée de  $\Theta$ , passant par l'origine.

Si PQ est fini pour  $v = \infty$ , la courbe admet une asymptote; sinon la direction  $\Theta$  est parabolique.

**THÉOREME.** — *Suivant que la fonction  $\mathbf{A}(v)$ , est fini ou infinie pour  $v = \infty$ , l'asymptote au point  $\Omega$  sera à distance finie (branche hyperbolique) ou à distance infinie (branche parabolique).*

5° *Résumé.* — Ainsi, les propriétés de la trajectoire au point  $\Omega$ , extrémité amont de la courbe balistique, dépendent des valeurs finies ou infinies de certaines intégrales, dites *fonctions balistiques de Siacci*, prises entre une vitesse finie et une vitesse infinie.

Leur définition est la suivante ( $V$  est une vitesse arbitraire) :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(v) &= - \int_V^v \frac{g \, dv}{v \, F(v)}, & \mathbf{D}(v) &= - \int_V^v \frac{v \, dv}{F(v)}, \\ \mathbf{S}(v) &= - \int_V^v \frac{dv}{F(v)}, & \mathbf{A}(v) &= - \int_V^v \mathbf{J} \frac{v \, dv}{F(v)}. \end{aligned}$$

Par hypothèse,  $\mathbf{J}(\infty)$  est fini, puisque le degré  $n_{\infty}^1$  de la résistance, pour  $V = \infty$ , est en général supposé  $> 0$ .

*La tangente au point  $\Omega$  est toujours oblique (cas de  $n_{\infty} = 0$  excepté) inclinée d'un angle  $\Theta$ .*

Pour les autres éléments, on aura les conclusions suivantes :

- $\mathbf{D}(\infty)$  fini : Point  $\Omega$  à distance finie;
- $\mathbf{D}(\infty) = \infty$  : Point  $\Omega$  rejeté à l'infini;
- $\mathbf{S}(\infty)$  fini : Le temps mis pour venir de  $\Omega$  est fini;
- $\mathbf{S}(\infty) = \infty$  : Le temps mis pour venir de  $\Omega$  est infini;
- $\mathbf{A}(\infty)$  fini : Branche hyperbolique;
- $\mathbf{A}(\infty) = \infty$  : Branche parabolique.

On a déjà rencontré les fonctions  $\mathbf{D}(v)$  et  $\mathbf{S}(v)$ , dont les valeurs, pour  $v = \infty$ , réglaient l'origine du mouvement rectiligne (95).

Ces mêmes fonctions régissent également la forme de la courbe balistique pour les trajectoires sans sommet,  $\Theta < 0$ .

**207. Cas d'une résistance monome.** — Soit  $F(v) = B_v v^n$ .

Les fonctions balistiques de Siacci sont exprimables par les formules

suivantes :

$$J(v) = - \int_v^v \frac{g \, dv}{v^F} = - \frac{g}{B_n} \int_v^v \frac{dv}{v^{n+1}} = \frac{g}{n B_n} (v^{-n} - V^{-n}),$$

$$S(v) = - \int_v^v \frac{dv}{F} = - \frac{1}{B_n} \int_v^v \frac{dv}{v^n} = \frac{1}{(n-1) B_n} (v^{1-n} - V^{1-n}),$$

$$D(v) = - \int_v^v \frac{v \, dv}{F} = - \frac{1}{b_n} \int_v^v \frac{dv}{v^{n-1}} = \frac{1}{(n-2) B_n} (v^{2-n} - V^{2-n}),$$

$$A(v) = - \int_v^v \frac{v \, dv}{F} = - \frac{g}{n B_n^{\frac{1}{2}}} \left[ \int_v^v \frac{dv}{v^{2n-1}} - \frac{1}{V^n} \int_v^v \frac{dv}{v^{n-1}} \right]$$

$$= \frac{g}{n B_n^{\frac{1}{2}}} \left[ \frac{1}{2n-2} (v^{2-2n} - V^{2-2n}) - \frac{1}{n-2} V^{-n} (v^{2-n} - V^{2-n}) \right].$$

Dans ces formules, il faudra faire  $V = \infty$ , pour avoir les éléments du point  $\Omega$ . On voit d'abord que si  $n_{\infty} > 0$ , on a  $J(\infty) = \frac{g}{n B_n v^n}$ , ce qui est une quantité finie.

Pour les autres éléments du point  $\Omega$ , on formera le Tableau suivant :

$n_{\infty}$	$< 1$	$= 1$	$< 2$	$= 2$	$> 2$
Le point $\Omega$ est à distance.....	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	finie
Le temps est.....	$\infty$	$\infty$	fini	fini	fini
L'asymptote est à distance.....	$\infty$	$\infty$	finie	finie	finie

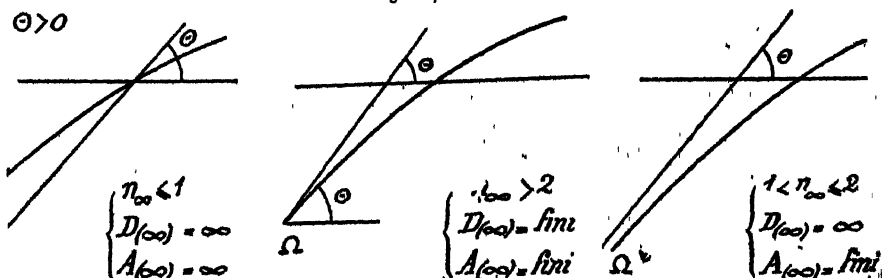
On remarquera que, dans le cas de  $n_{\infty} > 2$ , il ne s'agit plus d'une véritable asymptote, mais seulement de la tangente au point  $\Omega$ , point qui est alors à distance finie.

*Cas général.* — On généralise l'application du Tableau précédent au cas d'une résistance de forme quelconque en posant

$$F(v) = v^{n_{\infty}} [B_{n_{\infty}} + B' \Psi(v)];$$

comme  $n_{\infty}$  est le degré de la résistance, pour  $v = \infty$ , la fonction  $\Psi(v)$  tendra vers zéro.

Fig. 207.

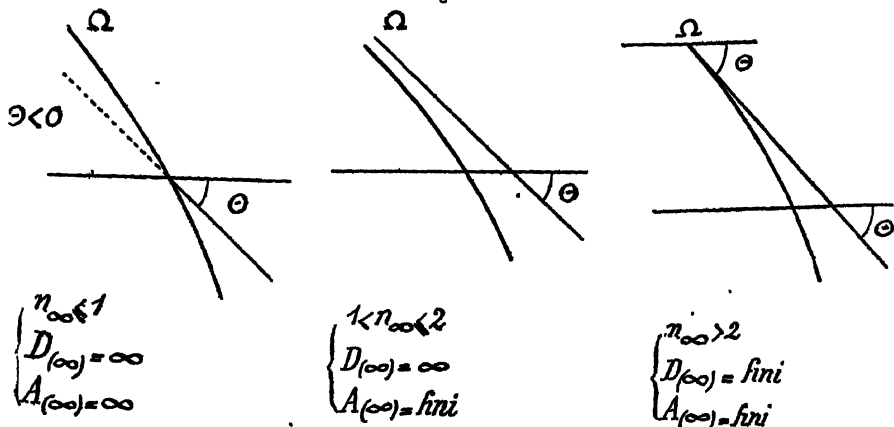


La forme de la trajectoire au point  $\Omega$  est donc l'une des trois ci-dessus.

Si  $n_\infty = 0$ , auquel cas  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , on a la forme parabolique de  $n_\infty \leq 1$ , mais la direction asymptotique est verticale.

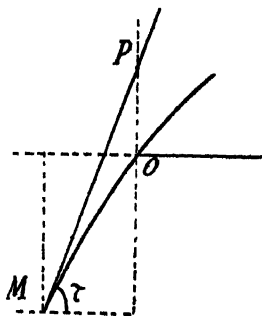
Pour les trajectoires sans sommet, les formes sont les suivantes :

Fig. 208.



208. Sur l'asymptote du point  $\Omega$ . — Pour discuter l'existence de l'asymptote du point  $\Omega$ , le colonel de Saint-Robert n'introduit pas la notion de l'intégrale  $\mathbf{A}(v)$  que nous avons considérée.

Fig. 209.



Voici son raisonnement. Soit  $L = OP$  l'ordonnée comprise entre l'origine et le point de rencontre d'une tangente quelconque à la trajectoire.

On a

$$L = y - x \tan \tau.$$

D'après les équations différentielles (157)

$$dy = -\frac{v^2}{g} \tan \tau \, d\tau \quad \text{et} \quad dx = -\frac{v^2}{g} \, d\tau,$$

on écrira

$$gL = \operatorname{tang} \tau \int_{\alpha}^{\tau} v^2 d\tau - \int_{\alpha}^{\tau} v^2 \operatorname{tang} \tau d\tau.$$

Pour déterminer la position de l'asymptote, il faut faire tendre  $\tau$  vers  $\Theta$ , de sorte qu'on a, pour l'asymptote,

$$gL_{\infty} = \int_{\alpha}^{\Theta} (\operatorname{tang} \Theta - \operatorname{tang} \tau) v^2 d\tau.$$

Mais, on a

$$dt = - \frac{v}{g} \frac{d\tau}{\cos \tau};$$

donc

$$L_{\infty} = \int_0^{T_{\infty}} \cos \tau (\operatorname{tang} \tau - \operatorname{tang} \Theta) v dt.$$

Le produit  $(\operatorname{tang} \tau - \operatorname{tang} \Theta) v$  est fini à l'origine et dans toute l'étendue de l'intégration jusqu'à la limite supérieure, où il prend la forme indéterminée  $0 \times \infty$ . Pour en avoir la vraie valeur, à cette limite, il suffit de mettre sous la forme  $\frac{\operatorname{tang} \tau - \operatorname{tang} \Theta}{\frac{1}{v}}$  et de différentier le numé-

$$\left( \frac{1}{v} \right)$$

rateur et le dénominateur par rapport à la même variable  $\tau$ . On obtient ainsi

$$- \frac{v^2}{\cos^2 \tau} \frac{d\tau}{dv} = - \frac{1}{\cos \tau \left( \frac{cF}{g} \frac{1}{v} + \frac{\sin \tau}{v} \right)}.$$

Si l'on fait  $v = \infty$ , et  $\tau = \Theta$ , on voit, puisque  $\frac{cF}{g} \frac{1}{v} = \frac{h_n v^{n-1}}{g}$ , que cette fraction est infinie, si  $n_{\infty} < 1$ ; finie, si  $n_{\infty} = 1$ , et nulle, si  $n_{\infty} > 1$ .

Soit  $k$  une valeur moyenne entre les différentes valeurs que prend, entre les limites de l'intégration, le produit  $\cos \tau (\operatorname{tang} \tau - \operatorname{tang} \Theta) v$ ; d'après ce qui précède,  $k$  sera fini ou infiniment grand, si  $n_{\infty} < 1$ ; fini, si  $n_{\infty} = 1$ ; fini ou infiniment petit, si  $n_{\infty} > 1$ .

Cela posé, donnant à l'intégrale la forme

$$L_{\infty} = k \int_0^{T_{\infty}} dt = k T_{\infty},$$

et sachant (207) que si  $n_{\infty} \leq 1$ , on a  $T_{\infty} = \infty$ , et que si  $n_{\infty} > 1$ ,  $T_{\infty}$  est fini, on en conclut que  $L_{\infty}$  est infini, si  $n_{\infty} \leq 1$  et, qu'au contraire, ce n'est pas une quantité infiniment grande, si  $n_{\infty} > 1$ .



Ce sont les mêmes conclusions que celles énoncées généralement au numéro précédent, en considérant l'intégrale  $A(v)$ .

*Remarque.* — « Le principe sur lequel est fondée la discussion précédente relativement à l'angle, au temps, à l'arc et à la tangente qui correspondent à une vitesse infinie, dépend de la manière d'établir le degré d'une fonction. Or il existe, ainsi que je l'ai déjà indiqué en étudiant le mouvement rectiligne (107) des fonctions dont le degré ne saurait être déterminé par les règles ordinaires. Par exemple, les fonctions  $x^a \log x$ ,  $x^a \log \log x$ ,  $x^a (\log x)^\beta$ ,  $x^a (\log x)^\beta (\log \log x)^\beta$ , etc.;  $x^a e^{\beta x}$ ,  $x^a x^{\beta x}$ , etc., ainsi que celles qu'on obtiendrait par leurs combinaisons, ne sont point du degré  $n$ , parce que, quelle que soit la valeur de  $n$ , on aura toujours pour limite de la fraction  $\frac{f(x)}{x^n}$ , quand  $x$  converge vers l'infini, une quantité nulle ou infinie et jamais une quantité finie, comme cela doit arriver, pour que  $f(x)$  puisse se dire du degré  $n$ .

» Pour la discussion de ces cas particuliers, on suivra une méthode analogue à celle que nous avons déjà employée; c'est-à-dire qu'on tâchera de décomposer la quantité mise sous l'intégrale en deux facteurs, dont l'un soit constamment fini dans les limites de l'intégration, et que, par suite, on pourra mettre de côté. Alors le résultat, pour ce qui concerne la seule question de savoir s'il est fini ou infini, sera donné par l'intégrale de l'autre facteur » (de Saint-Robert).

209. Point  $\Omega'$ . — L'autre extrémité de la courbe balistique, dite point  $\Omega'$ , correspond toujours à une valeur  $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$  de l'inclinaison  $\tau$ .

Dans l'étude de l'hodographe, on a vu (173) que la vitesse terminale  $V'$ , dont la valeur est, en général, donnée par la formule  $cF(V') = g$ , pouvait cependant, dans certains cas particuliers, prendre les valeurs zéro ou infini. On a

$$V' = 0, \quad \text{si } \frac{cF_0}{g} \geq 1,$$

et l'on a

$$V' = \infty, \quad \text{si } \frac{cF_a}{g} \leq 1.$$

Les deux théorèmes suivants précisent les propriétés du point  $\Omega'$ .

210. Théorème I. — *Le temps nécessaire au projectile pour atteindre la vitesse terminale  $V'$  est, en général, infini.*

On a  $dt = -\frac{v}{g} \frac{d\tau}{\cos\tau}$ ; intégrons, il viendra

$$gt = -\int_{\alpha}^{\tau} v \frac{d\tau}{\cos\tau}.$$

Remplaçons  $v$  par sa valeur minimum  $V$ , qui pourra être suivant le cas, soit la vitesse minimum  $v_m$ , si elle existe, soit la vitesse terminale  $V'$ , dans le cas contraire, et prenons pour limites  $\tau = -\frac{\pi}{2}$  et  $\alpha = -\alpha$ .

Comme ici  $-\int_{-\alpha}^{-\frac{\pi}{2}} = \int_{\alpha}^{\tau}$ , il viendra

$$gt > V \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\tau}{d\tau},$$

$V$  étant la vitesse minimum définie ci-dessus. Mais

$$\int_0^{\tau} \frac{d\tau}{\cos\tau} = -\log \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}\right),$$

qui, pour  $\tau = \frac{\pi}{2}$ , devient infini.

Donc  $t$  devient infini pour  $\tau = -\frac{\pi}{2}$ .

C. Q. F. D.

*Cas d'exception.* — 1° Si  $V'$  peut tendre vers zéro, la démonstration est en défaut. Dans ce cas, on a d'abord  $n_0 = 0$ , puis  $cF(0) > g$ .

De la formule

$$\frac{dv}{dt} = -(cF + g \sin\tau),$$

on tire

$$t = -\int_{V_0}^v \frac{dv}{cF + g \sin\tau}.$$

Dans le voisinage du point  $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ ,  $v$  tend vers zéro,  $\sin\tau$  vers  $(-1)$ . Le temps  $t$  a donc pour expression limite, à partir de  $V_0$ , vitesse très voisine de zéro :

$$t = \frac{V_0}{cF_0 - g}.$$

Le projectile s'arrêtera donc et restera immobile au bout d'un temps fini.

2° Si  $V'$  tend vers l'infini, c'est-à-dire si l'on a  $n_{\infty} = 0$  et  $\frac{cF(\infty)}{g} \leq 1$ ,

la formule du temps se réduit, dans la région des grandes vitesses, à

$$t = - \int_{v_0}^v \frac{dv}{cF(\infty) - g},$$

c'est-à-dire à  $t = \frac{v - V_0}{g - cF(\infty)}$ , ce qui devient infini pour  $v = \infty$ .

Le temps est donc infini.

3° Soit, maintenant, le cas limite  $cF_0 = g$ . On a

$$\frac{cF(v)}{g} = 1 + \varphi(v),$$

$\varphi(v)$  tendant vers zéro avec  $v$ . La formule du temps sera

$$gt = - \int_{v_0}^v \frac{1 + \varphi(v) + \sin \tau}{dv}$$

et, à la limite, pour  $\sin \tau = -1$ , on a

$$gt = - \int_{v_0}^v \frac{dv}{\varphi(v)}.$$

Soit  $\varphi(v) = Av^m$ . L'intégrale est une fonction analogue à la fonction  $S(v)$ , de sorte que le problème est le même que celui de l'arrêt du projectile dans le mouvement rectiligne (92).

Si  $m < 1$ , le temps est fini;

Si  $m \geq 1$ , le temps est infini.

**211. Théorème II.** — *La trajectoire culmet, en général, une asymptote verticale à distance finie.*

De l'équation

$$dx = - \frac{v^2}{g} d\tau,$$

on déduit

$$gx = - \int_{\alpha}^{\tau} v^2 d\tau.$$

Du point  $(-\alpha)$ , origine, au point  $(-\frac{\pi}{2})$ , soit  $V$  la valeur maximum de la vitesse; on a

$$gx < V^2 \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} d\tau.$$

Or, l'intégrale est finie, si  $v$  ne peut devenir infini. Donc l'abscisse  $x$  est finie.

L'ordonnée  $y$  est donnée par la formule

$$gy = - \int_{\alpha}^{-\frac{\pi}{2}} v^2 \tan \tau \, d\tau.$$

Elle est infinie (si  $V'$  n'est pas nul) puisque  $\int \tan \tau \, d\tau = -\log \cos \tau$  est infini pour  $\tau = -\frac{\pi}{2}$ .

L'abscisse étant finie et l'ordonnée infinie, le théorème d'existence d'une asymptote verticale est démontré.

Lorsqu'il existe un point  $(v, \tau)_m$  de vitesse minimum, on aura, en remplaçant dans l'équation de l'abscisse la vitesse  $v$  tour à tour par  $v_m$  et  $V'$ , et désignant par  $X'$  la distance de l'asymptote au point  $(v, \tau)_m$  la double inégalité

$$\frac{v_m^2}{g} \left( \frac{\pi}{2} + \tau_m \right) < X' < \frac{V'^2}{g} \left( \frac{\pi}{2} + \tau_m \right).$$

*Cas d'exception.* — Ils se produiront dans le cas de  $n_0 = 0$ .

1° Si l'on a  $cF(0) > g$ , on a  $V' = 0$  (173).

L'arc  $s$ , qui est défini par la relation  $ds = v \, dt$ , d'où

$$s = - \int_{v_0}^v \frac{v \, dv}{cF(v) + g \sin \tau},$$

deviendra, au voisinage du point  $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ ,

$$s = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{cF(0) - g}.$$

Ainsi qu'on l'a dit (210, 1°) le projectile s'arrête au bout d'un parcours fini; il y a un point d'arrêt à tangente verticale.

2° Si  $cF(\infty) \leq g$ , la vitesse  $V'$  tend vers l'infini. L'abscisse, toujours donnée par la formule  $gx = - \int_{\alpha}^{\tau} v^2 \, d\tau$ , peut devenir infinie.

La courbe affectera alors une allure parabolique. Ce cas particulier sera discuté lors de l'étude d'une résistance constante.

3° Si  $\frac{cF_0}{g} = 1$ , le même raisonnement que pour le temps montre que, en posant  $\frac{cF(v)}{g} = 1 + \varphi(v)$ , l'arc est réglé par une fonction analogue à  $D(v)$  pour  $v = 0$ .

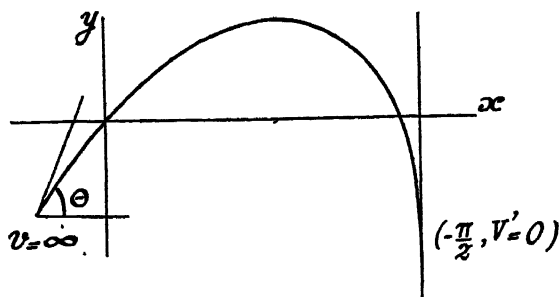
Posant  $\varphi(v) = Av^m$ , l'arc sera fini si  $m > 2$  et infini si  $m \leq 2$ .

212. **Théorème III.** — *La trajectoire est une courbe finie dans les deux sens, si la résistance est de la forme*

$$cF(v) = b_0 + b_1 v + b_2 v^2 + \dots + b_n v^n,$$

avec  $b_0 > g$  et  $n > 2$ .

Fig. 210.



On a vu, en effet, que le point  $\Omega$  en amont est à une distance finie, si  $n > 2$ , et le point  $\Omega'$  en aval  $(V', -\frac{\pi}{2})$  est à distance finie, si  $b_0 > g$ .

213. **Théorème IV.** — *Le rayon de courbure de la trajectoire passe par un minimum pour une valeur négative de l'inclinaison.*

Le rayon de courbure  $r$ , en un point  $(v, \tau)$  d'une trajectoire, est donné (160) par la formule

$$r = -\frac{v^2}{g \cos \tau}.$$

Ce rayon de courbure est infini aussi bien pour  $v = \infty$  (point  $\Omega$ ) qu'au point  $(-\frac{\pi}{2})$  (point  $\Omega'$ ).

Il passe donc, entre les deux, par un minimum [excepté, peut-être, dans le cas où  $V' = 0$  au point  $(-\frac{\pi}{2})$ , car  $r$  ne devient pas forcément infini en ce point].

Pour déterminer le point où se produit le minimum, différencions l'équation  $r = -\frac{v^2}{g \cos \tau}$  par rapport à  $t$ . On aura

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{g} \left( \frac{2v}{\cos \tau} \frac{dv}{dt} + v^2 \frac{\sin \tau}{\cos^2 \tau} \frac{d\tau}{dt} \right) = \frac{v}{g \cos \tau} [3g \sin \tau + 2cF(v)].$$

Cette équation détermine un point  $(v, \tau)$ , où le rayon de courbure est minimum et pour lequel on a

$$2cF(v_r) + 3g \sin \tau_r = 0.$$



asymptote (si  $n_{\infty} > 2$ ), une perpendiculaire à la direction  $\Theta$ ; si  $n_{\infty} \leq 2$ , c'est une simple direction asymptotique.

L'autre branche M(II) correspond aux points de M' à  $\Omega$  de la trajectoire; elle admet une direction asymptotique horizontale.

**214. Extrémité de la branche descendante.** — *Théorème du commandant Hugon.* — La trajectoire se confond, à la limite, avec son asymptote verticale. Les coefficients différentiels  $\frac{dy}{dx}$  et  $\frac{d^2y}{dx^2}$  seront infinis. Soit  $x = \alpha$  la distance horizontale de cette asymptote au sommet de la trajectoire; les deux fonctions de  $x$ ,  $\frac{dy}{dx}$  et  $\frac{d^2y}{dx^2}$ , étant infinies pour cette valeur, c'est que, dans leur expression, entre un terme qui a  $\frac{1}{\alpha - x}$  pour facteur.

L'expression  $\frac{v^2}{g} = - \frac{1 + y'^2}{y'}$  du rayon de courbure prenant alors une valeur  $\frac{V^2}{g}$  finie et bien déterminée, il faut que l'exposant de  $\frac{1}{\alpha - x}$  dans  $\frac{d^2y}{dx^2}$  soit double de l'exposant de ce facteur dans  $y'$ , ce qui ne peut se faire que si cet exposant est égal à 1. Donc, dans  $y$  entre un terme de la forme  $\varphi(x) \log(\alpha - x)$ .

Nous pouvons adopter pour cette expression la forme

$$y = f(x) + \varphi(x) \log(\alpha - x),$$

$f(x)$ ,  $\varphi(x)$  étant des fonctions qui conservent, ainsi que leurs dérivées  $f', f'', \varphi', \varphi''$ , des valeurs finies tant que  $x$  n'est pas  $> \alpha$ .

Pour  $x = \alpha$ , on aura

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha = \varphi'(\alpha) \log(\alpha - x) - \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha - x} = \frac{\varphi'(\alpha)(\alpha - x) \log(\alpha - x) - \varphi(\alpha)}{\alpha - x}.$$

Or,  $(\alpha - x) \log(\alpha - x) = 0$ , quand  $x = \alpha$ .

On peut donc écrire

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha = - \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha - x}.$$

De même

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_\alpha = \varphi''(\alpha) \log(\alpha - x) - \frac{2\varphi'(\alpha)}{\alpha - x} - \frac{\varphi(\alpha)}{(\alpha - x)^2}$$

revient à

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_\alpha = - \frac{\varphi(\alpha)}{(\alpha - x)^2}.$$

Substituant dans l'expression de  $\frac{V^2}{g}$ , il viendra

$$\frac{V^2}{g} = \varphi(\alpha).$$

C'est une première condition à laquelle devra satisfaire la fonction  $\varphi(x)$ .

L'expression  $\frac{v^2}{g} = \varphi(x)$ , qui n'est rigoureusement exacte qu'à cette limite, donne une valeur approchée de  $v$  tant que  $x$  diffère peu de  $a$ .

Cette valeur, pendant assez longtemps, devra différer très peu de  $V'$ , nouvelle condition à laquelle on satisfera en exprimant qu'un certain nombre de dérivées de  $\varphi(x)$  sont nulles pour  $x = a$  :

$$\varphi'(a) = 0, \quad \varphi''(a) = 0, \quad \dots$$

Ainsi on pourrait prendre, par exemple,

$$\varphi(x) = \frac{a}{m} \frac{V'^2}{g} \left(\frac{x}{a}\right)^m + K(x-a)^p \Psi(x).$$

C'est ainsi que, dans le cas d'une résistance linéaire, où l'on sait obtenir l'équation finie de la trajectoire (Livre V, Chap. IV, § 2), on a

$$y = Qx - \frac{V'^2}{g} \log\left(1 - \frac{x}{a}\right),$$

$Q$  étant une constante.

**215. Ordre de contact de la trajectoire au point  $\Omega$ .** — Quand  $n > 2$ , on sait (207) que le point  $\Omega$  est à une distance finie et que la tangente fait un angle  $\theta$  avec l'horizontale.

L'équation de la trajectoire est, dans le voisinage du point  $\Omega$  (206, 4<sup>o</sup>),

$$y = x \tan \theta - \frac{1}{g^2} [\mathbf{A}(v) - \mathbf{A}(V_0)].$$

Pour une résistance monome, on a donné (207) l'expression de la fonction  $\mathbf{A}(v)$ . On écrira, en faisant  $V_0 = \infty$  (cas de  $n > 2$ ),

$$\mathbf{A}(v) - \mathbf{A}(V_0) = \frac{K}{n B_n^2} \frac{1}{2n-2} v^{2-2n}.$$

D'autre part, dans la même hypothèse, l'équation

$$cx = [\mathbf{D}(v) - \mathbf{D}(V_0)] \cos \theta$$

devient

$$cx = \frac{1}{(n-2)B_n} v^{2-n} \cos \theta.$$

On a donc, en posant  $b_n = c B_n$ , pour l'équation de la trajectoire,

$$y = x \tan \theta - \frac{K}{n(2n-2)b_n^2} \left[ (n-2)b_n \frac{x}{\cos \theta} \right]^{\frac{2n-2}{n-2}}.$$



L'ordre de contact  $p$  est donc, pour diverses valeurs entières de  $n$  :

$n$ .....	3	4	5	6	...
$p$ .....	4	3	$\frac{8}{3}$	$\frac{5}{2}$	....

216. **Autres points remarquables de la trajectoire.** — Quand on calcule une trajectoire par arcs successifs, en adoptant, comme divisions, des amplitudes égales et très  $n\tau$ , on remarque que les valeurs des abscisses correspondantes  $nx$ , des temps  $nt$  et des ordonnées  $ny$ , peuvent présenter des minima ou des maxima.

Pour vérifier ces propriétés, on étudie les dérivées par rapport à  $\tau$  de :

$$\frac{dx}{d\tau} = -\frac{v^2}{g}, \quad \frac{dt}{d\tau} = -\frac{v}{g \cos \tau}, \quad \frac{dy}{d\tau} = -\frac{v^2}{g} \tan \tau.$$

1° *Minimum de  $\frac{dx}{d\tau}$ .* — Le minimum a lieu au point  $(v, \tau)_m$  de vitesse minimum.

2° *Maximum de  $\frac{dt}{d\tau}$ .* — On a

$$-\frac{1}{g} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{v}{\cos \tau} \right) = -\frac{1}{g} \frac{\cos^2 \tau}{v} \left( \frac{cF}{g} + 2 \sin \tau \right).$$

On a donc un maximum au point

$$cF(v) + 2g \sin \tau = 0$$

qui est satisfait pour une valeur négative  $\tau_t$  de  $\tau$ , aussi bien pour une trajectoire avec sommet, que pour une trajectoire sans sommet.

Au point  $(v; \tau)_r$  de rayon de courbure minimum, la dérivée  $\frac{d}{d\tau} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)$  prendra la valeur  $-\frac{1}{2} \frac{v_r}{g \cos^2 \tau_r} \sin \tau_r$  qui est positive.

Donc, le point  $(v, \tau)_t$  est situé en amont du point  $(v, \tau)_r$ .

Le point  $(v, \tau)_t$  est le point de vitesse angulaire maximum.

*Cas d'exception.* — Lorsque  $n = 0$ , si l'on a  $b_0 > 2g$ .

3° *Minimum de  $\frac{dy}{d\tau}$ .* Le problème est ici plus complexe. On a, en effet,

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{dy}{d\tau} \right) = -\frac{1}{g} \frac{v^2}{\cos^2 \tau} \left( 2 \sin^2 \tau + 2 \frac{cF}{g} \sin \tau + 1 \right)$$

et les minima de  $\frac{dy}{d\tau}$  correspondent aux deux racines de l'équation

$$\sin^2 \tau + \rho \sin \tau + \frac{1}{2} = 0,$$

en posant  $\rho = \frac{cF(v)}{g}$ ,

Il faut : 1° que ces racines soient réelles ; 2° qu'elles soient plus petites que l'unité.

On voit d'abord que ces racines doivent être négatives, aucune valeur positive du sinus ne pouvant annuler le premier membre de l'équation. Elles sont, d'ailleurs, de même signe toutes les deux.

En résolvant l'équation, on trouve

$$\sin \tau' = -\frac{1}{2}(\rho + \sqrt{\rho^2 - 2}),$$

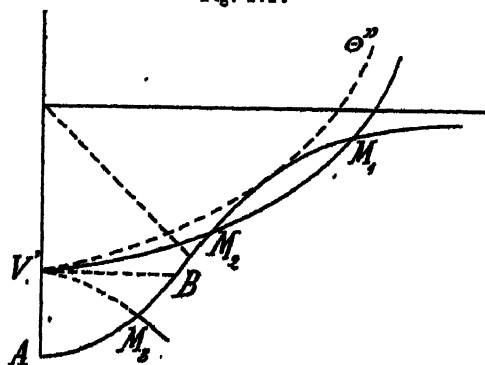
$$\sin \tau'' = -\frac{1}{2}(\rho - \sqrt{\rho^2 - 2}).$$

La condition de réalité des racines est que  $\rho > \sqrt{2}$ .

Si l'on cherche la condition d'existence du sinus, on trouve que  $\tau'$  n'existera que si  $\rho < \frac{3}{2}$ , et que  $\tau''$  n'existera que si  $\rho > \frac{3}{2}$ .

D'ailleurs, si l'angle asymptotique  $\Theta$  est positif, il existera zéro ou deux minima : en effet, on vérifie aisément que  $\frac{d}{d\tau} \left( \frac{dy}{d\tau} \right)$ , qui est  $\infty$  négatif pour  $v = \infty$ , est aussi  $\infty$  négatif, pour  $\tau = -\frac{\pi}{2}$ . Cette quantité s'annule donc un nombre pair de fois. Si  $\Theta$  est négatif, au contraire, le même raisonnement montre qu'il existe une seule valeur annulant  $\frac{d}{d\tau} \left( \frac{dy}{d\tau} \right)$ .

Fig. 212.



On peut se rendre compte de ces propriétés en construisant la courbe  $\rho = -\frac{1 + 2 \sin^2 \tau}{2 \sin \tau}$  qui a la forme de la figure (courbe  $ABM_2M_1$ ).

Soit une résistance monome : on aura, pour équation de la courbe,

$$\left( \frac{v}{V} \right)^n = -\frac{1 + 2 \sin^2 \tau}{2 \sin \tau}.$$

Elle part du point A, tel que  $OA = V' \left( \frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{n}}$ , présente un point d'inflexion au point B, tel que  $OB = V' \frac{1}{2n}$  et, pour  $\tau = -\frac{\pi}{2}$ , elle finit asymptotiquement à l'horizontale.

Si l'on considère la série des hodographes d'un même projectile (même  $V'$ ),  $\Theta$  variant, on voit qu'ils se divisent en trois groupes :

Soit, en effet, l'hodographe tangent à la courbe qui vient d'être tracée, et soit  $\Theta''$  son angle asymptotique. On dira : si  $\Theta > \Theta''$ , il n'y a pas d'intersection entre l'hodographe et la courbe AB; si  $\Theta < \Theta''$ , il existe deux points d'intersection  $M_2$  et  $M_1$ ; si  $\Theta < 0$ , il existe un seul point d'intersection  $M_3$ .

*Remarque.* — On n'a utilisé, dans la discussion des propriétés générales des trajectoires, qu'un certain nombre des combinaisons possibles des équations différentielles du mouvement. On peut combiner, en effet, entre elles toutes les dérivées telles que  $dx$ ,  $du$ ,  $dt$ ,  $ds$ ,  $dv$ , ... et former encore les dérivées secondes.

Si l'on s'en tient aux dérivées des deux premiers ordres, les propositions suivantes résultent de la considération immédiate des équations différentielles.

1° Dans toutes les dérivées premières et secondes des trois lettres  $(x, y, s)$ , les unes par rapport aux autres, la résistance  $cF$  n'entre pas.

On a, par exemple,

$$\frac{d^2 y}{ds^2} = -\frac{v^2}{g} \cos^2 \tau.$$

2° S'il entre, en plus de  $(x, y, s)$ , les lettres  $t$  et  $\tau$ , le rapport  $\frac{cF}{g}$  s'introduit dans les dérivées secondes.

Ainsi :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -cF \cos \tau.$$

3° Quand on introduit une vitesse  $(v, u, w)$ , la résistance  $cF$  s'introduit dans la dérivée première et la dérivée  $cF'$  dans la dérivée seconde.

Ainsi :

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{cvF}{g} \quad \text{et} \quad \frac{d^2 u}{d\tau^2} = \frac{c}{g} (vF' + F) \frac{dv}{d\tau}.$$

4° On peut étudier, au moyen des équations différentielles connues, l'allure de fonctions composées telles que

$$ut, \quad \frac{y}{\tan \tau}, \quad \frac{y - x \tan \tau}{\tan \alpha - \tan \tau}, \quad \dots,$$

ou encore des fonctions telles que

$$c F(v) \sin \tau \quad \text{ou} \quad c F(v) \cos \tau,$$

composantes de la résistance de l'air, ou l'accélération totale  $l$  (160).

Ainsi, soit la fonction  $\zeta = ut - x$  qui, dans le vide, est nulle.

On sait que  $x$  varie de 0 à  $x'$ , valeur correspondant à l'asymptote verticale. Quant à  $ut$ , il varie de zéro à une valeur qui, pour  $t = \infty$ ,  $u = 0$ , se présente sous une forme indéterminée. On a

$$\lim_{t=\infty} ut = \lim_{t=\infty} \frac{t}{\left(\frac{1}{u}\right)} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{u^2} \frac{du}{dt}\right)}.$$

Mais

$$\frac{du}{dt} = -c F(v) \cos \tau.$$

On a donc

$$\lim_{t=0} ut = \frac{u^2}{c F(v) \cos \tau} = \frac{V^2}{c F(V')} \cos \tau =$$

Donc

$$\lim \zeta = -x' \quad \text{pour } t = \infty.$$

Formons

$$\frac{d\zeta}{dt} = -t \frac{du}{dt} = dF(v) \cos \tau.$$

Cette dernière s'annule pour  $t = 0$ .

Pour  $t = \infty$ , on a à chercher la limite de

$$t \cos \tau = \frac{t}{\left(\frac{1}{\cos \tau}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 \tau} \sin \tau \frac{d\tau}{dt}}$$

Mais

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{g \cos \tau}{v}.$$

On a donc

$$\lim (t \cos \tau) = \frac{-v \cos \tau}{g \sin \tau},$$

ce qui donne zéro pour  $\tau = -\frac{\pi}{2}$ .

La courbe de la fonction  $\zeta$  a donc la forme de la figure 213.

Le point d'inflexion qui correspond à  $\frac{d^2 \zeta}{dt^2} = 0$  est donné par la formule

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} = c \left( F \cos \tau + t F' \frac{dv}{dt} \cos \tau - t F \sin \tau \frac{d\tau}{dt} \right),$$

ou, en remplaçant  $\frac{dv}{dt}$  et  $\frac{d\tau}{dt}$  par leurs valeurs,

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} = F \cos \tau \left( 1 - t c F' + g t \frac{F - v F' \sin \tau}{v F} \right),$$

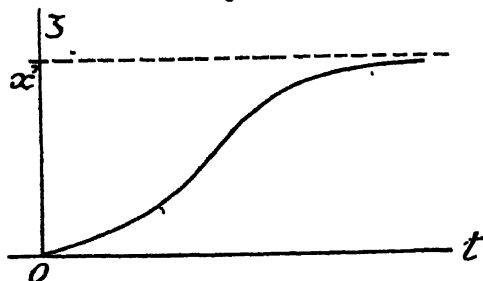
ce qui donne, au point d'inflexion,

$$t = \frac{vF}{cvF'F - g(F - vF') \sin \tau},$$

ou, pour une résistance n<sup>ième</sup>,

$$t = \frac{v}{nb_n v^n + (n-1)g \sin \tau}.$$

Fig. 213.



Ainsi, pour  $n = 1$ , on a

$$t = \frac{1}{b_1}.$$

5° *Autre exemple.* — Quelle est la valeur du rapport  $\frac{x}{u}$  quand on tire presque verticalement et que la vitesse  $v$  tend vers zéro.

On a

$$\lim \frac{x}{u} = \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\left(\frac{du}{dt}\right)} = - \frac{\frac{v^2}{g}}{\frac{cvF(v)}{g}} = - \frac{v}{cF(v)} = - \frac{1}{b_n v^{n-1}}.$$

Donc

$$\lim \frac{x}{u} = 0, \quad \text{si } n < 1;$$

$$\lim \frac{x}{u} = - \frac{1}{b_n}, \quad \text{si } n = 1;$$

$$\lim \frac{x}{u} = -\infty, \quad \text{si } n > 1.$$

Sur la branche asymptotique verticale, où  $u = 0$ , parce que  $\tau = -\frac{\pi}{2}$ , et  $v = V'$ , on a

$$\lim \frac{x}{u} = - \frac{V'}{g}.$$

217. *Anciennes notations balistiques.* — On pourrait faire d'autres combinaisons pour les dérivées secondes, en les prenant par rapport à

deux variables différentes, comme  $\frac{d^2y}{dx dt}$  par exemple, dont la valeur se trouve aisément ainsi qu'il suit :

On a

$$\frac{dy}{dx} = \tan \tau,$$

d'où

$$\frac{d^2y}{dx dt} = \frac{d \tan \tau}{dt} = \frac{1}{\cos^2 \tau} \frac{d\tau}{dt} = -\frac{g}{u^2}.$$

Les anciens balisticiens employaient beaucoup ces sortes de combinaisons.

Comme exemple, nous donnerons la manière dont le général Didion établit les équations différentielles du mouvement.

« La pesanteur agissant dans le plan vertical des coordonnées qui passe par la ligne de projection, la résistance de l'air agissant tangentiellement à la trajectoire, et aucune autre force que cette résistance n'ayant d'action sur le projectile, celui-ci ne sortira pas de ce plan vertical ; on aura donc pour les deux équations du mouvement, conformément aux principes de la mécanique : savoir, suivant l'axe des abscisses,

$$(a) \quad d\left(\frac{dx}{dt}\right) + c F(v) \frac{dx}{ds} dt = 0,$$

et, suivant l'axe des ordonnées,

$$(b) \quad d\left(\frac{dy}{dt}\right) + c F(v) \frac{dy}{ds} dt + g dt = 0.$$

» Effectuant la différentiation en regardant  $dx$  comme constant, on tire de l'équation (a)

$$(c) \quad \frac{d^2x}{dt^2} - c F(v) \frac{dt}{ds} = 0.$$

» Observant que  $dy = p dx$  et que, par suite,  $d^2y = dp dx$ , la différentiation de l'équation (b) donnera

$$\frac{dp dx}{dt} - \frac{dy d^2x}{dt^2} + c F(v) \frac{dy}{ds} dt + g dt = 0.$$

» Ajoutant membre à membre à cette équation la précédente multipliée par  $dy$ , on aura

$$(1) \quad \frac{dp dx}{ds} + g dt = 0 \quad \text{ou} \quad dp dx + g dt^2 = 0.$$

» Cette équation, comme on le voit, est indépendante de  $cF(v)$  et subsiste quelle que soit la relation de la résistance de l'air à la vitesse.

» Différentiant cette équation, puis tirant la valeur de  $d^2 t$ , divisant celle-ci par la valeur  $dt^2$  tirée de l'équation (1) elle-même, on aura

$$\frac{d^2 t}{dt^2} = \frac{d^2 p}{2 dp dt}.$$

» Soustrayant cette équation à l'équation (c) on aura

$$(d) \quad c F(v) \frac{ds}{dt} = \frac{d^2 p}{2 dp dt}.$$

» Si l'on fait  $c F(v) = b_2 v^2$ , ce qui est le cas de la vitesse proportionnelle au carré de la vitesse, l'équation précédente devient simplement

$$(2) \quad 2 b_2 \sqrt{1+p^2} dp dx = d^2 p.$$

» C'est sur le système des deux équations (1) et (2) qu'ont été fondées jusqu'ici les recherches entreprises pour la solution du problème balistique... » (général Didion).

Avec les notations actuelles l'équation (1)

$$dp dx + g dt^2 = 0,$$

qui s'écrit

$$\frac{dp}{dt} \frac{dx}{dt} = -g,$$

avec

$$dp = d \tan \tau = \frac{d\tau}{\cos^2 \tau} \quad \text{et} \quad \frac{dx}{dt} = u,$$

est la suivante (157, II) :

$$dt = -\frac{u}{g} \frac{d\tau}{\cos^2 \tau}.$$

Quant à l'équation (2), partons de l'équation précédente qui, en multipliant par  $u$  les deux membres, s'écrit

$$dx = -\frac{u^2}{g} dp.$$

On a donc

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{g}{u^2}$$

et, par suite,

$$\frac{d^2 p}{dx dp} = 2 \frac{g}{u^3} \frac{du}{dp}.$$

L'équation (2) devient donc

$$b_2 \sqrt{1+p^2} = \frac{g}{u^3} \frac{du}{dp}$$

Mais

$$\sqrt{1+p^2} = \frac{1}{\cos \tau}, \quad u = v \cos \tau, \quad dp = \frac{d\tau}{\cos^2 \tau}.$$

On a ainsi

$$du = \frac{b_2}{g} v^3 d\tau.$$

C'est l'équation différentielle de l'hodographe :

$$du = \frac{cv F(v)}{g} d\tau$$

dans l'hypothèse d'une résistance quadratique

$$c F(v) = b_2 v^2.$$

### III. — QUELQUES PROPRIÉTÉS DES TRAJECTOIRES ATMOSPHÉRIQUES.

218. **Théorème I.** — *En un point  $(v, \tau)$  d'une trajectoire atmosphérique le rayon de courbure ne dépend pas de la résistance de l'air.*

En effet, nous avons vu (160), en formant les équations intrinsèques de la trajectoire, que le rayon de courbure  $r$  est donné par l'équation  $r = -\frac{v^3}{g \cos \tau}$ . Cette relation ne renferme pas la résistance  $c F(v)$ .

C'est la traduction analytique de l'hypothèse d'une résistance tangentielle.

**Corollaire I.** — Si l'on considère une série de projectiles ayant des coefficients balistiques différents, mais lancés du même point  $(V_0, \alpha)$ , sous le même angle de projection  $\alpha$  et avec la même initiale  $V_0$ , toutes les trajectoires de ces projectiles admettent le même rayon de courbure  $r = -\frac{V_0^3}{g \cos \alpha}$ , au point  $(V_0, \alpha)$ .

**Corollaire II.** — Parmi ces trajectoires, se trouve celle du vide correspondant à l'hypothèse  $c = 0$ . Cette trajectoire est celle qu'un projectile quelconque parcourrait si, au point  $(v, \tau)$ , la résistance de l'air était tout à coup supprimée. On appelle cette trajectoire du vide au point  $(v, \tau)$  *parabole de la vitesse* en ce point.

**Corollaire III.** — La figure ci-après montre comment, en un point quelconque, l'origine  $(V_0, \alpha)$  par exemple, sont disposés la *courbe balistique* (I), la *parabole de la vitesse* (II), le *cercle osculateur* (III).

Le rayon du cercle osculateur à l'origine est  $r_0 = \frac{V_0^3}{g \cos \alpha}$ .





On a (157, IV)

$$\frac{dy}{dx} = \tan \tau, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{\cos^2 \tau} \frac{d\tau}{dx} = -\frac{g}{u^2}, \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{2g}{u^3} \frac{du}{dx} = -\frac{2g}{u^3} \frac{c F(u)}{v}.$$

Donc

$$y = x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2 u_0^2} \left[ 1 + \frac{2}{3} \frac{c F(V_0)}{V_0^2} \frac{x}{\cos \alpha} + \dots \right].$$

Appelons  $y_2$  l'ordonnée correspondant au même  $x$  de la parabole du vide  $y_2 = x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2 u_0^2}$ .

On a

$$y_2 - y = \frac{2}{3} \frac{c F(V_0)}{V_0^2} \frac{x}{\cos \alpha} + \dots$$

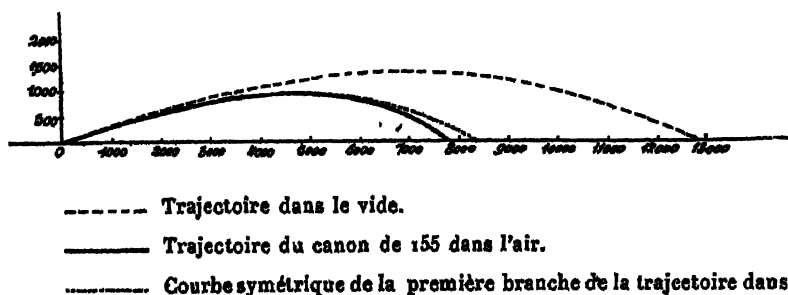
Donc  $(y_2 - y)$  change de signe avec  $x$ . Par suite, la trajectoire atmosphérique qui, en aval du point O, est au-dessous de la parabole de la vitesse, est, au contraire, au-dessus en amont de l'origine (lignes pointillées de la figure 214).

La figure suivante, empruntée à l'Aide-Mémoire de l'Artillerie, montre, dans un cas particulier, la trajectoire atmosphérique comparée à celle du vide.

*Trajectoire dans le vide, sous l'angle de 25° à la vitesse de 406<sup>m</sup>.*

*Trajectoire dans l'air du canon de 155 sous les mêmes conditions initiales.*

Fig. 215.



**219. Théorème II.** — *Une parabole à axe vertical ne peut couper la trajectoire atmosphérique en plus de trois points réels (colonel Ollero).*

Soient, en effet,

$$y = f(x)$$

l'équation de la trajectoire et

$$y_1 = a + bx_1 + cx_1^2$$

l'équation de la parabole à axe vertical.

Si les deux courbes ont  $m$  points réels communs, l'équation  $y - y_1 = 0$  sera satisfaite pour  $m$  valeurs réelles de  $x$ . Or, on sait, d'après le théorème de Rolle, que si une équation admet  $m$  racines réelles, entre deux de ces racines existe au moins une racine de la dérivée.

Donc l'équation  $\frac{dy}{dx} - \frac{dy_1}{dx_1} = 0$  admet au moins  $(m - 1)$  racines, et l'équation  $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2y_1}{dx_1^2} = 0$  admet au moins  $(m - 2)$  racines.

Or, comme dans la parabole à axe vertical, on a  $\frac{d^2y_1}{dx_1^2} = \text{const.}$ , on aura

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \text{const.}$$

Mais, on a

$$\frac{dy}{dx} = \tan \tau,$$

d'où

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\cos^2 \tau} \frac{d\tau}{dx}.$$

Mais, dans la trajectoire atmosphérique, on a  $\frac{dx}{d\tau} = -\frac{v^2}{g}$ .

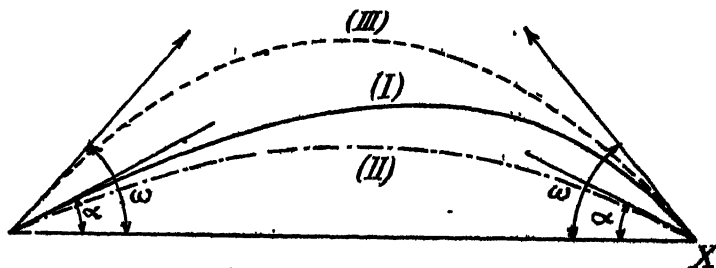
On a donc

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{g}{(v \cos \tau)^2}.$$

L'équation qui admet  $(m - 2)$  racines est donc

$$\frac{g}{(v \cos \tau)^2} = \text{const.}$$

Fig. 216.



Or, on sait que la vitesse horizontale  $v \cos \tau$  est une quantité qui décroît constamment de l'infini à zéro. Il ne peut donc y avoir qu'une seule valeur de  $v \cos \tau$  qui satisfasse à cette équation.

Donc, la valeur maximum de  $(m - 2)$  est 1 et, par suite,  $m$  est au plus égal à 3.

*Corollaires.* — 1° Si une parabole à axe vertical est tangente en un point à la trajectoire atmosphérique, elle ne peut la couper qu'en un seul autre point.

2° La parabole de la vitesse, qui a déjà trois points communs avec la trajectoire atmosphérique, ne peut couper la trajectoire en un autre point.

3° La trajectoire atmosphérique (I) est comprise entre deux paraboles à axe vertical (II) et (III) construites sur la portée et tangentes respectivement à l'origine et au point de chute de cette trajectoire (fig. 216).

**220. Formules et constructions diverses de Balistique approximative.** — Cette dernière propriété a été souvent utilisée par les balisticiens pour obtenir une équation approchée de la trajectoire, quand on connaît simplement  $X$ ,  $\alpha$  et  $\omega$ , par les Tables de tir.

1° *Formule donnant la flèche.* — Les deux paraboles du vide ayant pour portée  $X$  et pour angle de projection  $\alpha$  et  $\omega$  donnent des flèches :

$$Y_1 = \frac{1}{4} X \tan \alpha, \quad Y_s = -\frac{1}{4} X \tan \omega.$$

Donc, on aura, approximativement, dans l'air :

$$Y_s = \frac{X}{8} (\tan \alpha - \tan \omega)$$

ou

$$Y_s = \frac{X}{4} \sqrt{-\tan \alpha \tan \omega}.$$

2° Déterminer l'équation de la trajectoire, en supposant qu'elle est du troisième degré et connaissant  $X$ ,  $\alpha$  et  $\omega$ .

On part de

$$y = x \tan \alpha - (ax^2 + bx^3),$$

ce qui donne d'abord

$$\tan \alpha = aX + bX^2,$$

puis

$$\tan \omega = \tan \alpha - (2aX + 3bX^2).$$

Ces deux équations déterminent  $a$  et  $b$  et l'on a

$$y = x \tan \alpha - \frac{x^2}{X} (2 \tan \alpha - \tan \omega) - \frac{x^3}{X^2} (\tan \omega - \tan \alpha).$$

3° Déterminer l'équation de la trajectoire, supposée du quatrième degré, connaissant  $X$ ,  $V_0$ ,  $\alpha$  et  $\omega$ , avec un contact du second ordre à l'origine.

De

$$y = x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2 V_0^2 \cos^2 \alpha} (1 + a x + b x^2),$$

qui satisfait à la condition de contact à l'origine, on déduit, en posant

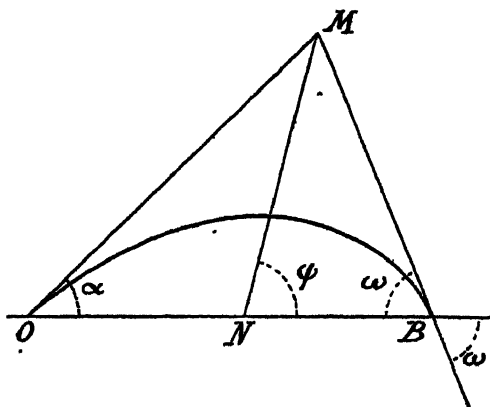
$$M = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g X} - 1, \quad N = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g X} \frac{\tan \omega}{\tan \alpha} - 1,$$

les formules

$$a = \frac{3M - N}{X}, \quad b = \frac{N - 2M}{X^2}.$$

4° Déterminer l'équation de la trajectoire, sachant que c'est une parabole à axe oblique tangente à l'origine et au point de chute à la trajectoire vraie.

Fig. 217.



L'équation de la parabole sera mise sous la forme

$$y = ax - \sqrt{n} + \sqrt{n - mx}.$$

Une première condition est

$$0 = aX - \sqrt{n} + \sqrt{n - mX},$$

D'autre part,

$$\tan \tau = a - \frac{m}{2\sqrt{n - mx}}.$$

Donc

$$\tan \alpha = a - \frac{m}{2\sqrt{n}}, \quad \tan \omega = a - \frac{m}{2\sqrt{n - mX}}.$$

On a ainsi trois équations pour obtenir les inconnues  $\alpha$ ,  $m$  et  $n$ . On peut démontrer que la constante  $\alpha = \tan \Psi$ , où  $\Psi$  est l'angle de l'axe des  $x$  avec le diamètre conjugué MN de la corde OB.

On a d'ailleurs

$$\tan \Psi = \frac{-2 \sin \omega \sin \alpha}{\sin(\omega + \alpha)}.$$

La flèche est donnée par la formule

$$Y_s = -\frac{X}{2} \frac{\sin \omega \sin \alpha}{\sin(\alpha - \omega)},$$

et l'abscisse du point culminant par la formule

$$X_s = \frac{X}{2} - \frac{X \sin(\alpha + \omega)}{4 \sin(\alpha - \omega)}$$

(dans ces formules,  $\omega$  est négatif).

Cette représentation de la trajectoire est due au commandant Chapel.

5° Voici d'autres formules du même genre, empruntées au capitaine Alston Hamilton.

Les expressions suivantes, exactes dans le vide, peuvent être aussi utiles en pratique, pour les faibles vitesses initiales et les projectiles lourds :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_s = \frac{1}{8} g T^2 = \frac{1}{8} X (\tan \alpha - \tan \omega), \\ V_0 V_\omega T^2 \cos \alpha \cos \omega = X^2, \\ \frac{X_s}{X} = -\frac{\tan \omega}{\tan \alpha - \tan \omega}, \\ y = \frac{x^2}{X^2} (X - x) \left[ \left( \frac{X}{x} - 1 \right) \tan \alpha - \tan \omega \right]. \end{array} \right.$$

On en déduit, quand on connaît  $(V_0, \alpha, T, X)$ , les déterminations approximatives suivantes de  $(\omega, V_\omega, Y_s, X_s)$  :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tan \omega = \tan \alpha - \frac{g T^2}{X}, \\ V_\omega = \frac{X^2}{T^2} \frac{1}{\cos \omega \cos \alpha}; \end{array} \right.$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_s = \frac{1}{8} g T^2, \\ X_s = \frac{-X \tan \omega}{\tan \alpha - \tan \omega}. \end{array} \right.$$

De la formule qui donne  $y$  dans le Tableau (1), le capitaine Hamilton déduit une expression pour la zone dangereuse  $Z$  correspon-



à-dire ayant quatre points communs avec la trajectoire vraie et une tangente commune.

La courbe de substitution la plus simple satisfaisant à ces conditions est une conique; le problème géométrique que pose cette méthode est la construction d'une conique définie par trois tangentes et les points de contact de deux d'entre elles. Il se résout par le théorème de Pascal.

a. Le point de contact M de la tangente BC (tangente au sommet de la trajectoire) avec la conique est évidemment au milieu du segment BC, puisque le diamètre conjugué de la directrice OX s'obtient en joignant le point A, intersection des tangentes à la courbe en O et X, au milieu m de la sécante OX.

b. Pour obtenir le point d'intersection de la conique avec une droite OII quelconque, issue de O, marquons l'intersection  $\alpha$  de la droite OH avec la droite fixe MX; traçons  $\alpha A$  qui coupe OM en  $b$ , puis  $bX$ , qui coupera OII au point cherché P.

En déplaçant la droite OH autour de O, on obtiendra autant de points de la courbe cherchée que l'on voudra.

Le commandant H. Parodi indique encore, parmi d'autres problèmes du même genre, la substitution à la trajectoire d'une courbe constituée par deux coniques, quand on connaît le cercle osculateur  $r = \frac{V_0}{g \cos \alpha}$  à l'origine, et au point de chute, et la position  $(X, Y)$  du sommet.

**221. Théorème III.** — *Deux projectiles de coefficients balistiques  $c$  et  $c_1$ , sont lancés du même point  $(V_0, \alpha)$  avec la même vitesse  $V_0$  et sous le même angle de projection  $\alpha$ . Si  $c_1 > c$ , la trajectoire  $(c_1)$  est constamment au-dessous de la trajectoire  $(c)$ .*

La démonstration complète de ce théorème exige qu'on ait recours aux équations différentielles du mouvement en coordonnées obliques établies au n° 162.

1° L'équation différentielle, analogue à l'hodographe, et qui n'est fonction que de deux variables, est

$$dv_x = -\frac{v_x^2}{g} \frac{c F(v)}{v} dp,$$

avec

$$v = v_x [1 + p^2 - 2p \sin \alpha]^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad p = \frac{dy}{dx}.$$

La variable  $v_x$  est la vitesse du projectile projetée sur la tangente initiale  $v_x = \frac{dx}{dt}$ .

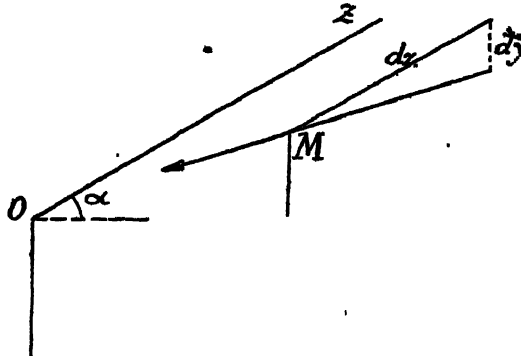


Intégrons l'équation différentielle, depuis l'origine ( $p = 0$ ,  $v_z = V_0$ ) jusqu'à une valeur  $p$ . On aura

$$v_z = V_0 - \frac{c}{g} \int_0^p \frac{v_z^2 F(v)}{v} dp, \quad \text{pour la trajectoire } (c);$$

$$v_{1z} = V_0 - \frac{c_1}{g} \int_0^p \frac{v_z^2 F(v)}{v} dp, \quad \text{pour la trajectoire } (c_1).$$

Fig. 219.



Or, si  $c_1 > c$ , on aura d'abord  $v_{1z} < v_z$ , puisque la perte de vitesse  $dv_{1z}$  est proportionnelle à  $c$ .

Mais, pour une valeur commune de  $p$ , jamais  $v_{1z}$  ne pourra dépasser  $v_z$ . Car, au moment de l'égalité  $v_{1z} = v_z$ , on aurait eu égalité de  $v_z$ , de  $p$  et, par suite, de  $v$ , et l'on se trouverait dans des conditions identiques à celles du départ;  $v_{1z}$  serait donc, un instant après, plus petit que  $v_z$ ; donc  $v_{1z}$  ne peut surpasser  $v_z$ .

2° Prenons un même éloignement  $z$  sur la ligne de projection. On a

$$z = \frac{1}{g} \int_0^p v_z^2 dp.$$

Puisque, pour une valeur de  $p$ , on a toujours

$$v_{1z}[\text{traject. } (c_1)] < v_z[\text{traject. } (c)],$$

il faudra donc, pour avoir le même éloignement  $z$  sur les deux trajectoires, que le  $p$ , de la trajectoire  $(c_1)$  soit plus grand que le  $p$  de la trajectoire  $(c)$ .

3° L'abaissement  $y$  correspondant à l'éloignement  $z$  est donné par la formule

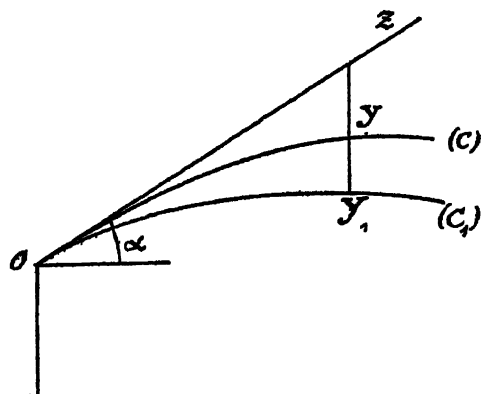
$$y = \int_0^z p dz.$$

D'après la proposition précédente, à égalité de  $z$ , on a

$$p_1[\text{traject. } (c_1)] > p[\text{traject. } (c)].$$

Donc, d'après l'intégrale qui les exprime, l'abaissement  $y_1[\text{traject. } (c_1)]$

Fig. 220.



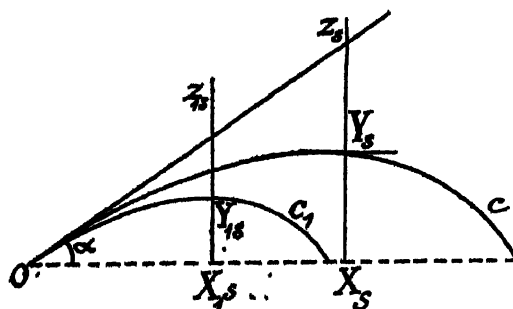
est plus grand que l'abaissement  $y[\text{traject. } (c)]$ , les deux  $y$  correspondant au même éloignement  $z$ .

Cela démontre la propriété énoncée : *La trajectoire  $(c_1)$  est toujours au-dessous de la trajectoire  $(c)$ , si  $c_1 > c$ .*

*Corollaires.* — 1° Au point de même éloignement  $z$ , la tangente à la trajectoire  $(c_1)$  est plus inclinée sur la tangente initiale que la tangente à la trajectoire  $(c)$ . Cela résulte de ce que  $p_1 > p$ .

2° Comme on a  $x = z \cos \alpha$ , on peut substituer dans l'énoncé des théorèmes précédents l'abscisse  $x$  à l'éloignement  $z$ .

Fig. 221.



3° On a  $t = \int_0^x \frac{dz}{v_z}$ . Puisque  $v_{1z} < v_z$ , le temps mis par le projectile

pour aller de l'origine au point de même abscisse est plus grand sur la trajectoire  $(c_1)$  que sur la trajectoire  $(c)$ .

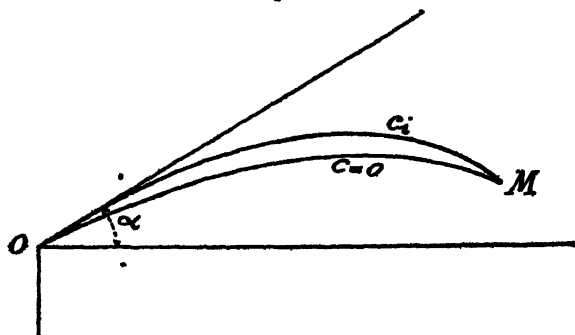
*Théorèmes sur le sommet.* — Au sommet de la trajectoire, on a  $p = \tan \alpha$  et l'on peut énoncer les théorèmes suivants :

On a

$$\begin{aligned} v_{1s} < v_{2s}, & \text{ donc } V_1 < V_2; \\ z_{1s} < z_2, & \text{ donc } X_{1s} < X_2; \\ y_{1s} < y_2, & \text{ donc } Y_{1s} < Y_2, & \text{ de l'équation } Y = \int_0^\alpha v^2 p \, dp, \\ t_{1s} < t_2, & \text{ donc } T_{1s} < T_2, & T = \int_0^\alpha v \, dp. \end{aligned}$$

**222. Théorème IV.** — Supposons qu'on tire sous l'angle constant  $\alpha$  et soit M le but. On pourra atteindre ce but en tirant des projectiles

Fig. 222.



divers, de coefficients balistiques croissants  $c_1, c_2$ , avec des vitesses initiales  $V_{10}, V_{20}$  également croissantes.

Au cas  $c = 0$  (coefficient balistique nul, tir dans le vide), correspondra une vitesse initiale  $V_{00}$ , qui sera la plus faible qu'on puisse employer pour atteindre M.

1° Supposons que le degré de la résistance soit  $> 2$ ; alors le point où  $v = \infty$  est à distance finie. Donc, si l'on tire du point O avec une vitesse infinie, sous l'angle  $\alpha$ , une trajectoire particulière  $c_1$  passera par le point M. Pour toutes les valeurs de  $c$  supérieures à  $c_1$ , les trajectoires étant, d'après le théorème du n° 221, au-dessous de  $c_1$ , passeront au-dessous de M.

Donc, dans le cas de  $n > 2$ , toutes les trajectoires qui peuvent atteindre le point M ont leurs vitesses comprises entre  $V_{00}$  et  $\infty$  et leurs coefficients balistiques compris entre 0 et  $c_1$ . Elles sont renfermées

dans un fuseau étroit compris entre les trajectoires limites  $c = 0$  et  $c = c_1$ .

2° Si le degré de la résistance est  $< 2$ , le point où  $v = \infty$  est à distance infinie. Il existe, par suite, une vitesse limite  $V_{10}$ , correspondant à un coefficient balistique  $c_1$  qui donnera la dernière trajectoire passant par le point M.

Le fuseau comprenant toutes les trajectoires aura donc pour limites, d'une part ( $V_{00}$ ,  $c = 0$ ), et d'autre part ( $V_{10}$ ,  $c_1$ ).

**223. De l'angle de portée maximum.** — « L'expérience avait appris aux anciens artilleurs que l'angle de tir qui donne la portée maximum est inférieur à  $45^\circ$ . Ce résultat a été longtemps admis comme une loi générale du mouvement des corps pesants dans les milieux résistants, quoique l'Analyse n'ait jamais rigoureusement justifié cette conclusion. Récemment, on a constaté que, pour certains projectiles, l'angle de portée maximum était supérieur à  $45^\circ$ . Cette anomalie, bien qu'elle puisse s'expliquer par la raréfaction de plus en plus grande des couches d'air traversées par le projectile à mesure que l'angle de tir augmente, est de nature à jeter des doutes sur l'exactitude de la loi admise sans démonstration dans le cas d'un milieu homogène. Nous nous proposons ici d'examiner dans quelles limites cette loi peut être acceptée » (colonel Astier, 1877).

Nous ferons connaître ici les deux théorèmes dus au colonel Astier, qui sont les seuls connus sur ce problème, envisagé dans le cas général, tout au moins.

**224. Premier théorème du colonel Astier sur la somme  $(\alpha + \omega)$ .** — *Lemme.* — A la portée maximum correspondent un angle de projection  $\alpha$  et un angle de chute  $\omega$ ; nous désignerons par  $\omega'$  la valeur absolue de l'angle de chute.

L'angle de chute  $\omega'$  est toujours plus grand que l'angle de projection  $\alpha$ ; la somme  $(\alpha + \omega')$  varie de 0 à  $\pi$ , quand l'angle de projection varie de 0 à  $\frac{\pi}{2}$ . Il existe donc un certain angle de projection  $\gamma$ , tel que la somme  $(\gamma + \omega')$  soit égale à  $\frac{\pi}{2}$ .

La tangente à la trajectoire au point de chute est alors perpendiculaire à la tangente initiale.

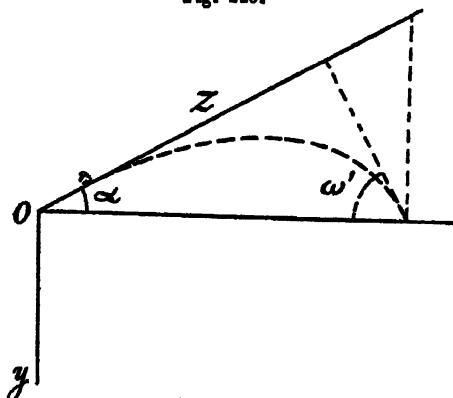
L'angle  $\gamma$  est d'ailleurs plus petit que  $\frac{\pi}{4}$ ; car on a toujours  $\gamma + \omega > 2\gamma$ , et si  $\gamma + \omega = \frac{\pi}{2}$ , il vient  $\gamma < \frac{\pi}{4}$ .

1° Prenons l'équation de la trajectoire rapportée aux axes obliques  $Oy$  et  $Oz$  de l'origine (162), et soit  $y = f(z, \alpha)$ , cette équation.

On a

$$\frac{dy}{dz} = \frac{df}{dz}.$$

Fig. 223.



Mais (162) on a

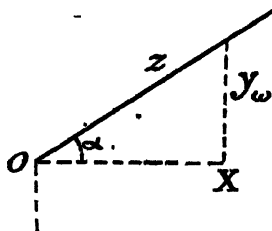
$$\frac{dy}{dz} = p = \frac{\sin(\alpha - \tau)}{\cos \tau}.$$

On a donc

$$\frac{df}{dz} = \cos \alpha (\tan \alpha - \tan \tau)$$

Soient  $Z$  et  $y_\omega$  les coordonnées obliques du point de chute.

Fig. 224.



Si  $X$  est la portée horizontale, on a

$$Z = \frac{X}{\cos \alpha}, \quad y_\omega = X \tan \alpha,$$

avec

$$\frac{df}{dz} = \cos \alpha (\tan \alpha - \tan \omega) \quad \text{et} \quad X \tan \alpha = f(Z; \alpha).$$

La portée maximum  $X_m$  s'obtiendra en différentiant cette dernière

équation par rapport à  $\alpha$ . On aura ainsi

$$\tan z \frac{dX}{dz} + \frac{X}{\cos^2 \alpha} = \frac{df}{dZ} \frac{dZ}{dz} + \frac{df}{dz} = \frac{df}{dZ} \left( \frac{1}{\cos \alpha} \frac{dX}{dz} + Z \tan \alpha \right) + \frac{df}{dz}.$$

En égalant  $\frac{dX}{dz}$  à zéro, il viendra, pour la portée maximum :

$$\frac{X_M}{\cos^2 \alpha_M} = Z_M \tan z_M \cos z_M (\tan z_M - \tan \omega_M) + \left( \frac{df}{dz} \right)_M.$$

On aura, en réduisant les termes :

$$X_M (1 + \tan z_M \tan \omega_M) = \left( \frac{df}{dz} \right)_M.$$

Prenons maintenant la valeur absolue  $\omega'_M$  de l'angle de chute. On écrira l'équation précédente

$$X_M (1 - \tan z_M \tan \omega'_M) = \left( \frac{df}{dz} \right)_M.$$

On déduit de là :

a. Si  $\left( \frac{df}{dz} \right)_M = 0$ , on a

$$\omega'_M = \frac{\pi}{2} - \alpha_M, \quad \text{d'où} \quad \alpha_M = \gamma;$$

b. Si  $\left( \frac{df}{dz} \right)_M > 0$ , on a  $\alpha_M < \gamma$ ; car, en vertu de la relation  $\alpha_M + \gamma = \frac{\pi}{2}$ , on aurait sans cela  $\tan \alpha_M > 1$ , et, par suite,

$$\tan z_M \tan \omega'_M > 1,$$

ce qui rendrait le premier membre négatif;

c. Si  $\left( \frac{df}{dz} \right)_M < 0$ , pour la raison inverse, on a  $\alpha_M > \gamma$ . Remarquons que si  $\alpha_M < \gamma$ , on a toujours  $\alpha_M < \frac{\pi}{4}$ .

2° On peut démontrer géométriquement la proposition précédente.

Soit BOA l'angle de portée maximum. La portée est OA, et BA est l'abaissement du point de chute.

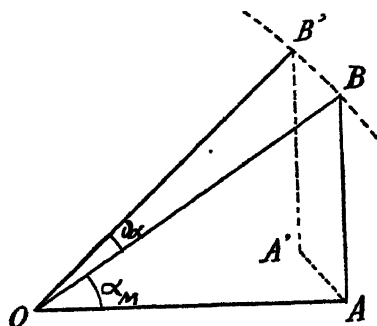
Augmentons l'angle de projection  $\alpha$  d'une petite quantité  $d\alpha$ . Puisqu'il s'agit de la portée maximum, la trajectoire  $(\alpha + d\alpha)$  passera encore au point A. Prenons OB' = OB, et soit B'A' l'abaissement correspondant; AA' sera le dernier élément de la trajectoire.

Mais, à la limite, BB' est perpendiculaire à OB; donc si B'A' = BA l'élément AA' sera parallèle à BB' et sera perpendiculaire à OB.

*L'angle de chute sera complémentaire de l'angle de projection qui aura la valeur  $\gamma$ .*

Suivant que  $B'A'$  sera plus grand ou plus petit que  $BA$ , l'angle  $A'AO$  sera plus petit ou plus grand que le complément de  $BOA$ . Or, la diffé-

Fig. 225.



rence  $B'A' - BA$  est la quantité  $\left(\frac{dv}{dz}\right)_M = \left(\frac{df}{dz}\right)_M$  qu'on a considérée précédemment.

**THÉORÈME.** — *Suivant que la résistance croît proportionnellement à la vitesse, plus vite ou moins vite que la vitesse, l'angle de portée maximum est égal à  $\gamma$ , plus grand ou plus petit que  $\gamma$ . — En d'autres termes, si, sur toute la trajectoire,  $n$  est le degré de la résistance, on aura :*

$$\begin{array}{lll} \alpha_M > \gamma, & \text{si} & n > 1; \\ \alpha_M = \gamma, & \text{si} & n = 1; \\ \alpha_M < \gamma, & \text{si} & n < 1. \end{array}$$

*a. La résistance est proportionnelle à la vitesse  $n = 1$ . — Si l'on a  $cF(v) = b_1 v$ , la première équation du mouvement en coordonnées obliques devient*

$$dv_z = -\frac{b_1}{g} v_z^2 dp.$$

Puisque  $v$ , qui renfermait l'angle de projection  $\alpha$ , disparaît et que  $p = \frac{dy}{dz}$  ne contient pas cette constante, ni cette équation différentielle, ni les autres ne renfermeront  $\alpha$ . Il en sera de même des limites des intégrales pour les valeurs initiales  $z = 0, p = 0, y = 0, (v_z)_0 = V_0$ .

Ainsi, dans le cas d'une résistance proportionnelle à la vitesse, la trajectoire est indépendante de l'angle de projection.

On aura donc, non pas  $y = f(z, \alpha)$  pour équation de la trajectoire rapportée aux axes obliques, mais  $y = f(z)$ . Donc  $\frac{df}{dz} = 0$ , aussi bien au point de portée maximum qu'en un autre point quelconque.

D'après le lemme, on aura, par suite,  $\alpha_M = \gamma$ .

*b. La résistance croît plus vite que la vitesse*  $n > 1$ . — Soit  $\varphi(v) = \frac{F(v)}{v}$  la fonction de  $v$  qui figure dans l'équation de l'hodographe; on suppose que  $\varphi(v)$  croît avec  $v$ .

On écrira l'hodographe

$$dv_z = - \frac{v_z^2}{g} c \varphi(v) dp,$$

avec (162)

$$v = v_z(p^2 - 2p \sin \alpha + 1)^{\frac{1}{2}}.$$

Donc

$$dv_z = - \frac{v_z^2}{g} c \varphi \left[ v_z (p^2 - 2p \sin \alpha + 1)^{\frac{1}{2}} \right] dp.$$

Soient  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  deux angles de projection,  $\alpha_2 > \alpha_1$ . On aura

$$(v_z)_1 = V_0 - \frac{c}{g} \int_{V_0}^{(v_z)_1} v_z^2 \varphi dp,$$

$$(v_z)_2 = V_0 - \frac{c}{g} \int_{V_0}^{(v_z)_2} v_z^2 \varphi dp.$$

À l'origine,  $(v_z)_1 = (v_z)_2 = V_0$ . Mais, pour une même valeur de  $v_z$  et de  $p$ , la valeur  $v$  diminue quand  $\alpha$  augmente. Il en sera de même, par hypothèse, de  $\varphi(v)$ .

Donc, pour une même valeur de  $p$ ,  $(v_z)_2$ , d'après l'intégrale, sera plus grand que  $(v_z)_1$ , du moins aussitôt après l'origine. Mais jamais  $(v_z)_2$  ne pourra redevenir égal à  $(v_z)_1$ , car  $d(v_z)_2$  serait encore supérieur à  $d(v_z)_1$  et le même raisonnement serait valable.

Donc, si  $\alpha_2 > \alpha_1$ , toujours  $(v_z)_2$  correspondant à  $\alpha_2$  sera plus grand que  $(v_z)_1$ , correspondant à  $\alpha_1$ , pour la même valeur de  $p$ .

Considérons maintenant, pour les deux trajectoires, le même éloignement  $z$ ; aux angles de projection  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  ( $\alpha_2 > \alpha_1$ ) correspondent les valeurs  $p_1$  et  $p_2$ .

On a

$$z = \frac{1}{g} \int_0^{p_1} (v_z)_1^2 dp, \quad z = \frac{1}{g} \int_0^{p_2} (v_z)_2^2 dp.$$

Puisque, à égalité de  $p$ , on a  $(v_z)_2 > (v_z)_1$ , l'égalité des  $z$  entraîne l'inégalité des limites  $p_1$  et  $p_2$ , et l'on a nécessairement

$$p_2 < p_1.$$

Mais les *abaissements*  $y$  sont donnés par les formules

$$y_1 = \int_0^{p_1} p dz, \quad y_2 = \int_0^{p_2} p dz.$$



Par suite, le premier est plus grand que le second :  $y_1 > y_2$ .

Donc, si  $n > 1$ , les abaisséments correspondant à un même éloignement  $z$  sur la ligne de projection diminuent quand  $\alpha$  augmente. Puisque  $y = f(z, \alpha)$ , on a donc  $\frac{df}{d\alpha} < 0$  sur toute la trajectoire et, par suite, en particulier, au point de portée maximum. Donc  $\alpha_M > \gamma$ . C. Q. F. D.

c. Si  $n < 1$ , la même démonstration, appliquée au cas où la fonction  $\varphi(v)$  diminue avec  $v$ , conduit à la conclusion  $\alpha_M < \gamma$ .

*Exemples.* — 1° Supposons qu'on puisse mettre en coordonnées rectangulaires la trajectoire sous la forme (trajectoire de Piton-Bressant)

$$y = x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2 V_0^2 \cos^2 \alpha} (1 + K V_0^2 x).$$

En coordonnées obliques, on aura

$$y = \frac{g}{2 V_0^2} z^2 (1 + K V_0^2 z \cos \alpha).$$

Formons

$$\frac{df}{d\alpha} = - \frac{gK}{2} z^2 \sin \alpha.$$

Ainsi, pour toute valeur positive de l'angle de projection  $\alpha$ , on aura  $\frac{df}{d\alpha} < 0$ .

Donc l'angle  $\alpha_M$  de portée maximum est toujours plus grand que l'angle  $\gamma$  auquel correspond, au point de chute, un angle de chute égal à  $\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)$ .

2° Prenons la trajectoire sous la forme suivante (trajectoire du général Duchêne) :

$$y = x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2 V_0^2 \cos^2 \alpha} \left( 1 + H_1 \frac{x}{\cos \alpha} + H_2 \frac{x^2}{\cos^2 \alpha} + \dots \right),$$

qui deviendra, en coordonnées obliques,

$$y = \frac{g}{2 V_0^2} z^2 (1 + H_1 z + H_2 z^2 + \dots).$$

On a  $\frac{df}{d\alpha} = 0$ , en tout point de la trajectoire,

Donc on aura  $\alpha_M = \gamma$ . Les tangentes à l'origine et au point de chute sont, dans ce cas, comme dans le cas de  $n = 1$ , perpendiculaires, pour l'angle de portée maximum.

MAXIMUM. — 1° Si l'on considère l'équation  $y \cos^2 \alpha = \psi(z \cos \alpha, \alpha)$ , forme sous laquelle on peut écrire la trajectoire en coordonnées obliques, on énoncera les théorèmes suivants relatifs à l'angle  $\alpha_M$  de portée maximum.

On a :

$$\begin{aligned} \alpha_M &= \frac{\pi}{4}, & \text{si} & \left( \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right)_M = 0; \\ \alpha_M &> \frac{\pi}{4}, & \text{si} & \left( \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right)_M < 0; \\ \alpha_M &< \frac{\pi}{4}, & \text{si} & \left( \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right)_M > 0 \end{aligned}$$

En effet, au point de chute, on a

$$y \omega = X \tan \alpha \quad \text{et} \quad X = z \cos \alpha.$$

On aura donc, pour la portée :

$$X \sin \alpha \cos \alpha = \psi(X, \alpha).$$

Le maximum de  $X$  s'obtiendra en faisant  $\frac{\partial X}{\partial \alpha} = 0$ .

On aura donc

$$X \cos 2\alpha_M = \left( \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right)_M.$$

Donc,  $\cos 2\alpha_M$  aura le même signe que  $\left( \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right)_M$  et, suivant que cette dérivée sera nulle, positive ou négative, l'angle de portée maximum sera égal à  $\frac{\pi}{4}$ , plus petit ou plus grand.

Si la fonction  $\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}$  est telle qu'elle ne s'annule pas en changeant de signe entre  $\alpha_M$  et  $\frac{\pi}{4}$ , le théorème pourra s'énoncer ainsi qu'il suit :

On a :

$$\begin{aligned} \alpha_M &= \frac{\pi}{4}, & \text{si} & \left( \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right)_{\frac{\pi}{4}} = 0; \\ \alpha_M &> \frac{\pi}{4}, & \text{si} & \left( \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right)_{\frac{\pi}{4}} < 0; \\ \alpha_M &< \frac{\pi}{4}, & \text{si} & \left( \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right)_{\frac{\pi}{4}} > 0. \end{aligned}$$

2° *Exemples.* — a. Ainsi, dans le premier exemple cité précédemment (trajectoire de Piton-Bressant), on pourra écrire

$$y \cos^2 \alpha = \frac{g}{2V_0^2} (z^2 \cos^2 \alpha) [1 + KV_0^2 (z \cos \alpha)].$$

Donc  $\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$ , en tout point de la trajectoire : l'angle de portée maximum est égal à  $\frac{\pi}{4}$ .

b. Dans le second exemple (trajectoire du général Duchêne), on écrira

$$y \cos^2 \alpha = \frac{K}{2V_0^2} z^2 \cos^2 \alpha (1 + H_1 z),$$

qui peut se mettre sous la forme

$$y \cos^2 \alpha = \frac{K}{2V_0^2} (z^2 \cos^2 \alpha) \left[ 1 + H_1 \left( \frac{z \cos \alpha}{\cos^2 \alpha} \right) \right].$$

Donc

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \left[ \frac{H_1 K}{2V_0^2} (z^2 \cos^2 \alpha) \right] \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha}.$$

En tout point de la trajectoire,  $\frac{\partial \psi}{\partial z}$  est positif. Donc, l'angle de portée maximum est plus petit que  $\frac{\pi}{4}$ .

c. Si l'on prend la trajectoire sous la forme

$$y = x \tan \alpha - \frac{K x^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} (1 + \lambda x \cos^m \alpha),$$

on la met sous la forme

$$y \cos^2 \alpha = \frac{K}{2V_0^2} (z^2 \cos^2 \alpha) [1 + \lambda (z \cos \alpha) \cos^m \alpha]$$

d'où

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = - \left[ \frac{\lambda K}{2V_0^2} (z \cos \alpha)^3 \right] m \sin \alpha \cos \alpha.$$

Si  $m > 0$ , l'angle de portée maximum  $> \frac{\pi}{4}$ ;

Si  $m = 0$ , l'angle de portée maximum  $= \frac{\pi}{4}$ ;

Si  $m < 0$ , l'angle de portée maximum  $< \frac{\pi}{4}$ .

3° *Fonction  $\Psi(\alpha)$ .* — Posons

$$x = z \cos \alpha, \quad \xi = y \cos^2 \alpha, \quad P = \frac{d\xi}{dz}.$$

On aura

$$dz = \frac{dx}{\cos \alpha}; \quad P = \frac{dy}{dz} = \frac{1}{\cos \alpha} \frac{d\xi}{dz} = \frac{P}{\cos \alpha}; \quad dP = \frac{dP}{\cos \alpha}.$$

Par suite, l'hodographe, qui donne  $dv_z$ , s'écrira

$$dv_z = - \frac{v_z^2}{g} c \varphi \left[ v_z \left( \frac{P^2}{\cos^2 \alpha} - 2P \tan \alpha + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \frac{dP}{\cos \alpha},$$

et l'on aura aussi

$$dP = \frac{\xi}{v^{\frac{1}{2}}} dx \quad \text{et} \quad d\xi = P dx.$$

Ce sont exactement, entre les variables  $(x, \xi, P, v)$ , les mêmes équations qu'au n° 224,  $b$ , entre  $(z, y, p, v)$ , excepté que la fonction

$$\varphi [v_2 (p^2 - 2p \sin z + 1)^{\frac{1}{2}}]$$

est remplacée par la fonction

$$\Psi(\alpha) = \frac{1}{\cos \alpha} \varphi \left[ v_2 \left( \frac{P^2}{\cos \alpha} - 2P \tan \alpha + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right].$$

En se reportant aux raisonnements précédents, on conclut que, pour une valeur donnée de  $x$ , les valeurs correspondantes de  $P$  et de  $\xi$  augmentent ou diminuent avec  $\alpha$ , suivant que la fonction  $\Psi$  augmente ou diminue avec  $\alpha$ . Donc, chercher le signe de  $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$  (ou de  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ ) revient à chercher le signe de  $\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}$  pour  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .

4° *Application au cas d'une résistance monome.* — Soit

$$cF(v) = b_n v^n.$$

Formons, dans cette hypothèse, la fonction

$$\Psi(\alpha) = \frac{c}{\cos \alpha} \varphi(v) = \frac{cF(v)}{v \cos \alpha}.$$

On a

$$\Psi(\alpha) = \frac{b_n v_2^{n-1}}{\cos \alpha} = b_n \frac{v_2^{n-1}}{\cos \alpha} \left( \frac{P^2}{\cos^2 \alpha} - 2P \tan \alpha + 1 \right)^{\frac{n-1}{2}}.$$

La dérivée par rapport à  $\alpha$  est la suivante :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} = \frac{b_n v_2^{n-1}}{\cos^2 \alpha} \left( \frac{P^2}{\cos^2 \alpha} - 2P \tan \alpha + 1 \right)^{\frac{n-3}{2}} \left( \sin \alpha - P \frac{2 \sin^2 \alpha + n - 1}{\cos \alpha} + P^2 \frac{n \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \right).$$

Si l'on y fait  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ , elle devient

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} \right)_{\frac{\pi}{4}} &= 2 b_n v_2^{n-1} (2P^2 - 2P + 1)^{\frac{n-3}{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + n \sqrt{2} P^2 - n \sqrt{2} P \right) \\ &= 2 n \sqrt{2} b_n v_2^{n-1} [P^2 + (P-1)^2]^{\frac{n-3}{2}} \left[ \left( P - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4} \right]. \end{aligned}$$

Le signe de la dérivée dépend donc du signe du dernier facteur

$$\left(P - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4}.$$

Si  $n \leq 2$ , cette expression est positive, quel que soit  $P$ .

La fonction  $\Psi$  augmentera avec  $\alpha$ . Donc, dans ce cas,  $\xi = \gamma \cos^2 \alpha$  augmentera avec  $\alpha$ , d'où ce théorème :

*Si  $n \leq 2$ , l'angle de portée maximum est plus petit que  $\frac{\pi}{4}$ .*

Mais cette démonstration ne subsiste plus quand  $n$  est plus grand que 2.

La relation du second degré en  $P$  s'écrivant  $\left(P^2 - P + \frac{1}{2n}\right)$ , cette quantité est négative pour toutes les valeurs de  $P$  comprises entre les deux racines de l'équation  $P^2 - P + \frac{1}{2n} = 0$ .

Or, comme  $p = \cos \alpha (\tan \alpha - \tan \omega)$ , on voit que, entre l'origine et le point de chute,  $P = p \cos \alpha$  varie de zéro à  $\cos^2 \alpha (\tan \alpha - \tan \omega)$ , c'est-à-dire à  $\frac{1}{2} (1 - \tan \omega)$  pour  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  (avec  $\tan \omega$  négatif).

Si  $n$  est très grand, les deux racines en question sont très voisines de zéro et de l'unité.

« La dérivée  $\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}$  sera donc négative pour la plus grande portion de l'arc de trajectoire considéré, surtout si  $\tan \omega$  est très peu supérieur à  $\tan \alpha$  (projectiles de très faible coefficient balistique). On conçoit très bien que, dans ces conditions, la valeur de  $\xi$  au point de chute puisse diminuer quand  $\alpha$  augmente. Il en résulterait un angle de portée maximum supérieur à  $45^\circ$  » (colonel Astier).

Ce raisonnement démontre simplement qu'il n'est pas absurde de penser que, dans certains cas, on puisse avoir  $\alpha_M > \frac{\pi}{4}$ ; il ne prouve pas qu'en réalité ce cas puisse se présenter; pour le voir, il faut étudier des problèmes particuliers. Nous donnerons ici l'analyse du colonel Astier pour les deux cas  $n = 3$  et  $n = 5$ .

5° Cas de  $n = 3$ . — L'équation différentielle de l'hodographe (3°), dans le cas d'une résistance monome, s'écrit avec la fonction  $P$  :

$$\frac{dv_x}{v_x^{\frac{3}{2}+1}} = - \frac{b_n}{g \cos \alpha} \left( 1 + \frac{P^2}{\cos^2 \alpha} - 2P \tan \alpha \right)^{\frac{n-1}{2}} dP,$$

et, pour  $n = 3$ , elle s'intégrera sous la forme

$$\frac{v_x}{V_0} = \left[ 1 + \frac{3b_n V_0^2}{g} \left( \frac{P}{\cos \alpha} + \frac{P^2}{3 \cos^2 \alpha} - \frac{P^2 \tan \alpha}{\cos \alpha} \right) \right]^{-\frac{1}{2}},$$

et l'abscisse  $x$ , dont l'équation différentielle est

$$dx = \frac{v^2}{g} dP,$$

sera donnée par l'intégrale

$$x = \frac{V_0^2}{g} \int_0^P \frac{dP}{\left[ 1 + \frac{3b_2 V_0^2}{g} \left( \frac{P}{\cos \alpha} + \frac{P^2}{3 \cos^2 \alpha} - \frac{P^2 \tan \alpha}{\cos \alpha} \right) \right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Pour avoir la valeur  $X$  de  $x$  au point de chute dans la trajectoire sous l'angle de  $45^\circ$ , il faut, dans cette expression, faire  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  et prendre l'intégrale depuis  $P = 0$  jusqu'à  $P = \frac{1}{2}(1 - \tan \omega)$ .

Si, quand  $\alpha$  augmente, l'intégrale qui donne cette valeur de  $x$ , prise entre 0 et  $\frac{1}{2}(1 - \tan \omega)$ , diminue, comme la valeur  $\xi = \int_0^{P_0} P dx$ , prise entre les mêmes limites, reste la même, on pourra en conclure que, pour une même valeur de  $x$ ,  $\xi$  augmente avec  $\alpha$  et que, par suite, l'angle de portée maximum est plus petit que  $45^\circ$ . La conclusion serait inverse si  $\frac{\partial X}{\partial \alpha}$  était positif. On a, pour la variation de  $X$ ,

$$\frac{\partial X}{\partial \alpha} = \frac{2b_2 V_0^2}{g^2} \int_0^{\frac{1}{2}(1 - \tan \omega)} \frac{- \left( P \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} + P^2 \frac{\sin \alpha}{\cos^4 \alpha} - P^2 \frac{1 + \sin^2 \alpha}{\cos^4 \alpha} \right) dP}{\left[ 1 + \frac{3b_2 V_0^2}{g} \left( \frac{P}{\cos \alpha} + \frac{P^2}{3 \cos^2 \alpha} - \frac{P^2 \tan \alpha}{\cos \alpha} \right) \right]^{\frac{1}{2}}},$$

expression qui, pour  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ , devient

$$\frac{\partial X}{\partial \alpha} = 4 \sqrt{2} \frac{b_2 V_0^2}{g^2} \int_0^{\frac{1}{2}(1 - \tan \omega)} \frac{- \left( P^2 - \frac{3}{2} P^2 + \frac{P}{2} \right) dP}{\left[ 1 + 2 \sqrt{2} \frac{b_2 V_0^2}{g} \left( P^2 - \frac{3}{2} P^2 + \frac{3}{2} P \right) \right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Le dénominateur de la fraction sous le signe  $\int$  est constamment positif et croît en même temps que  $P$ . Le numérateur est négatif entre  $P = 0$  et  $P = \frac{1}{2}$ , positif entre  $P = \frac{1}{2}$  et  $P = 1$ , négatif pour  $P > 1$ ; comme  $\frac{1}{2}(1 - \tan \omega)$  est plus grand que 1, on a

$$\frac{\partial X}{\partial \alpha} < 4 \sqrt{2} \frac{b_2 V_0^2}{g^2} \int_0^1 \frac{- \left( P^2 - \frac{3}{2} P^2 + \frac{P}{2} \right) dP}{\left[ 1 + 2 \sqrt{2} \frac{b_2 V_0^2}{g} \left( P^2 - \frac{3}{2} P^2 + \frac{3}{2} P \right) \right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Soit  $N$  la valeur du dénominateur pour  $P = \frac{1}{2}$ . Si, dans l'expression précédente, on remplace le dénominateur par  $N$ , on augmente cette expression, puisqu'on aura diminué la portion négative de l'intégrale et augmenté sa portion positive. Donc :

$$\frac{\partial X}{\partial z} < 4\sqrt{2} \frac{b_3 V_0^3}{g^2} \int_0^1 \frac{\left(P^3 - \frac{3}{2}P^2 + \frac{1}{2}P\right) dP}{N}$$

ou

$$\frac{\partial X}{\partial z} < 0.$$

Dans le cas de  $n = 3$ , l'angle de portée maximum est toujours plus petit que  $\frac{\pi}{4}$ .

6° Cas de  $n = 5$ . — On trouve

$$\frac{\partial X}{\partial z} = 8\sqrt{2} \frac{b_5 V_0^5}{g^2} \int_0^{\frac{1}{2}(1-\tan\omega)} \frac{-\left(P^5 - \frac{5}{2}P^4 + \frac{5}{3}P^3 - \frac{3}{2}P^2 + \frac{1}{4}P\right) dP}{\left[1 + 4\sqrt{2} \frac{b_5 V_0^3}{g^2} \left(P^3 - \frac{5}{2}P^2 + \frac{10}{3}P^3 - \frac{5}{2}P^2 + \frac{5}{4}P\right)\right]^{\frac{7}{8}}}.$$

Le dénominateur de la quantité sous le signe  $\int$  est toujours positif. Le numérateur commence par être négatif, change de signe entre  $P = 0$  et  $P = 1$ , puis redevient négatif pour une valeur  $P_1$  de  $P$ , plus grande que 1. Supposons que le coefficient  $b_5$  soit assez petit pour que  $\frac{1}{2}(1 - \tan\omega)$  soit plus petit que  $P_1$  (on sait que quand  $b_5$  tend vers zéro,  $\tan\omega$  tend vers  $-1$ ). Dans ce cas, on aura

$$\frac{\partial X}{\partial z} > 8\sqrt{2} \frac{b_5 V_0^5}{g^2} \int_0^1 \frac{-\left(P^5 - \frac{5}{2}P^4 + \frac{8}{3}P^3 - \frac{3}{2}P^2 + \frac{1}{4}P\right) dP}{\left[1 + 5\sqrt{2} \frac{b_5 V_0^3}{g^2} \left(P^3 - \frac{5}{2}P^2 + \frac{10}{3}P^3 - \frac{5}{2}P^2 + \frac{5}{4}P\right)\right]^{\frac{7}{8}}};$$

mais

$$\int_0^1 -\left(P^5 - \frac{5}{2}P^4 + \frac{8}{3}P^3 - \frac{3}{2}P^2 + \frac{1}{4}P\right) dP = \frac{1}{24}.$$

L'intégrale définie qui figure dans l'expression  $\frac{\partial X}{\partial z}$  est donc positive pour  $b_5 = 0$ , et, par conséquent, sera encore positive pour les petites valeurs de  $b_5$ .

Donc, dans le cas de  $cF(r) = b_5 v^3$ , pour les petites valeurs de  $b_5$ ,

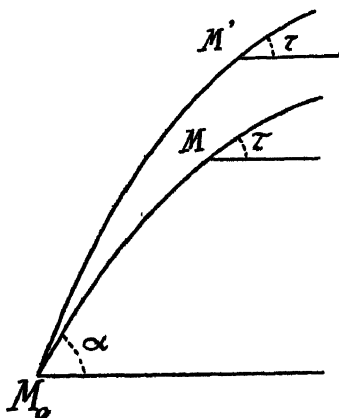
$\frac{\partial X}{\partial \alpha}$  sera positif et, par suite, l'angle de plus grande portée est supérieur à  $45^\circ$ . On voit aisément comment on peut appliquer le même mode de raisonnement aux valeurs de  $n$  supérieures à 5.

#### IV. — PERTURBATIONS ET COEFFICIENTS DIFFÉRENTIELS.

**226. Formule fondamentale des perturbations.** — Le lieutenant Haag et M. K. de Férié ont, chacun de leur côté, donné des formules qui permettent, dans le cas d'une trajectoire quelconque, de résoudre le problème suivant :

Soit  $M_0M$  un arc de trajectoire dont les caractéristiques initiales sont  $(\alpha, u_0, c)$  et qui est défini par la valeur de  $\tau$ , inclinaison de la tangente au point  $M$ , point dont les autres éléments sont  $(u, x, y, t)$ . On donne une altération  $(\partial x, \partial u_0, \partial c)$  aux caractéristiques initiales du

Fig. 226.



point  $M_0$ , et une altération  $\partial g$  à la gravité  $g$ . Quelles seront les perturbations  $(\partial u, \partial x, \partial y, \partial t)$  subies par les éléments du point  $M$ , l'inclinaison  $\tau$  restant constante?

1° Prenons l'équation différentielle de l'hodographe

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{c}{g} v F(v),$$

que nous écrirons

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{c}{g} \frac{u}{\cos \tau} F\left(\frac{u}{\cos \tau}\right) = \frac{c}{g} \Psi(u, \tau).$$



Soit l'accroissement  $\partial u$  de  $u$ ; on aura

$$\frac{d(u + \partial u)}{d\tau} = \frac{c + \partial c}{g + \partial g} \Psi(u + \partial u, \tau)$$

ou

$$\frac{du}{d\tau} + \frac{d(\partial u)}{d\tau} = \frac{c}{g} \left( 1 + \frac{\partial c}{c} - \frac{\partial g}{g} \right) \left( \Psi + \frac{d\Psi}{du} \partial u \right).$$

En tenant compte de l'équation de l'hodographe et en divisant par  $\frac{c}{g} \Psi$ , on aura

$$\frac{d(\partial u)}{du} = \frac{\partial c}{c} - \frac{\partial g}{g} + \frac{1}{\Psi} \left( \frac{d\Psi}{du} \right) \partial u;$$

mais

$$\frac{d\Psi}{du} = \frac{d\Psi}{dv} \frac{dv}{du} = (v F' + F) \frac{1}{\cos \tau}.$$

Donc

$$\frac{1}{\Psi} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial u} \right) = \frac{v F' + F}{F} \frac{1}{u} = (n + 1) \frac{1}{u},$$

en introduisant le degré  $n = \frac{v F'}{F}$  de la résistance. On a donc

$$\frac{d(\partial u)}{du} - (n + 1) \frac{\partial u}{u} - \frac{\partial c}{c} + \frac{\partial g}{g} = 0.$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre, qu'il est aisé d'intégrer. On a, en effet,

$$(1) \quad \partial u = - e^{\int_{u_0}^u (n+1) \frac{du}{u}} \left[ A - \left( \frac{\partial c}{c} - \frac{\partial g}{g} \right) \int_{u_0}^u e^{-\int_{u_0}^u (n+1) \frac{du}{u}} du \right],$$

où  $A$  est une constante qu'on déterminera ainsi qu'il suit : au point  $M_0(V_0, \alpha)$  correspond le point  $M'_0$  de la trajectoire  $(V_0 + \partial V_0, \alpha + \partial \alpha)$  où l'inclinaison est  $\alpha$ , puisque la formule (1) est établie à  $\tau$  constant. D'après l'équation de l'hodographe  $\frac{du}{d\tau} = \frac{cvF(v)}{g}$ , pour passer de  $M'_0$  à  $M_0$ , on a  $\partial u_0 = \frac{cV_0F_0}{g} \partial \alpha$ . D'autre part, en  $M_0$ , pour passer de l'une à l'autre trajectoire, on a un  $\partial u_0$  égal à

$$\cos \alpha \partial V_0 - V_0 \sin \alpha \partial \alpha.$$

Donc, au total, la variation de  $u_0$  en  $M_0$  sera égale à

$$- V_0 \left( \sin \alpha + \frac{cF_0}{g} \right) \partial \alpha + \cos \alpha \partial V_0.$$

On aura, par suite,

$$A = - \cos \alpha \partial V_0 + V_0 \left( \sin \alpha + \frac{cF_0}{g} \right) \partial \alpha.$$

2° Lorsque le degré  $n$  est une constante, on a

$$e^{(n+1) \int_{u_0}^u \frac{du}{u}} = \left( \frac{u}{u_0} \right)^{n+1}.$$

Donc, il viendra la formule

$$\partial u = \left( \frac{u}{u_0} \right)^{n+1} \left[ \cos \alpha \partial V_0 - V_0 \left( \sin \alpha + \frac{b_n V_0^n}{g} \right) \partial \alpha \right. \\ \left. - \frac{u}{n} \left( \frac{\partial c}{c} - \frac{\partial g}{g} \right) \left[ 1 - \left( \frac{u}{u_0} \right)^n \right] \right].$$

227. Autres éléments de l'arc. — On a, pour les différents éléments de l'arc,

$$gt = - \int_{\alpha}^{\tau} u \frac{d\tau}{\cos^2 \tau}, \quad gx = - \int_{\alpha}^{\tau} u^2 \frac{d\tau}{\cos^2 \tau}, \quad gy = - \int_{\alpha}^{\tau} u^2 \tan \tau \frac{d\tau}{\cos^2 \tau}.$$

On aura donc

$$gt \cdot \left( \frac{\partial g}{g} + \frac{\partial t}{t} \right) = V_0 \frac{\partial \alpha}{\cos \alpha} - \int_{\alpha}^{\tau} (\partial u) \frac{\cos^2 \tau}{d\tau}, \\ gx \left( \frac{\partial g}{g} + \frac{\partial x}{x} \right) = V_0^2 \partial \alpha - 2 \int_{\alpha}^{\tau} u (\partial u) \frac{d\tau}{\cos^2 \tau}, \\ gy \left( \frac{\partial g}{g} + \frac{\partial y}{y} \right) = V_0^2 \tan \alpha \partial \alpha - 2 \int_{\alpha}^{\tau} u (\partial u) \tan \tau \frac{d\tau}{\cos^2 \tau}.$$

Ce sont les formules qui résolvent le problème posé, moyennant les intégrations effectuées, quand on aura remplacé  $(\partial u)$  par sa valeur (1).

Vérifier que, dans le cas du vide, on retrouve les formules du n° 71.

*Point de chute.* — Cherchons directement les expressions des coefficients différentiels correspondants à  $(\partial \alpha, \partial u_0, \partial c)$  pour le point de chute, défini par les deux équations

$$X = - \int_{\alpha}^{\omega} \frac{u^2}{g} d \tan \tau, \quad 0 = \int_{\alpha}^{\omega} \frac{u^2}{g} \tan \tau d \tan \tau.$$

Différentions, on aura

$$\partial X = - \frac{u_0^2}{g} \frac{\partial \omega}{\cos^2 \omega} + \frac{V_0^2}{g} \partial \alpha - \frac{2}{g} \int_{\alpha}^{\omega} u (\partial u) d \tan \tau, \\ 0 = - \frac{u_0^2}{g} \tan \omega \frac{\partial \omega}{\cos^2 \omega} + \frac{V_0^2}{g} \tan \alpha \partial \alpha - 2 \int_{\alpha}^{\omega} u (\partial u) \tan \tau d \tan \tau.$$

Multiplions la première équation par  $\tan \omega$  et retranchons de manière éliminer  $\partial \omega$ , on aura

$$\partial X = \frac{V_0^2}{g} \left( 1 - \frac{\tan \alpha}{\tan \omega} \right) \partial x - \frac{2}{g} \int_{\alpha}^{\omega} u (\partial u) \left( 1 - \frac{\tan \tau}{\tan \omega} \right) d \tan \tau.$$

On trouve, par le même procédé,

$$\partial T = \frac{V_0}{g} \left( 1 - \frac{u_0}{u_{\omega}} \frac{\tan \alpha}{\tan \omega} \right) \frac{\partial x}{\cos \alpha} - \frac{1}{g} \int_{\alpha}^{\omega} (\partial u) \left( 1 - 2 \frac{u \tan \tau}{u_{\omega} \tan \omega} \right) d \tan \tau.$$

On a en plus  $\partial \omega$ , par la formule

$$\partial \omega = \frac{V_0^2}{V_{\omega}^2} \frac{\tan \alpha}{\tan \omega} \partial x - \frac{2g}{V_{\omega}^2} \int_{\alpha}^{\omega} u (\partial u) \tan \tau d \tan \tau.$$

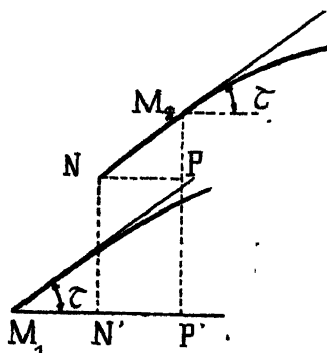
Enfin  $\partial u_{\omega}$  sera obtenu ainsi qu'il suit. À la valeur  $\partial u_{\omega}$  donnée par la formule (1) et qui correspond à  $\tau = \text{const.}$ , il faudra ajouter la valeur  $(\partial u_{\omega})_1$ , correspondant à  $\partial \omega$  donnée ci-dessus et qui est

$$(\partial u_{\omega})_1 = \frac{c}{g} V_{\omega} F_{\omega} \partial \omega.$$

On a donc ainsi l'altération de tous les éléments du point de chute. Vérifier ces formules dans le cas du vide.

**228. Relations entre les perturbations à arguments divers.** — On a établi les formules précédentes à  $\tau$  constant. Comment peut-on trouver

Fig. 227.



les autres systèmes de perturbations, par exemple à  $(t, x, y, u \dots)$  constant?

Soient les deux points correspondants  $M_1$  et  $M_2$  (même  $\tau$ ) sur les deux

trajectoires (1) et (2). Soit  $N$  le point de même  $t$  sur (2) que  $M_1$  sur (1).

On aura

$$\partial x_t = M_1 N', \quad \partial x_\tau = M_1 P'.$$

Donc

$$\partial x_t = \partial x_\tau - NP.$$

Or, sur la trajectoire (2), le point  $M_2$  correspond à un accroissement  $\partial t_\tau$  (à  $\tau$  constant). Par suite,

$$NP = u \partial t_\tau = \left( \frac{dx}{dt} \right) \partial t_\tau.$$

On a donc

$$\partial x_t = \partial x_\tau - \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \partial t_\tau.$$

C'est la formule cherchée.

D'une façon générale, soit un élément  $e$  considéré dans ses perturbations par rapport à deux arguments  $a$  et  $b$ . On a (71, 5°)

$$\partial e_a = \partial e_b - \left( \frac{de}{da} \right) \partial a_b.$$

Les principaux cas où se rencontre  $\frac{de}{da}$  sont indiqués au Tableau du n° 157, 4° :

$$\text{Si } b = e, \quad \text{on a} \quad \partial e_a = - \left( \frac{de}{da} \right) \partial a_e.$$

Ainsi,  $\partial x_t = -u \partial t_x$ .

Comme autre exemple, à  $y$  constant, on a

$$\partial x_y = \partial x_\tau - \cot \tau \partial y_\tau.$$

**229. Coefficients différentiels.** — Soit un élément  $e$  quelconque. On a d'une façon générale, relativement à un argument définissant la fin de l'arc, qui sera ici  $\tau$  :

$$\partial e_\tau = \left( \frac{\partial e}{\partial x} \right)_\tau \partial x + \left( \frac{\partial e}{\partial V_e} \right)_\tau \partial V_0 + \left( \frac{\partial e}{\partial c} \right)_\tau \partial c + \left( \frac{\partial e}{\partial g} \right)_\tau \partial g.$$

Les facteurs  $\left( \frac{\partial e}{\partial x} \right)_\tau$ ,  $\left( \frac{\partial e}{\partial V_0} \right)_\tau$ , etc. sont dits les *coefficients différentiels* de  $e$ , à  $\tau$  constant.

Ces quatre coefficients différentiels ne sont pas indépendants. Il existe entre eux certaines relations que nous allons faire connaître.

**Premier théorème.** — Soit une variation  $\partial x$  et  $\partial V_0$ . La constante  $A$  de l'équation (1) (226) sera nulle si

$$\partial V_0' = V_0 \left( \sin \alpha + \frac{c F_0}{g} \right) \frac{\partial x}{\cos \alpha}.$$

Dans cette hypothèse, les deux trajectoires  $(\alpha, V_0)$  et  $(\alpha + \partial\alpha, V_0 + \partial V_0)$  n'en font qu'une, l'origine seule étant déplacée. On aura donc  $(\partial u) = 0$ , et les formules du n° 227 deviendront

$$\partial t = -\frac{V_0}{g} \frac{\partial z}{\cos \alpha}, \quad \partial x = -\frac{V_0^2}{g} \partial \alpha, \quad \partial y = -\frac{V_0^2}{g} \tan \alpha \partial \alpha, \quad \partial v = 0.$$

D'autre part, l'équation

$$\partial e_\tau = \left( \frac{\partial e}{\partial \alpha} \right)_\tau \partial \alpha + \left( \frac{\partial e}{\partial V_0} \right)_\tau \partial V_0,$$

à cause de la relation entre  $\partial V_0$  et  $\partial \alpha$  devient

$$\partial e_\tau = \left[ \left( \frac{\partial e}{\partial \alpha} \right)_\tau + \left( \frac{\partial e}{\partial V_0} \right)_\tau \frac{V_0}{\cos \alpha} \left( \sin \alpha + \frac{c F_0}{g} \right) \right] \partial \alpha.$$

En identifiant avec les valeurs  $(\partial t, \partial x, \partial y, \partial v)$ , on a

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial t}{\partial \alpha} \right)_\tau + \frac{V_0}{\cos \alpha} \left( \sin \alpha + \frac{c F_0}{g} \right) \left( \frac{\partial t}{\partial V_0} \right)_\tau + \frac{V_0}{g \cos \alpha} &= 0, \\ \left( \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)_\tau + \frac{V_0}{\cos \alpha} \left( \sin \alpha + \frac{c F_0}{g} \right) \left( \frac{\partial x}{\partial V_0} \right)_\tau + \frac{V_0^2}{g} &= 0, \\ \left( \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)_\tau + \frac{V_0}{\cos \alpha} \left( \sin \alpha + \frac{c F_0}{g} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial V_0} \right)_\tau + \frac{V_0^2}{g} \tan \alpha &= 0, \\ \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right)_\tau + \frac{V_0}{\cos \alpha} \left( \sin \alpha + \frac{c F_0}{g} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial V_0} \right)_\tau &= 0. \end{aligned}$$

*Remarque.* — Les coefficients différentiels d'un élément  $e$  considéré par rapport à deux arguments  $\alpha$  et  $b$  sont liés par la même formule que les perturbations (224). Ainsi, par exemple, on a

$$\left( \frac{\partial e}{\partial \alpha} \right)_\alpha = \left( \frac{\partial e}{\partial \alpha} \right)_b - \left( \frac{\partial e}{\partial a} \right) \left( \frac{\partial a}{\partial \alpha} \right)_\alpha,$$

Au point de chute ( $y = 0, \partial y = 0$ ), démontrer qu'on aura

$$\begin{aligned} \frac{g \cot \alpha}{V_0^2} \left( \frac{\partial T}{\partial \alpha} \right) + \frac{g \sin \alpha + c F_0}{V_0 \sin \alpha} \left( \frac{\partial T}{\partial V_0} \right) + \frac{1}{V_0 \sin \omega} - \frac{1}{V_0 \sin \alpha} &= 0, \\ \frac{g}{V_0^2} \left( \frac{\partial X}{\partial \alpha} \right) + \frac{g \sin \alpha + c F_0}{V_0 \cos \alpha} \left( \frac{\partial X}{\partial V_0} \right) + \frac{\tan \alpha}{\tan \omega} - 1 &= 0, \\ \frac{g \cot \alpha}{V_0} \left( \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \right) + \frac{g \sin \alpha + c F_0}{V_0 \sin \alpha} \left( \frac{\partial \omega}{\partial V_0} \right) + \frac{g \cot \omega}{V_0^2} &= 0, \\ \frac{g \cot \alpha}{V_0^2} \left( \frac{\partial V_\omega}{\partial \alpha} \right) + \frac{g \sin \alpha + c F_0}{V_0 \sin \alpha} \left( \frac{\partial V_\omega}{\partial V_0} \right) + \frac{g \sin \omega + c F_\omega}{V_0 \sin \omega} &= 0. \end{aligned}$$

*Deuxième théorème.* — Soit une variation  $dc$  et  $dg$ . On a, d'une

part,

$$\partial e = \left( \frac{\partial e}{\partial c} \right)_{\tau} \partial c + \left( \frac{\partial e}{\partial g} \right)_{\tau} \partial g.$$

D'autre part, on aura

$$\partial u = 0, \quad \text{si} \quad \frac{\partial c}{c} = \frac{\partial g}{g}.$$

On a alors

$$\frac{\partial t}{t} = \frac{\partial x}{x} = \frac{\partial y}{y} = -\frac{\partial g}{g}, \quad \partial v = 0,$$

et comme

$$\partial e = \left[ \left( \frac{\partial e}{\partial g} \right)_{\tau} + \frac{c}{g} \left( \frac{\partial e}{\partial c} \right) \right] \partial g,$$

il viendra

$$\begin{aligned} c \left( \frac{\partial t}{\partial c} \right)_{\tau} + g \left( \frac{\partial t}{\partial g} \right)_{\tau} + t &= 0, & c \left( \frac{\partial y}{\partial c} \right)_{\tau} + g \left( \frac{\partial y}{\partial g} \right)_{\tau} + y &= 0, \\ c \left( \frac{\partial x}{\partial c} \right)_{\tau} + g \left( \frac{\partial x}{\partial g} \right)_{\tau} + x &= 0, & c \left( \frac{\partial v}{\partial c} \right)_{\tau} + g \left( \frac{\partial v}{\partial g} \right)_{\tau} &= 0. \end{aligned}$$

Troisième théorème. — On a (226)

$$\partial u = (m \partial V_0 + n \partial \alpha) \Phi,$$

en posant

$$m = \cos \alpha, \quad n = -V_0(\sin \alpha + \rho_0), \quad \log \Phi = \int_{u_0}^u (n+1) \frac{du}{u}.$$

Par suite,

$$\left( \frac{\partial u}{\partial V_0} \right)_{\tau} = m \Phi, \quad \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right)_{\tau} = n \Phi.$$

D'autre part (228),

$$\partial x = \frac{V_0^2}{g} \partial \alpha - \frac{2}{g} \int_{\alpha}^{\tau} u (\partial u) \frac{d\tau}{\cos^4 \tau}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)_{\tau} &= \frac{V_0^2}{g} - \frac{2n}{g} \int_{\alpha}^{\tau} u \Phi \frac{d\tau}{\cos^3 \tau}, \\ \left( \frac{\partial x}{\partial V_0} \right)_{\tau} &= -\frac{2m}{g} \int_{\alpha}^{\tau} u \Phi \frac{d\tau}{\cos^3 \tau}. \end{aligned}$$

Formons le déterminant

$$D_{\tau} = \begin{vmatrix} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right)_{\tau} & \left( \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)_{\tau} \\ \left( \frac{\partial u}{\partial V_0} \right)_{\tau} & \left( \frac{\partial x}{\partial V_0} \right)_{\tau} \end{vmatrix}.$$

On voit immédiatement qu'on a

$$D_{\tau} = -m \frac{V_0^2}{g} \Phi = \frac{\cos \alpha}{-\cos \alpha \partial V_0 + V_0(\sin \alpha + \rho_0) \partial \alpha} \frac{V_0^2}{g} \partial u.$$

ou encore

$$D_{\tau} = \frac{u_0}{g(\sin \alpha + \rho_0)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{\tau} = - \frac{V_0^2}{g} \left( \frac{\partial u}{\partial V_0} \right)_{\tau};$$

ce qu'on peut écrire

$$0 = \begin{vmatrix} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{\tau} & \left[ 2 \left( \frac{\partial x}{\partial x} \right)_{\tau} + \frac{V_0^2}{g} \right] \\ \left( \frac{\partial u}{\partial V_0} \right)_{\tau} & \left[ 2 \left( \frac{\partial x}{\partial V_0} \right)_{\tau} - \frac{u_0}{g(\sin \alpha + \rho_0)} \right] \end{vmatrix}.$$

On a des déterminants analogues relativement à  $t$ ,  $y$  et  $s$ , de sorte qu'on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{\tau}}{\left( \frac{\partial u}{\partial V_0} \right)_{\tau}} &= \frac{2 \left( \frac{\partial x}{\partial x} \right)_{\tau} + \frac{V_0^2}{g}}{2 \left( \frac{\partial x}{\partial V_0} \right)_{\tau} - \frac{u_0}{g(\sin \alpha + \rho_0)}} \\ &= \frac{2 \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_{\tau} + \frac{V_0^2}{g} \tan \alpha}{2 \left( \frac{\partial y}{\partial V_0} \right)_{\tau} - \frac{u_0 \tan \alpha}{g(\sin \alpha + \rho_0)}} = \frac{2 \left( \frac{\partial t}{\partial x} \right)_{\tau} + \frac{V_0}{g \cos \alpha}}{2 \left( \frac{\partial t}{\partial V_0} \right)_{\tau} - \frac{1}{g(\sin \alpha + \rho_0)}}. \end{aligned}$$

Enfin, si au lieu de considérer les coefficients différentiels à  $\tau$  constant, on calcule les coefficients différentiels relativement à un autre élément, on obtient des formules analogues aux suivantes :

$$D_{\tau} = \frac{v}{g \cos \tau} D_t = \frac{v^2}{g} D_x = \frac{v^2 \tan \tau}{g} D_y,$$

où  $D_{\tau}$  est le déterminant considéré précédemment et où  $D_{t,x,y}$  a l'expression

$$D_e = \begin{vmatrix} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_e & \left( \frac{\partial \tau}{\partial x} \right)_e \\ \left( \frac{\partial u}{\partial V_0} \right)_e & \left( \frac{\partial \tau}{\partial V_0} \right)_e \end{vmatrix}.$$

*Remarques.* — Toutes ces formules, qui sont souvent appelées *formules de raccord*, servent, dans les calculs balistiques, à vérifier l'exactitude finale des calculs des coefficients différentiels faits par d'autres méthodes, souvent par approximation et par arcs successifs. Ces trois théorèmes constituent des cas particuliers de théorèmes plus généraux dus à MM. Haag, Darieus, Valiron, Maurice Garnier.

**230. Théorèmes de M. René Garnier.** — 1° Les coordonnées  $x$ ,  $y$ , d'un point appartenant à une trajectoire de la famille  $V_0 = \text{const.}$ , peuvent être exprimées à l'aide de deux variables indépendantes, l'angle de

projection  $\alpha$  et le temps  $t$ . On a, en particulier, pour  $v(t, \alpha)$  et  $\tau(t, \alpha)$ , des relations telles que  $v(0, \alpha) = V_0$  et  $\tau(0, \alpha) = \alpha$ .

Considérons les équations aux variations du système différentiel de l'hodographe, on écrit :

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -g \sin \tau - c F(v), \\ v \frac{d\tau}{dt} = -g \cos \tau. \end{cases}$$

On trouve aisément

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) &= -c F'(v) \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{g \cos \tau}{v} \frac{\partial \tau}{\partial \alpha}, \\ \frac{d}{dt} \left( v \frac{\partial \tau}{\partial \alpha} \right) &= \frac{g \cos \tau}{v} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{c F(v)}{v} v \frac{\partial \tau}{\partial \alpha}. \end{aligned}$$

Posons

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = r \cos \theta, \quad v \frac{\partial \tau}{\partial \alpha} = r \sin \theta,$$

les relations précédentes deviennent

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{dr}{dt} = -c \left[ F'(v) \cos^2 \theta + \frac{F(v)}{v} \sin^2 \theta \right], \\ \frac{d(\theta + \tau)}{dt} = -c \left[ \frac{F(v)}{v} - F'(v) \right] \sin \theta \cos \theta. \end{cases}$$

Pour  $t = 0$ , on a

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{et} \quad v \frac{\partial \tau}{\partial \alpha} = V_0.$$

Par suite, d'après les définitions de  $r$  et de  $\theta$ ,

$$r(0, \alpha) = V_0, \quad \theta(0, \alpha) = \frac{\pi}{2}.$$

2<sup>e</sup> *Interprétation géométrique.* — Si, dans les relations  $v = v(t, \alpha)$  et  $\tau = \tau(t, \alpha)$ , on donne à  $\alpha$  une valeur constante, les courbes obtenues en faisant varier  $t$  sont, par définition, les *hodographes* des différentes trajectoires de la famille  $V_0 = \text{const.}$

Au contraire, donnons à  $t$  une valeur fixe  $t_0$  et faisons varier  $\alpha$ ; les courbes ainsi obtenues

$$v = v(t_0, \alpha) \quad \text{et} \quad \tau = \tau(t_0, \alpha)$$

seront les *isochrones* du réseau. En tout point du plan  $(v, \tau)$  passent donc un *hodographe* et un *isochrone*.



Si l'on suppose qu'un mobile fictif se déplace sur un *isochrone*, dans un temps mesuré par le nombre  $\alpha$ , les composantes de sa vitesse fictive suivant le rayon vecteur et suivant sa normale seront  $\frac{\partial v}{\partial \alpha}$  et  $v \frac{\partial \tau}{\partial \alpha}$ . Donc, le nombre  $r$  est la mesure de cette vitesse fictive et l'angle de cette vitesse  $r$  avec la direction positive du rayon vecteur aura pour valeur l'angle  $\theta$ .

Enfin, on démontrera aisément que l'on a

$$\frac{r}{\rho} = \frac{d(\theta + \tau)}{d\alpha},$$

$\rho$  étant le rayon de courbure de l'*isochrone*.

Les trajectoires tirées à  $\tau = \pm \frac{\pi}{2} + \varepsilon$  et à  $\tau = \pm \frac{\pi}{2} - \varepsilon$  étant symétriques, la courbe des *isochrones* ne contiendra que des termes en  $\varepsilon$ , et, par suite, elle aura des tangentes horizontales pour  $\tau = \pm \frac{\pi}{2}$ . On a donc

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}} \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Cherchons maintenant la limite de  $r$  quand  $\alpha$  (ou  $\tau$ ) deviennent égaux à  $\pm \frac{\pi}{2}$  (tir vertical).

On a alors

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{dt} = -c \frac{F(v)}{v},$$

d'où

$$r = V_0 e^{-c \int_0^t \frac{F(v)}{v} dt}.$$

Soit  $cF(v) = b_n v^n$ , on a

$$t = - \int_{V_0}^v \frac{dv}{cF(v) + g}$$

pour le tir vertical ascendant. On trouve alors

$$r^n = V_0^n \frac{b_n v^n + g}{b_n V_0^n + g}.$$

Dans le cas du *vide*,  $c=0$ , ou d'une résistance linéaire  $cF(v)=b_1 v$ , on a

$$\frac{d(\theta + \tau)}{dt} = 0.$$

Donc,  $\theta + \tau$  ne dépend pas de  $t$  et l'on a

$$\theta + \tau = \frac{\pi}{2} + \alpha.$$

On en déduit

$$\frac{\partial(\theta + \tau)}{\partial x} = 1.$$

Donc

$$\begin{aligned} \rho = r &= V_0 e^{-b_1 t} && \text{dans le cas d'une loi linéaire,} \\ \rho = r &= V_0 && \text{dans le vide.} \end{aligned}$$

*Les isochrones sont donc, dans ces deux cas, deux circonférences.*

3° *Point de contact d'une trajectoire et de la courbe de sécurité.* — Avec les coordonnées  $x(t, \alpha)$  et  $y(t, \alpha)$  en fonction des paramètres  $\alpha$  et  $t$ , pour le réseau de la famille  $V_0 = \text{const.}$ , on écrira immédiatement, pour l'équation de la courbe de sécurité,

$$(1) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} \end{vmatrix} = 0$$

ou, avec les notations  $r$  et  $\theta$ , en remarquant que

$$x = \int_0^t v \cos \tau \, dt,$$

d'où

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \int_0^t \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha} \cos \tau - v \sin \tau \frac{\partial \tau}{\partial \alpha} \right) dt,$$

il viendra

$$(2) \quad \begin{vmatrix} v \cos \tau \int_0^t r \cos(\theta + \tau) \, dt \\ v \sin \tau \int_0^t r \sin(\theta + \tau) \, dt \end{vmatrix} = 0.$$

Soit  $t_1(\alpha)$  l'époque à laquelle le projectile lancé sous l'angle  $\alpha$  touche la courbe de sécurité. L'équation (2) pourra s'écrire

$$(3) \quad \int_0^{t_1} r(t, \alpha) \sin[\theta(t, \alpha) + \tau(t, \alpha) - \tau(t_1, \alpha)] \, dt = 0.$$

C'est l'équation de la courbe de sécurité avec  $\alpha$  et  $t_1$ , comme coordonnées.

Pour  $c = 0$  (vide), on a

$$r = V_0 \quad \text{et} \quad \theta + \tau = \frac{\pi}{2} + \alpha.$$

Donc (3) devient

$$V_0 t_1 \sin \left[ \frac{\pi}{2} + \alpha - \tau(t_1, \alpha) \right] = 0.$$

Le sinus doit être nul; donc

$$\frac{\pi}{2} + \alpha - \tau(t_1, \alpha) = \pi$$

ou

$$\tau(t_1, \alpha) = -\frac{\pi}{2} + \alpha.$$

C'est un résultat connu.

Il subsiste en toute rigueur dans le cas d'une résistance linéaire.

---

# LIVRE IV.

## LE PROBLÈME BALISTIQUE ET L'ANALYSE.

---

### CHAPITRE I.

#### DE L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DE LA BALISTIQUE.

---

##### I. — FORME NORMALE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DE LA BALISTIQUE.

231. **Problème à résoudre.** — Sous la forme qu'affectent les équations différentielles établies au n° 137, l'hodographe seul est fonction de deux variables  $v$  et  $\tau$ . Mais, cette dernière variable étant engagée sous les symboles  $d\tau$  et  $\cos\tau$ , on ne se rend pas compte immédiatement à quel type classique, défini et étudié en Analyse, appartient l'équation différentielle de l'hodographe. Nous nous proposons tout d'abord de la mettre sous la forme dite *normale*.

D'autre part, il est possible de ramener toutes les autres équations différentielles à une forme telle qu'elles ne contiennent plus, comme variable, que l'élément considéré et la variable  $v$ , qui, entrant dans la fonction arbitraire  $F(v)$ , doit être tenue pour la variable imposée.

On rendra ainsi la solution de toutes ces équations indépendante de celle des autres et, d'autre part, l'Analyse apprendra à quelles difficultés on se heurte pour obtenir la solution de chacune.

Le problème de la réduction des équations de la Balistique à la forme normale a été traité dans des cas isolés par différents savants : le colonel Jacob, MM. Appell, Ouivet, etc. Nous avons résumé et généralisé ici leurs recherches.

232. **Principe de la réduction.** — Proposons-nous de former l'équation différentielle entre une variable quelconque  $(t, x, y, \tau, s, u, v, \dots)$  et la variable indépendante  $v$ .

De l'équation de l'hodographe développée, on tire

$$\frac{d\tau}{dv} = \frac{g \cos \tau}{v(cF + g \sin \tau)}$$

ou, avec la notation  $\rho = \frac{cF}{g}$ ,

$$\frac{d\tau}{dv} = \frac{\cos \tau}{v(\rho + \sin \tau)}.$$

En portant cette expression dans les équations du mouvement, on aura

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dv} &= -\frac{1}{g} \frac{1}{\rho + \sin \tau}, & \frac{dy}{dv} &= -\frac{v \sin \tau}{g} \frac{1}{\rho + \sin \tau}, \\ \frac{dx}{dv} &= -\frac{v \cos \tau}{g} \frac{1}{\rho + \sin \tau}, & \frac{ds}{dv} &= -\frac{v}{g} \frac{1}{\rho + \sin \tau}. \end{aligned}$$

On pourra encore écrire, avec les variables  $u$  et  $w$ , les deux équations

$$\frac{du}{dv} = \frac{\rho \cos \tau}{\rho + \sin \tau}, \quad \frac{dw}{dv} = \frac{\rho \sin \tau + 1}{\rho + \sin \tau}.$$

Soit  $z$  une quelconque des variables, autre que  $v$ ; la dérivée  $\frac{dz}{dv}$  ne renferme que  $v$ ,  $\rho$ ,  $\sin \tau$  et  $\cos \tau$ . Donc  $\frac{d^2 z}{dv^2}$  ne renfermera que  $v$ ,  $\rho$ ,  $\rho'$ ,  $\sin \tau$ ,  $\cos \tau$  et  $\frac{dz}{dv}$ . Mais ce dernier rapport est exprimé en fonction de  $v$ ,  $\rho$ ,  $\cos \tau$  et  $\sin \tau$ . On pourra donc éliminer  $\cos \tau$  et  $\sin \tau$  entre

$$\frac{d^2 z}{dv^2}, \quad \frac{dz}{dv} \quad \text{et} \quad \sin^2 \tau + \cos^2 \tau = 1.$$

On obtiendra ainsi l'équation différentielle du second ordre cherchée, qui ne renfermera que  $\frac{d^2 z}{dv^2}$ ,  $\frac{dz}{dv}$ ,  $v$ ,  $\rho$  et  $\rho'$  et, qui, puisqu'elle ne contient pas  $z$ , se réduira au premier ordre en prenant pour inconnue  $\frac{dz}{dv}$ . Cette équation pourra être d'ailleurs plus ou moins compliquée suivant les difficultés de l'élimination.

*A priori*, on voit que ces équations se divisent en deux groupes : le premier, le plus simple, comprend  $dt$ ,  $dy$ ,  $ds$  et  $dw$ , parce que l'expression des dérivées premières ne contient que la fonction  $\sin \tau$ . Le second groupe, qui comprend  $dx$  et  $du$ , sera beaucoup plus compliqué parce que les dérivées contiennent à la fois  $\sin \tau$  et  $\cos \tau$ .

On remarquera que l'équation, qui donne  $\frac{dw}{dv}$  en fonction de  $v$ , est immédiatement écrite. On a, en effet,

$$\frac{dw}{dv} = \frac{\rho \sin \tau + 1}{\rho + \sin \tau},$$

d'où, en multipliant haut et bas par  $v$  le second membre,

$$\frac{dw}{dv} = \frac{\rho w + v}{\rho v + w} \quad (\text{M. Ouivet}) \quad (194).$$

**233. Réduction de l'hodographe.** — 1° Ramenons tout d'abord l'hodographe à la forme normale. On prendra pour variable

$$z = \sin \tau + \rho$$

et l'on a, pour l'équation différentielle de l'hodographe,

$$\frac{dz}{dv} = \frac{\cos \tau}{v}.$$

Posant  $z' = \frac{dz}{dv}$ , on aura

$$z' = \frac{d\tau}{dv} \cos \tau + \rho'$$

on, avec la valeur de  $\frac{d\tau}{dv}$

$$z'v = \frac{\cos^2 \tau}{v} + \rho'z;$$

mais, d'après l'expression de  $z$ , on a

$$\cos^2 \tau = 1 - (z - \rho)^2.$$

Portant cette valeur dans le second membre de  $z'v$  et ordonnant les termes, après réduction, il viendra l'équation cherchée

$$z'vz + \frac{z^2}{v} - \frac{\rho\rho' + \rho}{v}z + \frac{1}{v}(\rho^2 - 1) = 0.$$

Sous cette forme, on voit quelle est du type connu en Analyse sous le nom d'équation d'Abel.

2° Faisons  $c = 0$ ; on a

$$z'v + \frac{z^2 - 1}{v} = 0.$$

On prendra comme variable  $(z^2 - 1)$ , et l'intégration, qui est immédiate, conduira à la formule  $v \cos \tau = V_0 \cos z$ , ce qui est l'hodographe du vide.

3° Si l'on a résolu l'hodographe, c'est-à-dire si l'on connaît  $z$  en fonction de  $v$ , on obtient, comme on sait, les autres éléments par de simples quadratures.

Elles sont ici :

$$\begin{aligned} dt &= -\frac{1}{g} \frac{dv}{v}, \\ dx &= -\frac{1}{g} \sqrt{1 - (v - \rho)^2} \frac{v dv}{v}, \\ dy &= -\frac{1}{g} (v - \rho) \frac{v dv}{v}. \end{aligned}$$

4° Si au lieu de  $v$ , on prend pour variable  $s = \frac{1}{v}$ , on en déduit

$$v' = -\frac{s'v + s}{s^2 v^2}.$$

Portant les valeurs de  $v$  et de  $v'$  dans l'équation en  $v'$ , il viendra

$$(2) \quad s'v + s^2 v(1 - \rho^2) + s^2(2\rho + v\rho') = 0$$

Cette forme a été indiquée par M. Appell.

**234. Autres formes analytiques de l'hodographe. — a. Forme de M. Esclangon.** — L'équation différentielle de l'hodographe, sous sa forme ordinaire  $\frac{d(v \cos \tau)}{d\tau} = v\rho$ , peut s'écrire

$$\frac{d \sin \tau}{dv} = \frac{1 - \sin^2 \tau}{v \sin \tau + \rho v} = \frac{\rho - \sin \tau}{v} + \frac{1 - \rho^2}{v \sin \tau + \rho v};$$

ou encore

$$(1) \quad \frac{d(v \sin \tau)}{dv} - \rho = \frac{1 - \rho^2}{\sin \tau + \rho}.$$

Prenons, pour nouvelle fonction inconnue  $\zeta$ , la fonction définie par

$$\zeta = v \sin \tau - \int_0^v \rho dv,$$

d'où

$$\frac{d(v \sin \tau)}{dv} = \frac{d\zeta}{dv} + \rho.$$

L'équation (1) devient donc

$$(2) \quad \frac{d\zeta}{dv} = \frac{v(1 - \rho^2)}{\zeta + \frac{c}{g} \left( vF + \int_0^v F dv \right)},$$

Posons

$$x = vF + \int_0^v F dv, \quad \text{d'où} \quad \frac{dx}{dv} = vF' + 2F.$$

On a donc

$$\frac{d\zeta}{dx} = \frac{1}{(vF' + 2F)} \frac{v \left[ 1 - \left( \frac{cF}{g} \right)^2 \right]}{\zeta + \frac{c}{g} x}.$$

Soit, d'autre part, posé

$$Z = \zeta + \frac{c}{g} x, \quad \text{d'où} \quad \frac{d\zeta}{dx} = \frac{dZ}{dx} - \frac{c}{g}.$$

On aura ainsi

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{c}{g} + \frac{v \left[ 1 - \left( \frac{cF}{g} \right)^2 \right]}{(vF' + 2F)Z},$$

équation différentielle de la forme

$$(3) \quad \frac{dZ}{dx} = \frac{c}{g} + \frac{\varphi(x)}{Z},$$

où  $\varphi(x)$  est une fonction connue de  $v$ , donc de  $x$ ; c'est la forme normale cherchée.

On a

$$\varphi(x) = \frac{v}{vF' + 2F} - \left( \frac{c}{g} \right)^2 \frac{vF^2}{vF' + 2F}.$$

Il est à remarquer que la fonction  $x = vF + \int_0^x F dv$  est une fonction croissante, connue au même titre que  $F(v)$ , indépendante du coefficient balistique. Si l'on écrit

$$\varphi(x) = P(x) - \left( \frac{c}{g} \right)^2 Q(x),$$

il en est de même des fonctions  $P(x)$  et  $Q(x)$ , qui peuvent être dressées en tables.

*Cas particuliers.* — 1° Pour  $c = 0$ , on a  $Z = \zeta = v \sin \tau$  :

$$\varphi(x) = \frac{v}{vF' + 2F}, \quad dx = vF' + 2F.$$

Donc, l'équation (3) devient

$$\frac{d(v \sin \tau)}{dx} = \frac{\varphi(x)}{v \sin \tau};$$

d'où

$$\frac{1}{2} (v^2 \sin^2 \tau - V_0^2 \cos^2 \tau) = \int \varphi(x) dx = \int v dv = \frac{1}{2} (v^2 - V_0^2).$$

Donc  $u = \text{const.}$

2° Soit une *résistance linéaire*  $F(v) = B_1 v$  et  $cF(v) = b_1(v)$ .



On a, en posant  $\mu = \frac{b_1}{g}$  :

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{3B_1}(1 - \mu^2 v^2), & x &= \frac{3}{2}C_1 v, \\ dx &= 3B_1 v dv, \\ Z &= \zeta + \frac{3}{2}\mu v^2, & \zeta &= w - \frac{1}{2}\mu v^2.\end{aligned}$$

Donc

$$Z = w + \mu v^2.$$

On en déduit

$$dZ = dw + 2\mu v dv.$$

Donc, l'équation différentielle deviendra

$$\frac{dw + 2\mu v dv}{v dv} = 3\mu + \frac{1 - \mu^2 v^2}{w + \mu v^2}$$

ou

$$\frac{dw}{dv} = \frac{v(1 + \mu w)}{w + \mu v^2}.$$

Cette équation peut s'écrire

$$\frac{2\mu dw}{1 + \mu w} - \frac{2v dv - 2w dw}{v^2 - w^2} = 0.$$

Elle a pour intégrale  $\frac{(1 + \mu w)^2}{\mu^2(v^2 - w^2)} = Q^2$ , qui se réduit aisément à  $\tanh \tau = Q - \frac{1}{\mu u}$ , ce qui est l'intégrale de l'hodographe d'une résistance linéaire, mis sous la forme ordinaire

$$\frac{d\tau}{\cos^2 \tau} = \frac{g du}{b_1 u^2}.$$

*b. Forme du Dr Cranz.* — On écrit l'hodographe

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{v(\rho + \sin \tau)}{\cos \tau}$$

sous la forme

$$\frac{\left(\frac{dv}{v}\right)}{\left(\frac{d\tau}{\cos \tau}\right)} = \sin \tau + \rho;$$

mais

$$\frac{dv}{v} = d \log v \quad \text{et} \quad \xi_0 \tau = \int_0^\tau \frac{d\tau}{\cos \tau} = \log \tanh \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2} \right).$$

D'autre part, en posant  $\zeta = \tanh \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2} \right)$ , on a l'expression

$$\sin \tau = \frac{1 + \zeta^2}{1 - \zeta^2}; \quad \text{donc} \quad \sin \tau = \tanh h(\xi_0 \tau).$$

En prenant pour variables  $\xi_0 \tau$  et  $\log v$ , l'expression de l'hodographe est donc

$$\frac{d \log v}{d \xi_0 \tau} = \tanh(\xi_0 \tau) + \rho(\log v).$$

Dans le second membre, on a la somme de deux fonctions avec variables séparées.

*c. Forme du capitaine Plâtrier.* — Le capitaine Plâtrier est arrivé à une équation analogue à celle de M. Esclangon. Il remarque que si  $\varphi(x)$  peut être mis sous la forme  $\varphi(x) = a + bx$ , l'équation différentielle de l'hodographe prend la forme d'une équation de Lagrange

$$Z = \frac{a}{1-Z'} x + \frac{b}{1-Z'}$$

qu'on sait intégrer en posant  $Z' - 1 = q$ .

L'équation générale de l'hodographe est d'ailleurs l'équation générale d'Abel, dont on connaît une solution particulière.

$$235. \text{ Temps. — Soit } t'_v = \frac{dt}{dv} = -\frac{1}{g v}.$$

1° Si l'on prend donc comme variable  $\frac{1}{T_v} = -g t'_v$ , l'équation qui donnera  $T_v$  sera identique à l'équation qui donne  $\tau$ .

2° La forme directe de l'équation différentielle du temps s'obtiendra en partant de l'équation de M. Appell, car on a

$$s = -\frac{g t'_n}{v},$$

d'où, en différenciant,

$$s' = -g \frac{v t''_v - t'_v}{v^2}.$$

Portant ces deux valeurs dans l'équation (2) du n° 232, nous aurons l'équation cherchée, qui relie le temps et la vitesse  $v$  par une équation différentielle du second ordre

$$(3) \quad t''_v + \frac{g^2}{v} (1 - \rho^2) t'^2_v - g \frac{2\rho + v\rho'}{v} t'_v - \frac{t'_n}{v} = 0.$$

Elle se réduit au premier ordre en prenant pour variable  $t'_v$ .

On a vu que, en prenant pour variable  $\frac{-1}{g t'_v}$ , elle se réduit au type des équations d'Abel.

*Remarque.* — On obtiendra  $s'_v = \frac{ds}{dv}$  par un procédé analogue.

**236. Ordonnée.** — Posant  $y'_v = \frac{dy}{dv}$ , on partira de l'équation du n° 233, 3°, qu'on écrira

$$y'_v = -\frac{v}{g} + \frac{\rho}{g} \frac{v}{\tau},$$

qui, en introduisant la variable  $s = \frac{1}{v^2}$ , devient

$$s = \frac{g y'_v}{v^2 \rho} + \frac{1}{v \rho},$$

d'où, en différentiant,

$$s' = \frac{1}{v^2 \rho^2} [v \rho y''_v - (2\rho + v \rho') y'_v] - \frac{\rho + v \rho'}{v^2 \rho^2} = 0.$$

On portera encore les valeurs de  $s$  et  $s'$  dans l'équation (2) du n° 235, et l'on aura la forme normale cherchée, qui relie l'ordonnée  $y$  à la vitesse  $v$  par l'équation différentielle du second ordre

$$(4) \quad y''_v + \frac{g^2}{v^3} \left( \frac{1}{\rho^2} - 1 \right) y'^3_v + \frac{1}{v^2} \left( \frac{3}{\rho^2} + \frac{v \rho'}{\rho} - 1 \right) g y'^2_v + v y'_v + \frac{g}{\rho^2} = 0.$$

Cette équation, qui se réduit au premier ordre en prenant pour variable  $y'_v$ , a été établie par le colonel Jacob.

Elle est encore du type d'Abel, mais avec un terme de plus que les équations du temps ou de l'hodographe.

Si l'on prend comme variable  $\frac{1}{Y} = y'_v$ , l'équation

$$y''_v = M y'^3_v + N y'^2_v + P y'_v + Q$$

deviendra

$$Y'_v + M + NY + PY^2 + QY^3 = 0.$$

3° M. Ouivet a remarqué que l'équation (4) admet l'intégrale particulière  $g y'_v = -v$ , d'où, en faisant le changement de fonction,

$$g y'_v = -v + \zeta,$$

on obtient l'équation

$$v^3 \zeta'_v + \left( \frac{1}{\rho^2} - 1 \right) \zeta^3 + \left( \frac{v \rho'}{\rho} + 2 \right) v \zeta (\zeta + v) = 0.$$

Elle est de même forme que l'équation (2) de M. Appell et s'y ramène par le changement de fonction

$$\zeta = v^2 \frac{cF}{g} s.$$

*Remarques.* — 1° Si, dans l'équation (1), on fait  $g = 0$ , on trouve

$$v y'_v + \left( \frac{v F'}{F} - 1 \right) y'_v = 0,$$

d'où

$$\frac{y''_v}{y'_v} = \frac{v F' - F}{v F},$$

ce qui revient à

$$\log y'_v = \log \left( -\frac{v}{F} \right).$$

La solution est donc, dans ce cas,  $y'_v = -\frac{v}{F}$ , ce qui est bien l'équation du mouvement rectiligne horizontal.

2° Si l'on fait  $c = 0$  (mouvement dans le vide), il vient

$$g^2 y'^2_v + 3v g (g y'^2_v + v y'_v) + v^2 = 0,$$

ce qui s'écrit

$$(g y' + v)^2 = 0.$$

La solution est donc  $y'_v = -\frac{v}{g}$  comme cela doit être, puisque, dans ce cas (20),

$$y = \frac{1}{2g} (V_0^2 - v^2).$$

**237. Forme normale de l'abscisse.** — Ainsi qu'on le voit d'après l'expression en  $\tau$  et  $v$  de  $x'_v$  (2° équation du n° 233, 3°), qui renferme un radical, l'équation différentielle qui relie  $x$  et  $v$  sera beaucoup plus compliquée que les deux précédentes. Pour l'établir même, il sera plus simple de faire le calcul directement plutôt que de passer par le calcul de  $\tau$  et de  $\tau'$ .

Posant  $x'_v = \frac{dx}{dv}$ , on aura comme première équation

$$g x'_v (\sin \tau + \rho) + v \cos \tau = 0.$$

Sa dérivée, en remplaçant  $\frac{d\tau}{dv}$  par sa valeur, est (2° équation)

$$-v x''_v \cos \tau + g x'^2_v \left( \rho' - \frac{g x'_v}{v^2} \cos \tau \right) + x'_v \cos \tau + \frac{g x'^2_v}{v} \sin \tau = 0.$$

La troisième équation est

$$\sin^2 \tau + \cos^2 \tau = 1.$$

Pour l'élimination, on écrira les trois équations sous la forme

suivante :

$$\begin{aligned} v \cos \tau + g x'_v \sin \tau + x'_v \rho &= 0, \\ \left( 1 - \frac{g^2 x_v'^2}{v^2} + \frac{v x_v''}{x'_v} \right) \cos \tau + \frac{g x'_v}{v} \sin \tau + x'_v \rho' &= 0, \\ \cos^2 \tau + \sin^2 \tau - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Or, le résultat de l'élimination de  $\alpha$  et  $\beta$  entre

$$A\alpha + B\beta = M, \quad \alpha\alpha + \beta\beta = m, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1$$

est

$$(bM - Bm)^2 + (\alpha M - Am)^2 = (Ab - \alpha B)^2.$$

On aura donc ainsi, dans le cas actuel,

$$(5) \quad \frac{g^2 x_v'^2}{v^2} \left( 1 - \frac{v \rho'}{\rho} \right)^2 + \left( \frac{g^2 x_v'^2}{v^2} + \frac{v x_v''}{x'_v} - 1 + \frac{v \rho'}{\rho} \right)^2 = \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{g^2 x_v'^2}{v^2} + \frac{v x_v''}{x'_v} \right)^2.$$

Telle est l'équation cherchée qui relie  $x$  et  $v$ . Elle se réduit encore au premier ordre en prenant  $x'_v$  pour variable.

Elle est du second degré en  $x'_v$ . Elle n'est pas réductible à une équation d'Abel. Cependant si, avec le lieutenant-colonel Mata, on prend comme variable

$$z = \log \tan \frac{\pi}{2} \int \frac{1}{v^2} \frac{dx}{dv} dv,$$

on obtient encore une équation du type d'Abel :

$$x'_v = -Pz^2 + Qz.$$

*Remarque.* — On peut, pour  $c = 0$  et  $g = 0$ , faire la même vérification dans les exemples précédents :

1° Pour  $c = 0$ , il reste

$$g^2 x_v'^2 + v^2 x_v'' = 0,$$

qui est vérifiée par l'équation

$$(19) \quad x = \frac{u_0^2}{g} \left( \tan \alpha \pm \frac{1}{u_0} \sqrt{v^2 - u_0^2} \right);$$

2° Pour  $g = 0$ , on a

$$v x_v'' + \left( \frac{v F'}{F} - 1 \right) x'_v = 0,$$

ce qui donne la formule

$$x'_v = -\frac{v}{F}.$$

*Résumé.* — D'après les développements qui viennent d'être donnés,

dans le présent paragraphe, on peut réduire toutes les équations différentielles de la Balistique, pour chacun des éléments considérés, à la forme

$$\frac{ds}{dv} = P s^3 + Q s^2 + R s + S,$$

P, Q, R, S étant des fonctions de  $v$ , et du coefficient balistique. Quand S est nul (tous les éléments, excepté  $\gamma$ ), on peut réduire, par un changement de variable, à la forme

$$\frac{d\zeta}{d\alpha} = \frac{A}{\zeta} - 1.$$

Entre deux limites données de  $v$  ou de  $\alpha$ , soit  $A_m$  la valeur moyenne de la fonction  $A$ . On pourra intégrer approximativement cette équation sous la forme

$$A - \zeta - A \log(A - \zeta) = \alpha + \text{const.}$$

## II. — CAS D'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DE LA BALISTIQUE.

238. **Le problème balistique au point de vue analytique.** — L'intégration de l'hodographe ou d'une des autres équations différentielles à deux variables, dont l'une est la vitesse  $v$ , ne peut réellement intéresser les balisticiens que si la fonction  $F(v)$  qui y figure, ou bien est laissée arbitraire de manière à s'accorder, dans tous les cas, avec la loi expérimentale de la résistance de l'air, ou bien, tout au moins, est remplacée par une autre fonction capable de représenter, plus ou moins bien, sur une plus ou moins grande étendue, cette même fonction expérimentale  $F(v)$ . Si cet objet précis est négligé, on passe du domaine de la Balistique à celui de la pure Analyse.

« Pour que les équations du mouvement d'un projectile dans un milieu résistant se ramènent aux quadratures, la résistance étant supposée directement contraire à la vitesse, et fonction de la seule vitesse, il faut intégrer l'équation de l'hodographe

$$(1) \quad dv = \frac{v}{\cos \tau} (\rho + \sin \tau) d\tau.$$

» D'Alembert chercha des formes de la fonction  $\rho = \frac{cF}{g}$  permettant cette intégration, et il en trouva quatre :

$$\begin{aligned} \rho &= b_0 + b_n v^n, & \rho &= b_0 + b \log v, \\ \rho &= b_n v^n + R + b_{-n} v^{-n}, & \rho &= b_0 (\log v)^2 + R \log v + b, \end{aligned}$$

avec deux ou trois constantes chacune, car dans les dernières formules les quantités  $(b_n, b_{-n}, R, n)$  et  $(b_0, b, R)$  sont respectivement liées par une équation. » Avant d'Alembert, on ne connaissait que le seul cas de  $cF = b_n v^n$ , résolu par Jean Bernoulli. D'Alembert, après avoir indiqué ces cas, ajoute : « Je ne prétends pas, au reste, qu'il n'y ait que ces seuls cas où la trajectoire soit constructible; mais je laisse à ceux qui aiment ces sortes de calculs à pousser plus loin leurs recherches là-dessus. »

« L'appel est resté sans réponse, que je sache. Le problème de d'Alembert ne manque pas d'intérêt, même au point de vue pratique. Si l'on connaissait bon nombre de fonctions  $\varphi$  contenant plusieurs constantes arbitraires et permettant l'intégration de l'hodographe, on pourrait espérer d'y trouver une fonction  $\rho$  s'accordant avec la résistance donnée par l'expérience. La fonction  $(b_0 + b_1 v)$ , par exemple, qui rentre dans le cas de d'Alembert, représente une loi de la résistance de l'air, signalée récemment par M. le commandant Chapel. Mais la loi de Chapel ne vaut que pour les hautes vitesses. Le problème de d'Alembert, d'ailleurs, fait abstraction des conditions pratiques et, comme problème d'Analyse, il pourrait bien appeler l'attention des géomètres. »

(Siacci.)

Siacci (1901) a donné d'assez nombreux exemples de cas d'intégration. Après lui, M. Ouivet (1913) a apporté une contribution intéressante au même problème; mais c'est M. Drach (1915) qui, répondant complètement à l'appel de Siacci, a donné la solution générale de la question posée en faisant connaître tous les cas réductibles aux quadratures.

Sans entrer dans tout le détail des calculs, il importe au balisticien de connaître l'état actuel où l'Analyse a amené la solution du problème balistique et il y a lieu, par suite, d'exposer, dans leurs grandes lignes, les travaux successifs des savants qui ont traité de ce problème.

**239. Formes intégrables de d'Alembert.** — A. On connaissait, depuis 1719, grâce à J. Bernoulli, l'intégration de l'hodographe pour une résistance monome, auquel cas l'équation de cet hodographe se met sous la forme

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{b_n v^{n+1}}{g}.$$

et s'écrit identiquement

$$\frac{g du}{b_n u^n} = \frac{d\tau}{\cos^{n+1} \tau};$$

ce qui s'intègre (171) sous la forme

$$\frac{g}{n b_n u^n} + \int_0^\tau \frac{d\tau}{\cos^{n+1} \tau} = \text{const.}$$

B. D'Alembert a d'abord généralisé le cas précédent en prenant  $c F(v) = b_0 + b_n v^n$ , de sorte que l'équation de l'hodographe devient

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{b_0 v + b_n v^{n+1}}{g}.$$

On développe le premier membre et l'on divise par  $v^{n+1}$ ; il vient

$$g \cos \tau v^{-(n+1)} dv - (b_0 + g \sin \tau) v^{-n} d\tau = b_n d\tau.$$

Prenant comme variable  $\mu = \frac{1}{v^n}$ , on écrira

$$\frac{g \cos \tau}{n} \frac{d\mu}{d\tau} + (b_0 + g \sin \tau) \mu + b_n = 0,$$

ce qui donne une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on sait intégrer.

Le même procédé permettra d'intégrer le cas de

$$c F(v) = b_0 + b \log v.$$

On traitera en détail, au Livre V, de ces cas d'intégration et de la solution complète du problème balistique qu'ils permettent d'obtenir.

C. Après ces exemples simples, d'Alembert prend l'équation de l'hodographe sous la forme développée

$$\rho v d\tau = \cos \tau dv - v \sin \tau d\tau,$$

et pose

$$\sin \tau = 0, \quad \text{d'où} \quad d\tau = \frac{d\theta}{\cos \tau}.$$

On aura ainsi

$$\rho v d\theta = dv - \theta^2 dv - \theta dv\theta.$$

1° Soit une première forme

$$\rho = \frac{c F(v)}{g} = \frac{\Lambda_0 + \Lambda_1 v + \Lambda_2 v^2}{v} = \frac{\Lambda_0}{v} + \Lambda_1 + \Lambda_2 v.$$

Posons :

$$(1) \quad v = \alpha_1 + \alpha_2 \theta^p + \xi,$$

où  $\xi$  est une nouvelle variable;  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $p$  sont des constantes. L'équation



de l'hodographe se mettra sous la forme

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Lambda_2 \alpha_1^2 + 2\Lambda_2 \alpha_1 \alpha_2 \theta^p + \Lambda_2 \alpha_2^2 \theta^{2p} \\ - \alpha_1 \Lambda_1 + \alpha_2 \Lambda_1 \theta^p - p\alpha_2 \theta^{p-2} \\ + \Lambda_0 + \alpha_1 \theta + p\alpha_2 \theta^{p+1} \\ + \alpha_2 \theta^{p+1} \end{array} \right\} = \Phi_2(\theta) \xi^2 + \Phi_1(\theta) \xi + \Phi_0(\theta) \frac{d\xi}{d\theta}.$$

Les fonctions  $\Phi_{0,1,2}$  contiennent  $\theta$  et les constantes  $\Lambda$  et  $\alpha$ . L'expression développée du second membre s'écrit

$$(1 - \theta^2) \frac{d\xi}{d\theta} - \Lambda_2 \xi^2 - (\Lambda_1 + 2\Lambda_2 \alpha_1 + 2\Lambda_2 \alpha_2 \theta^p + 0) \xi.$$

Profitons de l'indétermination des constantes  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $p$  pour annuler le premier membre identiquement. Faisons, en particulier,  $p = 1$ . On aura les trois équations

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Lambda_2 \alpha_1^2 + \alpha_1 \Lambda_1 + \Lambda_0 - \alpha_2 = 0, \\ 2\Lambda_2 \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \Lambda_1 + \alpha_1 = 0, \\ \alpha_2 (\Lambda_2 \alpha_2 + 2) = 0, \end{array} \right. \quad \text{d'où} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 = -\frac{2}{\Lambda_2}, \\ \alpha_1 = -\frac{2}{3} \frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}, \\ \frac{2}{9} \Lambda_1^2 = \Lambda_0 \Lambda_2 + 2. \end{array} \right.$$

Comme on n'a plus ( $p = 1$ ) que deux arbitraires  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ , ces trois équations ne peuvent être satisfaites simultanément que si une relation existe entre les coefficients  $\Lambda_0$ ,  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  de la loi de résistance, relation qui s'obtient en éliminant  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  entre les trois équations, et qui est  $\frac{2}{9} \Lambda_1^2 = \Lambda_0 \Lambda_2 + 2$ .

Supposons cette relation vérifiée : le premier membre de l'équation différentielle étant nul, le second représente une équation de Bernoulli qui fera connaître  $\xi$  en fonction de  $\theta$ .

Portant dans  $v$  les valeurs de  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et de  $\xi$ , on déterminera la constante d'intégration d'après les conditions initiales.

Effectuons ce calcul. On aura, en faisant  $p = 1$  et remplaçant  $\theta$  par sa valeur :

$$\cos \tau \frac{d\xi}{d\tau} - \Lambda_2 \xi^2 - [\Lambda_1 + 2\Lambda_2 \alpha_1 + (2\Lambda_2 \alpha_2 + 1) \sin \tau] \xi = 0$$

ou

$$\cos \tau \frac{d\xi}{d\tau} - \Lambda_2 \xi^2 + \left( \frac{\Lambda_1}{3} + 3 \sin \tau \right) \xi = 0.$$

Posant  $\psi = \frac{1}{\xi}$ , il viendra, en divisant par  $\xi^2$ , l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d\psi}{d\tau} - \left( \frac{\Lambda_1}{3} + 3 \sin \tau \right) \frac{\psi}{\cos \tau} + \frac{\Lambda_2}{\cos \tau} = 0,$$

dont l'intégrale, en posant  $\frac{\Lambda_1}{3} = \mu$ , est

$$\psi = \frac{\operatorname{tang}^{\mu} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2} \right)}{\cos^3 \tau} \left[ K - \Lambda_2 \int \frac{\cos^2 \tau}{\operatorname{tang}^{\mu} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2} \right)} d\tau \right]$$

ou, en remplaçant  $\psi$  par sa valeur,

$$\frac{3}{3\Lambda_2 v + 6 \sin \tau + 2\Lambda_1} = \frac{\operatorname{tang}^{\mu} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2} \right)}{\cos^3 \tau} \left[ K - \int \frac{\cos^2 \tau}{\operatorname{tang}^{\mu} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2} \right)} d\tau \right].$$

La constante se déterminera en faisant  $\tau = z$  et  $v = V_0$ .

On transformera cette équation en prenant pour variable

$$\operatorname{tang} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2} \right) = \zeta,$$

d'où l'on déduit

$$\cos \tau = \frac{2\zeta}{1 + \zeta^2}, \quad \sin \tau = \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 + 1}, \quad d\tau = \frac{2d\zeta}{1 + \zeta^2}.$$

L'équation devient

$$\frac{3}{3\Lambda_2 v + 6 \sin \tau + 2\Lambda_1} = \zeta^{\mu-3} (1 + \zeta^2)^3 \left[ K - \int \frac{\zeta^{\mu} d\zeta}{\zeta^{\mu-3} (1 + \zeta^2)^3} \right].$$

On pourra faire l'application de cette formule aux cas simples suivants :

$\Lambda_1 = 0,$	d'où	$\Lambda_0 \Lambda_2 = -2$	et	$\mu = 0;$
$\Lambda_1 = \pm 3,$	d'où	$\Lambda_0 = 0$	et	$\mu = \pm 1;$
$\Lambda_1 = 9,$	d'où	$\Lambda_0 \Lambda_2 = 16$	et	$\mu = 3;$
$\Lambda_1 = 15,$	d'où	$\Lambda_0 \Lambda_2 = 48$	et	$\mu = 5.$

On intégrera aussi quand  $\frac{3-\mu}{2}$  est un nombre entier positif, d'où  $\mu = 3 - 2m$  ( $m$  entier); cette formule donne, pour  $\mu$ , la série des nombres impairs négatifs. On a, dans ce cas :

$$\Lambda_1 = 3 - 6m; \quad \text{d'où} \quad \Lambda_0 \Lambda_2 = 8m(m-1) \quad \text{et} \quad \mu = 1 - 2m.$$

2° D'Alembert généralise au cas de  $\rho = \frac{\Lambda_0}{v^m} + \Lambda_1 + \Lambda_2 v^m$ , en remarquant qu'on écrira l'équation différentielle

$$\Lambda_0 + \Lambda_1 v^m + \Lambda_2 v^{2m} = v^{m-1} dv - 6v^{m-1} dv - v^{m+1} dv,$$

et, prenant pour variable  $v_1 = v^m$ , on aura

$$\Lambda_0 + \Lambda_1 v_1 + \Lambda_2 v_1^2 = m dv_1 - 6v_1 dv_1 - v_1^2 dv_1,$$

qui est précisément de même forme que la précédente et se résoudra par le même procédé.

3° Enfin, il prend  $\rho = A_0 (\log v)^2 + A_1 \log v + A_2$ , puis pose  $\log v = r_2$ ; on aura donc, puisque  $\frac{dv}{v} = dv_2$ ,

$$A_0 r_2^2 + A_1 r_2 + A_2 = dv_2 - \theta^2 dv_2 - \theta d\theta,$$

ce qui est encore une équation qu'on peut traiter par les mêmes transformations et les mêmes raisonnements.

*Remarque.* — Si l'on fait  $p = 0$ , dans les équations (2), on trouvera un autre cas d'intégrabilité. On a

$$\begin{cases} A_1 a_1^2 + A_1 a_1 + A_0 + 2 A_2 a_1 a_2 + A_1 a_2 + A_2 a_2^2 = 0, \\ a_1 + a_2 = 0. \end{cases}$$

La première équation est une identité, si  $A_0 = 0$ . Donc, la loi de résistance est  $\rho = A_1 + A_2 v$ , généralisable (2°) en  $\rho = A_1 + A_2 v^m$ ; c'est la loi binome de d'Alembert.

**240. Première forme de Siacci.** — Nous prenons la résistance sous la forme

$$(2) \quad \rho = A v \sqrt{2m + v^2} + B(m + v^2),$$

avec  $A$ ,  $B$  et  $m$  constantes. Nous développerons ici les calculs qui conduisent à quelques intéressantes conclusions.

1° Posons

$$2m + v^2 = z^2 z^2, \quad \text{d'où} \quad v^2 = \frac{2m}{z^2 - 1}$$

et, par suite,

$$\frac{dv}{v} = - \frac{z dz}{z^2 - 1}.$$

La fonction de résistance s'écrit :

$$\rho = \frac{m}{z^2 - 1} [2A z + B(z^2 + 1)].$$

En substituant dans l'équation de l'hodographe (1), il viendra

$$(3) \quad z \cos \tau dz + [2A m z + (B m + \sin \tau) z^2 + B m - \sin \tau] d\tau = 0.$$

Posons maintenant  $z = \xi(B m - \sin \tau)$ .

En élevant au carré et différentiant, on aura

$$z dz = \xi(B m - \sin \tau)^2 d\xi - \xi^2(B m - \sin \tau) \cos \tau d\tau.$$

Le multiplicateur de  $d\tau$  dans (3) deviendra

$$(Bm - \sin \tau) [\Lambda m \xi + (B^2 m^2 - \sin^2 \tau) \xi^2 + 1]$$

et, par suite, l'équation (3) prend la forme

$$(Bm - \sin \tau) \cos \tau \xi d\xi + [(B^2 m^2 - 1) \xi^2 + 2\Lambda m \xi + 1] d\tau = 0,$$

et enfin

$$(4) \quad \frac{\xi d\xi}{(B^2 m^2 - 1) \xi^2 + 2\Lambda m \xi + 1} + \frac{d\tau}{(Bm - \sin \tau) \cos \tau} = 0,$$

équation où les variables sont séparées.

2° *L'intégration se fait par les fonctions élémentaires.* — Soient  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  les deux racines de l'équation du second degré :

$$(B^2 m^2 - 1) \xi^2 + 2\Lambda m \xi + 1 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\left. \begin{matrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\Lambda m \pm \sqrt{(\Lambda^2 - B^2) m^2 + 1}}{1 - B^2 m^2};$$

nous aurons

$$\frac{\xi d\xi}{(\xi - \alpha_1)(\xi - \alpha_2)} = \frac{(1 - B^2 m^2) d\tau}{(Bm - \sin \tau) \cos \tau}$$

ou

$$\frac{\alpha_1 d\xi}{\xi - \alpha_1} - \frac{\alpha_2 d\xi}{\xi - \alpha_2} = (\alpha_1 - \alpha_2) (1 - B^2 m^2) \frac{d\tau}{(Bm - \sin \tau) \cos \tau}.$$

En intégrant, il viendra

$$(5) \quad \log \frac{(\xi - \alpha_1)^{\alpha_1}}{(\xi - \alpha_2)^{\alpha_2}} = (\alpha_1 - \alpha_2) (1 - B^2 m^2) \int \frac{d\tau}{(Bm - \sin \tau) \cos \tau} + \text{const.}$$

Pour trouver l'intégrale qui figure dans le second membre, posons

$$\sin \tau = \theta;$$

nous aurons

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{(Bm - \sin \tau) \cos \tau} &= \frac{d\theta}{(Bm - \theta)(1 - \theta^2)} \\ &= \frac{d\theta}{2(Bm - 1)(1 - \theta)} + \frac{d\theta}{2(Bm + 1)(1 + \theta)} + \frac{d\theta}{(1 - B^2 m^2)(Bm - \theta)}; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} (1 - B^2 m^2) \int \frac{d\tau}{(Bm - \sin \tau) \cos \tau} &= \frac{1}{2} \log \frac{(1 - \theta)^{1+Bm}(1 + \theta)^{1-Bm}}{(Bm - \theta)^2} \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{1 - \theta^2}{(Bm - \theta)^2} \left( \frac{1 - \theta}{1 + \theta} \right)^{Bm} \\ &= \log \frac{\cos \tau}{Bm - \sin \tau} + \frac{Bm}{2} \log \frac{1 - \sin \tau}{1 + \sin \tau}. \end{aligned}$$

Substituant dans (5), passant des logarithmes aux nombres et représentant par  $K$  une constante arbitraire, il viendra

$$(6) \quad \frac{(\xi - \alpha_1)^{\alpha_1}}{(\xi - \alpha_2)^{\alpha_2}} = K \left[ \frac{\cos \tau}{Bm - \sin \tau} \left( \frac{1 - \sin \tau}{1 + \sin \tau} \right)^{\frac{Bm}{2}} \right]^{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

La constante  $K$  se détermine au moyen des valeurs initiales de  $\tau$  et de  $\xi$ .

Le problème est donc résolu : l'hodographe est intégré.

*Remarque.* — Lorsque  $(A^2 - B^2)m^2 + 1$  est négatif, les racines  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont imaginaires. Dans ce cas, posant par abréviation

$$(A^2 - B^2)m^2 + 1 = -\Delta^2,$$

l'intégrale (4) est

$$\begin{aligned} & \log[\xi^2(B^2m^2 - 1) + 2Am\xi + 1] - 2\frac{Am}{\Delta} \arctan \frac{\xi(B^2m^2 - 1) + Am}{\Delta} \\ &= 2 \int \frac{(1 - B^2m^2) d\tau}{(Bm - \sin \tau) \cos \tau} + \text{const.} \end{aligned}$$

3° *Cas particulier.* — Examinons avec quelque détail le cas de  $B = 0$  avec  $m$  positif. On a alors

$$\rho = \lambda v \sqrt{2m + v^2}.$$

La résistance est nulle avec la vitesse; elle croît et tend vers l'infini en même temps que celle-ci, et vers une résistance quadratique; ces hypothèses s'accordent assez bien avec l'allure réelle de la fonction expérimentale  $F(v)$ .

Les racines  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont toujours réelles et se réduisent à

$$\alpha_1 = Am + \sqrt{1 + A^2m^2}, \quad \alpha_2 = Am - \sqrt{1 + A^2m^2}.$$

On a donc

$$\alpha_1 \alpha_2 = -1.$$

L'équation (6) devient

$$(7) \quad \frac{(\xi - \alpha_1)^{\alpha_1}}{(\xi - \alpha_2)^{\alpha_2}} = K (-\cot \tau)^{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

De cette équation, on tire immédiatement  $\tan \tau$  en fonction de  $\xi$ , et comme on a

$$v^2 = \frac{2m}{\xi^2 - 1} = \frac{2m}{\xi^2 \sin^2 \tau - 1},$$

il viendra, pour l'équation de l'hodographe,

$$v^2 \cos^2 \tau = \frac{2m}{(\xi^2 - 1) \tan^2 \tau - 1}.$$

Donc, l'abscisse, l'ordonnée et le temps qui sont donnés par

$$\begin{cases} gt = -\int_{\alpha}^{\tau} (v \cos \tau) d \tan \tau, & gy = -\int_{\alpha}^{\tau} (v \cos \tau)^2 \tan \tau d \tan \tau, \\ gx = -\int_{\alpha}^{\tau} (v \cos \tau)^2 d \tan \tau \end{cases}$$

pourront s'exprimer en fonction de la variable auxiliaire  $\xi$ , puisque  $\tan \tau$  et  $v \cos \tau$  sont connus en fonction de cette variable.

Observant que  $\xi = -\frac{z}{\sin \tau}$ , on peut mettre l'équation (7) sous la forme

$$\frac{\left(\frac{z}{\cos \tau} + a_1 \tan \tau\right)^{a_1}}{\left(\frac{z}{\cos \tau} - a_2 \tan \tau\right)^{a_2}} = K.$$

En déterminant la constante  $K$  pour correspondre à l'angle asymptotique  $\theta$  pour  $v = \infty$ , c'est-à-dire  $z = 1$ , on aura

$$K = \frac{\left(\frac{1}{\cos \theta} + a_1 \tan \theta\right)^{a_1}}{\left(\frac{1}{\cos \theta} - a_2 \tan \theta\right)^{a_2}}.$$

En remarquant que  $a_1 a_2 = -1$ , il viendra

$$(8) \quad \left[\frac{z + a_1 \sin \tau}{\cos \tau}\right]^{a_1} \frac{a_1 z - \sin \tau}{\cos \tau} = \left[\frac{1 + a_1 \sin \theta}{\cos \theta}\right]^{a_1} \frac{a_1 - \sin \theta}{\cos \theta},$$

avec

$$z = \sqrt{\frac{\lambda m}{v^2} + 1}.$$

4° *Sur la vitesse minimum.* — La vitesse terminale  $V'$  s'obtiendra en faisant  $\frac{c^F(V')}{g} = 1$ . Donc

$$1 = \lambda V' \sqrt{2m + V'^2},$$

d'où l'on peut déduire

$$z' = a_1$$

et

$$V' = \sqrt{\frac{a_1}{\lambda}}.$$

Quand la trajectoire a un sommet, la résistance  $\frac{c^F}{g} = \lambda v \sqrt{2m + v^2}$  admet une vitesse minimum, quelle que soit la vitesse initiale, puisque  $\frac{c^F}{v}$  croît avec  $v$  (177).

Si la trajectoire n'a pas de sommet, c'est-à-dire si l'angle asymptotique

tique  $\Theta$  est négatif, on ne peut plus affirmer qu'il existe une vitesse minimum puisque  $\frac{c^2 F}{v^2}$  diminue quand  $v$  croît (179). On reconnaît, comme on sait, que le projectile passe par une vitesse minimum s'il passe, à distance finie, par une vitesse égale à la vitesse terminale  $V'$  (181).

Posons  $\Theta = -\Theta'$  et  $\tau = -\tau'$ . La valeur de  $\tau$  qui correspond à  $V'$  est égale à  $\alpha_1$ . L'équation (8) devient

$$(9) \quad \alpha_1 \left[ \frac{1}{\cos \tau'} - \tan \tau' \right] \left[ \alpha_1^2 \frac{1}{\cos \tau'} + \tan \tau' \right]^{\frac{1}{\alpha_1}} \\ = \left[ \frac{1}{\cos \Theta'} - \alpha_1 \tan \Theta' \right] \left[ \frac{\alpha_1}{\cos \Theta'} + \tan \Theta' \right]^{\frac{1}{\alpha_1}}.$$

Le second membre sera positif ou négatif suivant le signe du premier facteur, c'est-à-dire positif, si  $\sin \Theta < \frac{1}{\alpha_1}$ , négatif si  $\sin \Theta' > \frac{1}{\alpha_1}$ .

Dans le premier cas, l'équation (9) admet pour  $\tau'$  une racine comprise entre  $\Theta'$  et  $\frac{\pi}{2}$ , puisqu'en substituant ces deux valeurs le premier membre devient une fois plus grand et une fois plus petit que le second.

Donc, quand  $\sin \Theta' < \sqrt{1 + A^2 m^2} - A m$ , le projectile passe à distance finie par une vitesse égale à  $V'$  et il existe une vitesse minimum.

Dans le second cas, la substitution ne fait pas changer les signes du premier membre : il n'existe pas de vitesse minimum ; la vitesse du projectile diminue sans cesse jusqu'à la vitesse terminale  $V'$ .

5° *Cas particulier.* — Examinons l'hypothèse particulière de

$$\sin \Theta' = \frac{1}{\alpha_1} = \sqrt{1 + A^2 m^2} - A m.$$

Alors le second membre de (7) est nul et l'on a

$$z - \alpha_1 \sin \tau' = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha_1 \sin \tau' = \sqrt{\frac{2m}{v^2} + 1};$$

d'où

$$\frac{v^2}{2m} = \frac{1}{\alpha_1^2 \sin^2 \tau' - 1}.$$

On voit que, quand  $\tau'$  croît de  $\Theta'$  à  $\frac{\pi}{2}$ , la vitesse diminue constamment de  $\infty$  à  $V'$ .

On a, en supposant l'axe des  $y$  dirigé vers le bas,

$$\begin{cases} \mathcal{E} t = \int_{\alpha}^{\tau'} \frac{d\tau'}{\cos \tau'} \sqrt{\frac{2m}{\alpha_1^2 \sin^2 \tau' - 1}}, & \mathcal{E} y = \int_{\alpha}^{\tau'} \frac{2m d\tau'}{\alpha_1^2 \sin^2 \tau' - 1} \tan \tau', \\ \mathcal{E} x = \int_{\alpha}^{\tau'} \frac{2m d\tau'}{\alpha_1^2 \sin^2 \tau' - 1}. \end{cases}$$

L'intégration de ces équations donnera

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{z}{\sqrt{2m}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2 - 1}} \log [\sqrt{\alpha_1^2 - 1} \tan \tau' + \sqrt{(\alpha_1^2 - 1) \tan^2 \tau' - 1}] + \text{const} \\ \frac{g \cdot r}{m} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2 - 1}} \log \frac{\sqrt{\alpha_1^2 - 1} \tan \tau' - 1}{\sqrt{\alpha_1^2 - 1} \tan \tau' + 1} + \text{const.} \\ - \frac{g \cdot y}{m} = \frac{1}{\alpha_1^2 - 1} \log [(\alpha_1^2 - 1) \tan^2 \tau' - 1] + \text{const.} \end{array} \right.$$

En éliminant  $\tan \tau'$  entre les deux dernières, on a l'équation de la trajectoire :

$$e^{-by} = K_1 e^{ax} + K_2 e^{-ax}.$$

où  $K_1$  et  $K_2$  sont des constantes arbitraires, et où

$$\alpha = \frac{g \sqrt{\alpha_1^2 - 1}}{2m} = \frac{g}{V' \sqrt{2m}} = \frac{g \cot \theta'}{2m} = \frac{\Lambda g}{\cos \theta'},$$

$$b = \frac{g(\alpha_1^2 - 1)}{2m} = \frac{g^2}{V'^2} = \frac{g}{2m} \cot^2 \theta' = \frac{\Lambda g}{\sin \theta'}.$$

Si l'on prend pour origine un point de la trajectoire où  $\tau' = \alpha$ , les constantes  $K_1$  et  $K_2$  sont déterminées par les relations

$$K_1 + K_2 = 1, \quad K_1 - K_2 = - \frac{\tan \alpha}{\tan \theta'};$$

d'où

$$K_1 = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\tan \alpha}{\tan \theta'} \right], \quad K_2 = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\tan \alpha}{\tan \theta'} \right]$$

et la vitesse à l'origine sera

$$V_0^2 = \frac{2m}{\alpha_1^2 \sin^2 \alpha - 1}.$$

La trajectoire a deux asymptotes, l'une verticale, l'autre oblique. La distance de l'origine à l'asymptote verticale est

$$x' = \frac{1}{2\alpha} \log \left( - \frac{K_1}{K} \right) = \frac{m}{g} \tan \theta' \log \frac{\tan \alpha - \tan \theta'}{\tan \alpha + \tan \theta'}$$

et l'équation de l'asymptote oblique est

$$y = x \tan \theta' - \frac{2m}{g} \tan^2 \theta' \log \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\tan \alpha}{\tan \theta'} \right).$$

Si, enfin, on prend pour origine le point de rencontre des deux asymptotes, pour axe des Y l'asymptote verticale, et pour axe des X l'asymptote oblique dirigée vers le haut, l'équation de la trajectoire



prend la forme très simple

$$e^{-\frac{1}{2}\tau} + e^{-2\frac{1}{2}\tau} = 1$$

241. **Les autres formes intégrables de Siacci.** — Nous donnons ci-dessous le résumé analytique, d'après Siacci lui-même, des autres cas (qu'il qualifie d'ultra-théoriques) pour lesquels ce savant balisticien est parvenu à ramener aux quadratures l'équation différentielle de l'hodographe.

On pose, pour la simplicité de l'écriture,  $\rho = \frac{cF(v)}{g}$ , de sorte que l'équation différentielle de l'hodographe s'écrit sous la forme

$$(1) \quad \cos \tau \, dv = v(\rho = \sin \tau) \, d\tau.$$

La méthode générale consiste à multiplier (1) par un facteur intégrant qui donne à cette équation des formes variées et tel que, de la condition d'intégrabilité, on puisse déduire une équation différentielle entre  $v$  et  $\rho$  facilement intégrable.

Désignant par

$$U \, dv + V \, d\tau = 0,$$

ce que devient (1) quand elle est multipliée par une fonction de  $v$  et de  $\tau$ ; pour que ce multiplicateur soit un facteur intégrant, il est nécessaire et suffisant qu'on ait

$$\frac{dU}{d\tau} - \frac{\partial V}{\partial v} = 0.$$

*Deuxième forme.* — Soit

$$\mu = a \int \rho \, dv - \alpha v \sin \tau - b \int \frac{d\tau}{\cos \tau}.$$

Multiplions (1) par  $(v \cos \tau)^{-n} e^{\mu}$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $n$  étant des constantes.

On trouve que le multiplicateur  $\mu$  est un facteur intégrant si  $\rho$  vérifie l'équation

$$\frac{d(\rho v^{1-n})}{dv} + \alpha v^{1-n}(\rho^2 - 1) = b v^{-n}.$$

Si l'on fait  $a = 0$ , on a de suite les deux premières formules de d'Alembert

$$F(v) = B_0 + B_n v^n \quad \text{ou} \quad F(v) = B_0 + B \log v$$

suivant que  $n \geq 1$  ou  $n = 1$ .

Dans le cas général, en posant

$$n = \frac{1}{q}, \quad \alpha v = \frac{xq}{q}, \quad \rho = y x^{1-q}$$

l'équation de condition devient

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} + y^2 = x^2 q^{-2} + b q x q^{-2},$$

un peu plus générale que l'équation ordinaire de Riccati. (où  $b = 0$ ) et qu'on sait intégrer au moyen des fonctions algébriques et exponentielles lorsque  $q = 0$  ou lorsque  $\frac{1}{q}$  est un nombre impair positif ou négatif.

Mais on peut aussi intégrer (2) au moyen des mêmes fonctions lorsque,  $h$  et  $k$  étant deux nombres entiers et positifs (zéro compris), on a

$$b = h = k \quad \text{et} \quad \frac{1}{q} = n = \pm(1 + h + k).$$

Posons, comme définition d'une fonction  $\varphi$  des trois lettres  $h, k, v$ :

$$\varphi(h, k, v) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h(h-1)(h-2)\dots(h-i+1)}{(h+k)(h+k-1)\dots(h+k-i+1)} \frac{(2av)^i}{i!}.$$

La fonction  $\varphi$  doit, en outre, remplir les conditions suivantes :

1° Pour  $h = 0$  et pour  $h + k = 0$ , on doit avoir  $\varphi = 1$ ;

2° Si  $(h + k)$  est entier et positif,  $h$  doit être entier et positif : dans ce cas le développement de  $\varphi$  s'arrête au terme où  $i = h$ .

Ceci posé, l'intégrale de (2) s'obtient en dérivant logarithmiquement par rapport à  $v$  l'une ou l'autre des équations suivantes :

$$(I) \quad e^{a \int \rho^{dv}} = e^{av} \varphi(h, k, -v) + C e^{-av} \varphi(h, k, v),$$

avec

$$b = h - k \quad \text{et} \quad n = 1 + h + k,$$

$$(II) \quad (av - n) e^{a \int \rho^{dv}} = e^{av} \varphi(h, k, -v) + C e^{-av} \varphi(h, k, v),$$

avec

$$b = h - k \quad \text{et} \quad n = -1 - h - k;$$

$C$  représente une constante arbitraire.

Si  $h$  et  $k$  sont entiers et positifs, les fonctions  $\varphi$  sont des polynômes finis. Si  $b$  et  $n$  ne sont pas compatibles avec  $h$  et  $k$  entiers et positifs (zéro compris), on aura des séries convergentes, quel que soit  $n$ , en prenant (II) lorsque  $n$  est positif et en prenant (I) lorsque  $n$  est négatif.

De cette manière  $(h + k)$  est toujours négatif et le dénominateur de  $\varphi$  ne s'annule jamais.

*Troisième forme.* — On peut avoir d'autres cas d'intégrabilité en donnant d'autres formes au facteur intégrant.

Si l'on multiplie (1) par

$$M = \frac{[\lambda(1 + \sin \tau) + \mu(1 - \sin \tau)]^m}{v \cos \tau (1 + \sin \tau)^\alpha (1 - \sin \tau)^\beta},$$

où  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $m$  sont des constantes et  $\lambda$  et  $\mu$  des fonctions inconnues de  $v$ , on trouve que  $M$  est un facteur intégrant de (1) si  $\lambda$ ,  $\mu$  et  $\rho$  vérifient les équations suivantes :

$$v d[(\rho + 1)\lambda^m] = 2\beta\lambda^m dv; \quad v d[(\rho - 1)\mu^m] = 2\alpha\mu^m dv, \\ \lambda - \mu = kv^{\frac{m-\alpha+\beta}{m}}.$$

$k$  est une constante.

Les deux intégrations s'effectuent sans difficulté :

- 1° Lorsque  $\alpha = \beta = 0$ ;
- 2° Lorsque  $m = 1$ , et qu'on annule la constante de la première intégration;
- 3° Lorsque  $\beta = 0$  et  $m = \alpha$ ;
- 4° Lorsque  $\alpha = 0$  et  $m = -\beta$ .

A ces quatre cas correspondent quatre formules donnant des expressions de  $\rho$  rendant intégrable l'hodographe. Ce sont :

$$(III) \quad v = a(\rho + 1)^r + b(\rho - 1)^r;$$

$$(IV) \quad qv = (\rho + 1 + 2a)^\alpha (\rho - 1 - 2b)^\beta [(a + b + 2)\rho + a - b];$$

$$(V) \quad Kv[1 + a(\rho - 1)^r] = e^A, \quad \text{avec} \quad A = \frac{r}{2} \int \frac{d\rho}{1 + a(\rho - 1)^r};$$

$$(VI) \quad Hv[1 + b(\rho + 1)^r] = e^B, \quad \text{avec} \quad B = -\frac{r}{2} \int \frac{d\rho}{1 + b(\rho + 1)^r};$$

$a$ ,  $b$ ,  $q$ ,  $K$ ,  $H$ ,  $i$ ,  $r$ ,  $r'$  sont des constantes liées ou non avec les arbitraires  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $m$  et  $k$ .

*Quatrième forme.* — Si l'on donne au facteur intégrant l'une ou l'autre des formes suivantes :

$$\frac{(m_1 + m_2 \sin \tau + m_3 \sin^2 \tau)^{\frac{1}{2}}}{v \cos \tau}, \quad \frac{1}{v \cos \tau} \left( \frac{m_1 + m_2 \sin \tau}{1 + m_3 \sin \tau} \right)^r;$$

$m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  étant des fonctions inconnues de  $v$ , on trouve des équations différentielles qui s'intègrent facilement. On détermine de cette

manière  $m_1$ ,  $m_2$  et  $m_3$  et l'on obtient pour  $\rho$  les équations suivantes :

$$(VII) \quad \frac{a}{(\rho+1)^2} + \frac{b}{(\rho-1)^2} = n^2 \rho + K.$$

$$(VIII) \quad \log \int v d\rho = \frac{r}{n} \int \frac{d\rho}{1+a(\rho-1)^r} - \frac{r}{n} \int \frac{d\rho}{1+b(\rho-1)^r} + K'.$$

La dernière formule donne  $v$  en fonction de  $\rho$  avec un nombre fini de termes lorsque  $r$  est rationnel : elle contient quatre constantes arbitraires, comme (I) et (II). Elle contient aussi, comme cas particuliers, les formules (VI) et (VII).

*Cinquième forme.* — On peut avoir encore un cas d'intégrabilité de (1) en prenant comme facteur intégrant  $e^{\mu}(r \cos \tau)^{-1}$  avec

$$\mu = -\alpha \left( \int \rho dv - \sin \tau \right)^2 - 2\alpha^2 \int v(\rho^2 - 1) dv.$$

La fonction  $\rho$  s'obtient au moyen d'une équation du second ordre :

$$\frac{d\rho}{dv} = 2\alpha^2(\rho^2 - 1) \left( \int \rho dv + \rho v \right),$$

qu'on intègre facilement, en posant  $\int \rho dv = z$ , sous la forme

$$\rho = \frac{1 + K e^{8\alpha^2 v z}}{1 - K e^{8\alpha^2 v z}}.$$

*Sixième forme.* — On multiplie l'hodographe par

$$(1 - \sin \tau)^{-\alpha} (1 + \sin \tau)^{\beta} (\gamma + \sin \tau)^{\alpha-\beta},$$

et l'on soumet ce multiplicateur à la condition d'être un facteur intégrant de l'hodographe;  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes quelconques, mais différentes, et  $\gamma$  est une fonction de  $v$ . On obtient ainsi deux équations différentielles entre  $\rho$ ,  $v$  et  $\gamma$ , lesquelles intégrées donnent

$$\rho = 1 + \frac{(\gamma + 1)^{\beta}}{(\gamma - 1)^{\alpha}} \left[ \gamma + 2\beta \int \frac{(\gamma + 1)^{\alpha}}{(\gamma + 1)^{\beta+1}} d\gamma \right],$$

$$K v^2 (\gamma^2 - 1) = e^{\frac{2}{\gamma^2 - 1} \int \rho dv}.$$

L'élimination de  $\gamma$  donnerait  $\rho$  en fonction de  $v$ , avec quatre constantes arbitraires  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $K$ . Mais cette élimination n'est pas nécessaire, il convient au contraire, pour l'intégration de l'hodographe, d'exprimer  $\rho$  et  $v$  en fonction de  $\gamma$ .

*Remarque.* — Quelques autres formes ont été encore étudiées par Siacci, au Mémoire duquel on devra se reporter pour le développement des calculs et les cas particuliers qu'ils comportent.

**242. Cas d'intégration de M. Ouivet.** — Nous citerons presque textuellement la Note de M. Ouivet.

1° L'intégration du problème balistique peut être poursuivie sur l'équation de M. Appell (233, 4°) :

$$s'v + s^2v \left[ 1 - \left( \frac{cF}{g} \right)^2 \right] + \frac{c}{g} s^2 (2F + vF') = 0.$$

A titre d'exemple, voici quelques cas nouveaux :

*a.* Cette équation est intégrable, les variables sont séparées si  $\frac{cF}{g} = \rho$  vérifie l'équation

$$2\rho + v\rho' = k\rho(1 - \rho^2) \quad (k = \text{const}),$$

dont l'intégrale générale est

$$\rho = 1 \frac{\text{ch } \lambda(v - \alpha)}{\lambda v \text{ sh } \lambda(v - \alpha)} \quad (\alpha = \text{const}),$$

ch et sh sont les cosinus et sinus hyperboliques.

*b.* L'équation différentielle est encore intégrable si elle admet une intégrale proportionnelle au rapport des coefficients des termes en  $s^2$  et  $s^3$ .

La substitution  $s = m \frac{2\rho + v\rho'}{v(1 - \rho^2)} \varphi$  sépare les variables.

Posons

$$\rho = \varphi^2.$$

On obtient pour déterminer  $\varphi$  l'équation

$$\frac{v(\varphi'^2 - 1)}{v\varphi'^2 + 2\varphi'} + m(m+1)(v\varphi' + \varphi) + k = 0.$$

Prenons  $k = 0$  et  $m = -\frac{1}{2}$  et effectuons la substitution  $v = e^x$ ,  $\varphi = ye^x$ ; prenant, de plus,  $y' = \xi$  comme variable on obtient

$$\frac{d\xi}{d\xi} = \frac{\xi(v\gamma + \xi)}{\xi^2 - 4},$$

qui est une équation linéaire.

On a alors

$$\rho = \gamma + \xi \quad \text{et} \quad v = e^{\int \frac{d\gamma}{\xi}}.$$

On obtient donc  $\rho$  et  $v$  en fonction d'un paramètre.

2° Prenons maintenant l'équation entre  $w$  et  $v$  (233) :

$$\frac{dw}{dv} = \frac{w\rho + v}{w + v\rho}.$$

Cette équation admet d'abord les deux solutions  $w = \pm v$ , quelle que soit la résistance  $\rho$  ; elles correspondent aux mouvements vertical ascendant ou descendant.

L'équation ci-dessus admet pour intégrale générale

$$(w - v)^{\alpha}(w + v)^{\beta}(w - z)^{\gamma} = \text{const},$$

où  $\alpha, \beta, \gamma$  sont des constantes et  $z$  la fonction

$$z = v \frac{(\alpha + \beta + \gamma)\rho^2 - (\alpha - \beta)\rho - \gamma}{\alpha - \beta - (\alpha + \beta)\rho},$$

si  $\rho$  vérifie l'équation

$$(\alpha + \beta + \gamma)\rho^2 - (\alpha - \beta)\rho - \gamma = \gamma \frac{d}{dv} v \frac{(\alpha + \beta + \gamma)\rho^2 - (\alpha - \beta)\rho - \gamma}{\alpha - \beta - (\alpha + \beta)\rho}.$$

On peut trouver un certain nombre de cas d'intégration de cette équation qui conduisent à des lois de résistance nouvelles.

Par exemple, pour  $\alpha = \beta$  et  $2\alpha + \gamma = 1$ , on trouve

$$\rho = kv^{-\frac{1}{\gamma}} \sqrt{\gamma^2 + k^2 v^{-\frac{2}{\gamma}}},$$

loi physiquement acceptable en donnant à  $\gamma$  des valeurs négatives.

De même, pour  $\alpha + \beta + \gamma = 0$ , la fonction  $\rho$  est une fonction homographique de la vitesse et d'une constante arbitraire.

Enfin, si l'un des trois nombres  $\alpha, \beta, \gamma$  est nul, on obtient une nouvelle loi de résistance par l'intégration d'une équation linéaire.

« Ces exemples sont basés sur la connaissance d'intégrales particulières de l'équation balistique : dans un Mémoire ultérieur, je montrerai tout le parti qu'on peut tirer de ces solutions particulières pour l'intégration de l'équation » (M. Ouivet).

**243. Théorie générale de M. Drach.** — Écrivant l'équation de l'hodographe

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{v}{\cos \tau} \left( \sin \tau + \frac{cF}{g} \right),$$

et posant

$$\frac{cF(v)}{g} = \rho, \quad \sin \tau = \mu,$$

on la met sous la forme

$$(1) \quad \frac{d\mu}{dv} = \frac{1 - \mu^2}{v(\mu + \rho)}.$$

C'est sous cette forme que M. Drach détermine toutes les formes de la résistance  $F(v)$  rendant intégrable, par quadratures, l'équation de l'hodographe.

M. Denjoy, professeur à la Faculté des Sciences de Montpellier, mobilisé à la Commission de Gâvre, a bien voulu rédiger spécialement pour le présent Traité une Note sommaire indiquant les principes de cette solution qu'il a d'ailleurs, par ses travaux personnels, notablement perfectionnée en plusieurs points importants. C'est cette Note que nous reproduisons ici.

« Tous les principes suffisant à établir la théorie ont été publiés par M. Drach, dans une Note des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (mars 1914). Le 5 mars 1917, M. Drach a communiqué, au même corps savant, une étude très développée du même problème. Un exemplaire de ce Mémoire a été mis à la disposition du rédacteur du présent résumé.

» *Principe de la solution.* — Nous désignerons par  $A(\mu, v)$  ou abrégativement par  $A(\mu)$  le second membre de (1). Considérons l'équation aux dérivées partielles, corrélative de (1) :

$$(2) \quad \frac{\partial z}{\partial v} - A(\mu, v) \frac{\partial z}{\partial \mu} = 0.$$

» Si l'intégrale générale de (1) est connue et mise sous la forme  $\theta(\mu, v) = \text{const.}$ ,  $\theta$  mis à la place de  $z$  vérifie l'équation (2); et réciproquement, si  $z(\mu, v)$  est une solution particulière de (2) (dont l'intégrale générale est alors  $\psi(z)$ ,  $\psi$  étant une fonction arbitraire), et si, dans cette fonction  $z(\mu, v)$ , on remplace  $\mu$  par l'une quelconque des intégrales de (1),  $z$  prend une valeur constante (finie ou infinie), c'est-à-dire indépendante de  $v$ .

» Posons :

$$K = \left( \frac{\partial z}{\partial v} \right)^v \quad (v \text{ entier}),$$

$$J = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial \mu^2}}{\frac{\partial z}{\partial \mu}} \frac{\partial}{\partial \mu} \log \frac{\partial z}{\partial \mu} = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial \mu} \log K.$$

» La considération des fonctions  $K$  et  $J$  est fondamentale pour la théorie de M. Drach. Écrivons d'abord les relations entre  $A$  d'une part, et  $z$ ,  $K$  ou  $J$  d'autre part. D'après

$$\frac{\partial z}{\partial v} = K^{\frac{1}{v}}, \quad \frac{\partial z}{\partial \mu} = -AK^{\frac{1}{v}},$$

on trouve sans difficulté :

$$(2) \quad \frac{\partial z}{\partial v} + \Lambda \frac{\partial z}{\partial \mu} = 0 \quad \text{ou} \quad (2 bis) \quad \frac{\partial \log z}{\partial v} + \Lambda \frac{\partial \log z}{\partial \mu} = 0;$$

$$(3) \quad \frac{\partial \log K}{\partial v} + v \frac{\partial \Lambda}{\partial \mu} + \Lambda \frac{\partial \log K}{\partial \mu} = 0,$$

$$(4) \quad \frac{\partial J}{\partial v} + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \mu^2} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \mu} J + \Lambda \frac{\partial J}{\partial \mu} = 0.$$

» Un premier résultat fondamental à cette théorie et connu depuis une quinzaine d'années est le suivant :

» La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) soit intégrable par quadratures est qu'il existe au moins une solution  $z$  de (2) telle que  $z$  ou  $K$ , ou  $J$  soient rationnels en  $\mu$  (c'est-à-dire soient quotients de deux polynômes en  $\mu$ ,  $P(\mu)$  et  $Q(\mu)$ , dont les coefficients dépendent évidemment de  $v$ ).

» Ceci posé, selon que l'on égale  $z$ ,  $K$  ou  $J$  à une fonction rationnelle en  $\mu$ ,  $\frac{P}{Q}$ , dont on met en évidence soit les pôles, soit la décomposition en éléments simples, on trouve pour  $z$  diverses formes se ramenant aux trois types (I) suivants :

$$(I) \quad \begin{cases} 1^o & z = \Delta_1(v) (\mu - \alpha_1)^{\alpha_1} \dots (\mu - \alpha_n)^{\alpha_n}; \\ 2^o & z = \Delta_2(v) \int_{\mu_0}^{\mu} (\mu - \alpha_1)^{\alpha_1} \dots (\mu - \alpha_n)^{\alpha_n} d\mu + \theta_1(v); \\ 3^o & z = \Delta_3(v) \int_{\mu_0}^{\mu} (\mu - \alpha_1)^{\alpha_1} \dots (\mu - \alpha_n)^{\alpha_n} e^{R(\mu)} d\mu + \theta_2(v). \end{cases}$$

» La vérification des formules est immédiate.

» Les  $(\Delta_{123}, \theta_{12}, \alpha_i, \mu_0)$  sont indépendants de  $\mu$ .

» On démontre que les  $\alpha_i$  sont nécessairement des constantes. Pour  $\mu_0$ , on peut choisir indifféremment une fonction quelconque de  $v$ .  $R(\mu)$  est une fonction rationnelle de  $\mu$ .

» On ne considère évidemment que des fonctions  $\rho(v)$  (équation 1) et des intégrales  $z(\mu, v)$  réelles;  $\Delta_{123}$ ,  $\mu_0$ ,  $\theta_{12}$ , sont donc réels. Mais les  $\alpha$  et les  $\alpha$  peuvent être imaginaires. Ils sont alors respectivement deux à deux imaginaires conjugués. Dans ce cas, si

$$\alpha + bi = e^r(\cos \omega + i \sin \omega),$$

on utilise la formule

$$(\alpha + bi)^{\alpha + i\beta} (\alpha - bi)^{\alpha - i\beta} = e^{r\alpha - \beta^2 \omega + 2i\beta^2 \omega},$$

$k$  étant un entier positif, négatif ou nul.



» Donnons-nous simultanément : 1° le type (I) auquel appartient  $z$ ; 2° dans ce type, le nombre de facteurs  $(\mu - a_i)a_i^{\alpha_i}$ ; 3° pour le troisième type, le nombre des pôles de  $R(\mu)$  et l'ordre de chacun d'eux en les supposant distincts ou non des  $a$ .

» A ces données correspondra une forme générale de  $z$  contenant des coefficients  $\Delta$ ,  $a_i$ , etc.; que l'on considérera comme des fonctions indéterminées de  $v$ . Selon le type de  $z$ , on substituera l'expression de  $\log z$ ,

de  $\frac{\partial z}{\partial \mu} = K$ , de  $\frac{\partial \log \frac{\partial z}{\partial \mu}}{\partial \mu} = J$ , dans les équations (2 bis), (3) ou (4). On aura, dans ces divers cas, à identifier à zéro des fractions rationnelles en  $\mu$ , à coefficients indéterminés, fonctions de  $v$ . On écrira, par exemple, que la partie principale de ces fractions rationnelles est bornée en chacun de leurs pôles et nulle à l'infini. On trouvera ainsi des conditions (c) contenant les coefficients précédents et leurs dérivées, et aussi  $\rho(v)$  et  $v$  explicitement. En résolvant ces conditions (c) (que nous n'écrivons pas), on trouvera la fonction  $\rho(v)$  cherchée et l'expression de  $z$ . Ces conditions (c) sont en nombre égal à celui des fonctions inconnues  $\rho(v)$ ,  $a_i(v)$ , etc., et les déterminent en y admettant un certain nombre de constantes arbitraires (égal à une unité près, au nombre de ces fonctions).

» Le couronnement apporté par M. Drach à cette théorie (*C. R. Académie des Sciences*, mars 1914) a été de montrer que le système différentiel (c) s'intègre explicitement par des relations qu'on peut écrire dès que l'on possède les expressions en  $\mu$  et  $v$  de  $z$  et de  $\frac{\partial z}{\partial \mu}$  ( $v$  figurant en évidence ou par l'intermédiaire de fonctions à déterminer).

» Nous considérons  $z$  comme une *fonction analytique* de  $\mu$ , envisagée comme variant dans le *champ complexe*;  $v$  est alors un paramètre réel. La fonction  $a$  étant une fonction quelconque de  $v$ , nous disons que  $\mu = a$  est un *point régulier* pour  $z$ , si, dans un cercle  $|\mu - a| < r$  (quand  $a$  est fini),  $z$  est développable suivant les puissances positives entières de  $(\mu - a)$  (ou suivant les puissances entières non négatives de  $\frac{1}{\mu}$ , si  $a$  est infini). Les points  $m(v)$  non réguliers, ou *points singuliers* de  $z$ , sont en évidence dans les trois expressions. A distance finie, ce sont les  $a$ , pour lesquels l'exposant  $\alpha$  n'est pas un entier positif, et les pôles finis de  $R(\mu)$  (un pôle étant un point  $\mu = m$ , où  $\frac{1}{R}$  est régulier et nul). Les singularités de  $z$  relativement à  $\mu$  sont, en général, des fonctions de  $v$ , mais peuvent être constantes.

»  $z$  est en général une fonction non uniforme de  $\mu$ . D'après une propriété fondamentale des fonctions analytiques, toutes les déterminations de  $z$  satisfont à l'équation (2), donc sont fonctions de l'une d'entre elles.

» Une remarque essentielle est que toute singularité  $\mu = m(v)$  de  $z$  est une intégrale de (1). Car, ou bien  $z$  est infini en  $m$ , ou bien  $z$  y est indéterminé, ou bien  $z$  a une limite unique, mais n'est point uniforme au voisinage de  $m$ . Dans ces divers cas, les équations respectives  $\frac{1}{z} = 0$ ,  $z = C$  (quelle que soit la constante  $C$ ),  $z_1 - z_2 = 0$  (si  $z_1$  et  $z_2$  sont deux déterminations de  $z$  s'échangeant autour de  $m$ ) admettent pour solution  $\mu = m$ ;  $m(v)$ , rendant constant une intégrale de (2), est une intégrale de (1).

» On a donc, si  $m$  est variable,  $\frac{dm}{dv} = \frac{1-m^2}{v(m+\rho)}$ , ou encore  $m = 1$ ,  $m = -1$ ; ou enfin  $m = \infty$ , l'équation (1) admettant l'intégrale  $\mu = \infty$ , en ce sens que l'équation en  $\mu$ ,  $\mu = \frac{1}{\mu}$  admet l'intégrale  $\mu_1 = 0$ .

» Les principes, nous fournissant la solution complète du problème posé, sont les suivants :

» 1° Si dans l'équation (1) on pose  $\mu = \frac{\eta}{z}$ , et que l'on se donne

$$\eta(v_0) = \eta_0 \neq 0,$$

on constate que  $\eta v$  tend vers  $\eta_0 v_0$  si  $z$  tend vers zéro. De là cette règle : *Le terme prépondérant dans  $z$  (ou dans  $\log z$ , ou dans toute fonction de  $z$ ), pour les grandes valeurs de  $\mu$ , doit être une fonction de  $\mu v$  seulement, c'est-à-dire doit être invariable, si  $\mu$  et  $v$  varient séparément, leur produit restant constant.*

» 2° Chacune des valeurs 1, -1,  $\infty$  de  $\mu$ , étant une intégrale de (1), devra ou bien être singulière pour  $z$ , ou bien donner à  $z(\mu, v)$  une valeur constante.

» En particulier, si  $z$  est régulier à l'infini, il admettra pour les grandes valeurs de  $\mu$  un développement tel que  $C + \frac{\Lambda_0}{\mu} + \frac{\Lambda_1}{\mu^2} + \dots$ ,  $C$  étant constant.

» 3° Tout zéro étant régulier  $\mu = b(v)$  de  $\frac{\partial z}{\partial \mu}$  rend  $z$  constant. Car, annulant, par hypothèse  $\frac{\partial z}{\partial \mu}$ , il annule aussi  $\frac{\partial z}{\partial v}$ , d'après l'équation (2). On a donc  $z(b, v) = \text{const.}$

» 4°  $\mu = -\rho$  n'étant pas une solution de (1) (on excepte les cas banals  $\rho = \pm 1$ ),  $-\rho$  est un point régulier de  $\frac{\partial z}{\partial \mu}$  et de  $\frac{\partial z}{\partial v}$ , sans annuler

à la fois les deux fonctions. Donc, —  $\rho$  est un zéro simple et régulier de  $\frac{\partial z}{\partial \mu}$ .

» 5° Si,  $\mu$  se déplaçant autour d'un ou plusieurs points singuliers, et revenant à son point de départ,  $z$  éprouve une *substitution*  $pz + q$ , où  $p$  et  $q$  sont indépendants de  $\mu$ ,  $p$  et  $q$  seront aussi indépendants de  $r$ , donc *constants*.

» A une rotation de  $\mu$  autour du point  $\alpha_k$ , correspond, dans les trois cas, une substitution du type précédent, avec  $p = e^{2\pi i \alpha_k}$  ( $i$  étant le nombre imaginaire habituel). Donc, *tous les exposants  $\alpha_k$  sont constants*;  $q$  est nul dans le premier cas, mais non point dans les deux autres.

» 6° Dans le troisième type de  $z$ , si  $m$  est un pôle d'ordre  $r$ , fini ou infini de  $R(\mu)$ , *chacune des  $r$  valeurs limites finies possibles de  $z$ , quand  $\mu$  tend rectilignement vers  $m$ , est constante*.

» On montre, sans aucun calcul d'identification, que les six catégories de conditions énumérées sont suffisantes pour qu'une fonction  $z$  de l'un des trois types posés donne un quotient  $-\frac{dz}{dv} : \frac{\partial z}{\partial \mu}$  égal à  $\frac{1-\mu^2}{v(\mu+\rho)}$  (DENJOY, *Comptes rendus Ac. Sc.*, 1917).

» Nous allons appliquer les principes précédents à l'étude successive des trois types de  $z$ .

» *Exemples du premier type.* — L'intégrale générale est

$$z = \Delta_1(v) (\mu - \alpha_1)^{p_1} \dots (\mu - \alpha_n)^{p_n} = \text{const.},$$

les  $p_1, \dots, p_n$  étant constants, les inconnues sont  $\Delta_1$ , les  $\alpha$  et  $\rho$ .

» Appliquons successivement les quatre premières conditions :

» 1°  $\Delta_1(v) = v^{p_1 + \dots + p_n}$ . Si

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 0, \quad p_1 \alpha_1 + \dots + p_n \alpha_n = 0, \quad \dots, \quad p_1 \alpha_1^{m-1} + \dots + p_n \alpha_n^{m-1} = 0, \\ p_1 \alpha_1^m + \dots + p_n \alpha_n^m = \Lambda \neq 0,$$

on a

$$z = \left(1 - \frac{\alpha_1}{\mu}\right)^{p_1} \dots \left(1 - \frac{\alpha_n}{\mu}\right)^{p_n}$$

et  $\log z$  commence par  $-\frac{\Lambda}{m\mu^m}$ .

» Donc,  $\Lambda = \frac{C}{v^m}$ ,  $C$  étant une constante. D'ailleurs, d'après

$$\frac{\partial \log z}{\partial \mu} = \omega(\mu) = \sum \frac{p_i}{\mu - \alpha_i} = \frac{(\mu + \rho)P(\mu)}{(\mu - \alpha_1) \dots (\mu - \alpha_n)},$$

$P(\mu)$  étant un polynome,  $m$  est au plus égal à  $n - 2$ .

» 2°  $z(\infty, v)$  et aussi  $\log z(\infty, v)$  sont indépendants de  $v$ . On a, d'autre part,

$$\begin{aligned} z(1, v) &= v^{p_1 + \dots + p_n} (1 - \alpha_1)^{p_1} \dots (1 - \alpha_n)^{p_n} = C_0 \\ (-1)^{p_1 + \dots + p_n} z(-1, v) &= v^{p_1 + \dots + p_n} (1 + \alpha_1)^{p_1} \dots (1 + \alpha_n)^{p_n} = C'_0, \end{aligned}$$

les valeurs nulles ou infinies de  $C_0$  et  $C'_0$  signifiant que, respectivement, 1 et -1 sont parmi les  $\alpha$ .

» 3° 
$$\frac{p_1}{\alpha_1 + \rho} + \dots + \frac{p_n}{\alpha_n + \rho} = 0$$

» 4° Soit  $b_k(v)$ , un zéro quelconque de  $P(\mu)$ . On a

$$v^{p_1 + \dots + p_n} (b_k - \alpha_1)^{p_1} \dots (b_k - \alpha_n)^{p_n} = C_k,$$

les  $C$  étant constants.

» On vérifie que, dans tous les cas, il existe autant de relations que d'inconnues. Si  $P(\mu)$  possède son degré maximum  $n - 2$ , nous avons une solution comportant  $2n$  constantes arbitraires (les  $C_i$  et les  $p_n$ ), ou  $2n - 1$  constantes indépendantes (les rapports des  $p_k$  intervenant seuls).

» Le cas particulier le plus remarquable, par la disparition des équations du second et du quatrième groupe, est celui où 1 et -1 sont parmi les  $\alpha_k$  et où  $-\rho$  est le seul zéro fini et régulier de  $\frac{dz}{d\mu}$ .

» On a alors le système suivant d'équations, dont la première s'obtient en faisant  $\mu = 0$  dans les deux expressions de  $\omega(\mu)$  :

$$\left\{ \begin{aligned} \rho &= \frac{v^n}{(1)} \alpha_1 \dots \alpha_n \left( \frac{p_1}{\alpha_1} + \dots + \frac{p_n}{\alpha_n} + p_{n+1} - p_{n+2} \right), \\ p_1 + p_1 + \dots + p_n &+ p_{n+1} - p_{n+2} = 0, \\ p_1 \alpha_1 + \dots + p_n \alpha_n &+ p_{n+1} + p_{n+2} = 0, \\ p_1 \alpha_1^{n-1} + \dots + p_n \alpha_n^{n-1} &+ p_{n+1} + (-1)^{n-1} p_{n+2} = 0, \\ p_1 \alpha_1^n + \dots + p_n \alpha_n^n &+ p_{n+1} + (-1)^n p_{n+2} = \frac{(1)}{v^n}, \end{aligned} \right.$$

avec l'intégrale générale

$$(\mu + \alpha_1)^{p_1} \dots (\mu + \alpha_n)^{p_n} (\mu + 1)^{p_{n+1}} (\mu - 1)^{p_{n+2}} = \text{const.}$$

» Faisant  $n = 2$  dans ces dernières formules, nous trouvons le premier exemple de Siacci (240) :

$$\rho = A v \sqrt{2m + v^2} + B(m + v^2),$$

avec

$$p_1 = \alpha, \quad p_2 = -\beta, \quad p_3 = \frac{1+Bm}{2}(\beta-\alpha), \quad p_4 = \frac{1-Bm}{2}(\beta-\alpha), \quad C = m \frac{\beta-\alpha}{\alpha-\beta},$$

$$\alpha_1 = Bm - \frac{\sqrt{2m+v^2}}{\alpha v}, \quad \alpha_2 = BC - \frac{\sqrt{2m+v^2}}{\beta v},$$

$\alpha$  et  $\beta$  étant les racines de l'équation

$$(B^2 m^2 - 1)\omega^2 + 2Am\omega + 1 = 0,$$

supposée douée de racines  $(B^2 m^2 \neq 1)$  et distinctes  $[(A^2 - B^2)m^2 \neq 1]$ .

» Dans ces cas exceptionnels, le produit  $(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1^2 - 1)(\alpha_2^2 - 1)$  est nul. On constate, en donnant à  $A, B, m$  des valeurs infiniment voisines des valeurs critiques, et en multipliant, s'il le faut, les  $p_i$  et  $C$  par un même facteur convenable, que le second facteur de  $z$  est remplacé par un autre tel que  $e^{\frac{\gamma(v)}{\mu-1}}$ , ou  $e^{\frac{\gamma}{\mu+1}}$ , ou  $e^{\frac{\gamma}{\mu-a}}$ , ce qui nous conduit au type de  $z$ .

» Dans le *second exemple de M. Ouivet* (241),  $\frac{\partial z}{\partial \mu}$  n'a encore d'autre zéro que  $-\rho$ , et possède trois pôles simples distincts de 1 et de  $-1$ . Alors

$$\frac{\partial z}{\partial \mu} = \frac{\mu + \rho}{v(\mu - a)(\mu - b)(\mu - c)} = \frac{p_1}{\mu - a} + \frac{p_2}{\mu - b} + \frac{p_3}{\mu - c}.$$

On a les conditions

$$p_1 + p_2 + p_3 = 0,$$

$$p_1 a + p_2 b + p_3 c = \frac{C}{v},$$

$$(1 - a)^{p_1} (1 - b)^{p_2} (1 - c)^{p_3} = C_0,$$

$$(1 + a)^{p_1} (1 + b)^{p_2} (1 + c)^{p_3} = C'_0,$$

$$\rho = v(p_1 bc + p_2 ca + p_3 ab),$$

$$z = p_1 \log(\mu - a) + p_2 \log(\mu - b) + p_3 \log(\mu - c) = \text{const.}$$

qui résolvent le problème quelles que soient les constantes  $p_1, p_2, p_3$  et non pas seulement moyennant des relations particulières vérifiées par elles.

» Le *troisième exemple de M. Ouivet* (242), conduisant si  $\mu v = v$ , à une intégrale générale du type

$$(\varpi - v)^\alpha (\varpi + v)^\beta (\varpi - \zeta) = \text{const.}$$

où  $\zeta$  est une fonction inconnue de  $v$ , s'élucide entièrement ainsi. Soit :

$$z = v^{\alpha+\beta+1}(\mu-1)^{\alpha}(\mu+1)^{\beta}\left(\mu-\frac{\zeta}{v}\right) \quad (\alpha+\beta+1 \neq 1),$$

$$\frac{\partial \log z}{\partial \mu} = \omega(\mu) = \frac{\alpha}{\mu-1} + \frac{\beta}{\mu+1} + \frac{1}{\mu-\frac{\zeta}{v}} = \frac{(\alpha+\beta+1)(\mu+\rho)(\mu-b)}{(\mu^2-1)\left(\mu-\frac{\zeta}{v}\right)}.$$

On a

$$\frac{\alpha}{\rho-1} + \frac{\beta}{\rho+1} + \frac{1}{\rho-\frac{\zeta}{v}} = 0;$$

d'où

$$(1) \quad \frac{\zeta}{v} = \rho + \frac{\rho^2-1}{(\alpha+\beta)\rho+\alpha-\beta},$$

$$(2) \quad b = -\frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+1)\rho+(\alpha-\beta)^2+\alpha+\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta\rho+\alpha-\beta)}.$$

On écrit

$$(3) \quad v^{\alpha+\beta+1}(b-1)^{\alpha}(b+1)^{\beta}\left(b-\frac{\zeta}{v}\right) = C \quad (C \text{ constante arbitraire}).$$

» M. *Ouivet* trouve l'équation différentielle en  $\zeta$  et la résout moyennant certaines relations entre  $\alpha$  et  $\beta$ . En réalité, les variables étant séparées, l'intégration de cette équation est toujours évidente.

» Si  $\alpha+\beta+1=0$ , on est dans le cas de dégénérescence, pour  $n=1$ .

On a

$$\omega(\mu) = \frac{\alpha+\beta+1}{\mu} + \frac{\alpha-\beta\frac{\zeta}{v}}{\mu^2} + \dots = \frac{C(\mu+\rho)}{v^2(\mu^2-1)\left(\mu-\frac{\zeta}{v}\right)};$$

d'où

$$\alpha-\beta+\frac{\zeta}{v} = \frac{C}{v} \quad \text{et} \quad \frac{C}{\zeta}\rho = -\alpha+\beta-\frac{v}{\zeta},$$

et, finalement,  $\rho = av+b$ ,  $a$  et  $b$  étant deux constantes arbitraires, si  $C$  et  $\beta-\alpha$  le sont.

» *Exemples du second type.* — L'intégrale générale de (1) est

$$z(\mu, v) = \Delta_2(v) \int_{\mu_0}^{\mu} (\mu+\rho)(\mu-\alpha_1)^{\alpha_1} \dots (\mu-\alpha_n)^{\alpha_n} d\mu + \theta_1(v),$$

les  $\alpha_i$  étant constants.

» Nous rappelons les conditions générales énoncées plus haut par leurs numéros d'ordre.

» 1° On a toujours  $\Delta_2(v) = v^{k+1}$ , avec  $k = \alpha_1 + \dots + \alpha_n + 1$ ; si  $k+1 < 0$ ,  $\mu_0 = \infty$ ,  $\theta_1 = 0$ .

» Si  $k + 1 \geq 0$ ,  $\mu_0$  est fini, et pour  $k = -1$ ,  $\theta(v)$  est déterminé par la condition que, pour  $\mu$  très grand,  $z$  se développe ainsi :

$$z = \log \mu v + C + \frac{A_1}{\mu} + \dots \quad (C \text{ constant}).$$

On peut encore écrire dans le même cas ( $k = -1$ ) :

$$z = \int_{\infty}^{\mu} \left( \frac{\partial z}{\partial \mu} - \frac{1}{\mu + \delta} \right) d\mu + \log v (\mu + \delta),$$

$\delta$  étant une fonction arbitraire de  $v$ .

» 2° Si 1 et  $-1$  ne sont point parmi les points singuliers de  $\frac{\partial z}{\partial \mu}$ , nous devons écrire que l'expression de  $z$  prend les valeurs constantes  $C_0$ ,  $C'_0$  pour  $\mu = 1$ ,  $\mu = -1$ .

» 3° Elle prend une valeur  $C_i$  pour  $\mu = \alpha_i$ , si  $\alpha_i$  est un entier positif.

» 4° Soit  $\alpha_m$  un point singulier de  $\frac{\partial z}{\partial \mu}$ . Si nous décrivons de  $\mu_0$ , dans le sens direct, un lacet  $\lambda(\alpha_m)$  ou  $\lambda_m$ , entourant le seul point singulier  $\alpha_m$  et revenant à son point de départ, si nous intégrons  $\frac{\partial z}{\partial \mu}$  le long de ce lacet, la variation de  $z$  obtenue est un certain nombre  $\psi_m$ .

» Si  $\alpha_m$  est un pôle de  $\frac{\partial z}{\partial \mu}$  ( $\alpha_m$  entier négatif), on a  $\psi_m = 2i\pi R_m$ ,  $R_m$  étant le résidu de  $\frac{\partial z}{\partial \mu}$  en  $\alpha_m$ , c'est-à-dire le coefficient de  $\frac{1}{\mu - \alpha_m}$  dans le développement de  $\frac{\partial z}{\partial \mu}$  autour de  $\alpha_m$ .  $R_m$  est constant.

» En particulier, si  $\alpha_m = -1$ , on a

$$K_m = v^{k+1} (\alpha_m + \rho) (\alpha_m - \alpha_1)^{\alpha_1} \dots (\alpha_m - \alpha_{m-1})^{\alpha_{m-1}} (\alpha_m - \alpha_{m+1})^{\alpha_{m+1}} \dots (\alpha_m - \alpha_n)^{\alpha_n} = C_m$$

» Si  $\alpha_m$  est un point critique de  $\frac{\partial z}{\partial \mu}$  ( $\alpha_m$  non entier), la rotation de  $\mu$  autour de  $\alpha_m$  dans le sens direct remplace  $z$  par

$$e^{2i\pi\alpha_m} z + \psi_m - (1 - e^{2i\pi\alpha_m}) 0.$$

Donc chacun des nombres  $g_m = \frac{\psi_m}{1 - e^{2i\pi\alpha_m}} - \theta$  est constant.

» Soit  $h$  le nombre des entiers  $m$  tels que  $\alpha_m$  ne soit pas entier positif. Les différences  $(g_m - g_r)(1 - e^{2i\pi\alpha_m})(1 - e^{2i\pi\alpha_r})$  sont des fonctions  $\Omega_{m,r}$  des coefficients  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ . Toutes satisfont, relativement à chacun d'eux, à une équation différentielle linéaire d'ordre  $k-1$  au plus, les coefficients de ces équations étant rationnels en  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ . Toute

intégrale de ce système d'équations (et il y a  $h-1$  intégrales distinctes) doit être égale à une constante.

» Il est bon d'observer que le lacet  $\lambda(\infty)$  partant de  $\mu_0$  pour y revenir et englobant tous les points critiques  $\alpha_m$  à son intérieur, peut se décomposer en la succession des  $\lambda_m$ . Donc la variation  $\psi_\infty$  que  $z$  éprouve éventuellement le long de  $\lambda(\infty)$  nous donne une relation susceptible de remplacer l'une des précédentes, mais sans être distincte de leur ensemble.

» Selon le nombre de points critiques de  $\frac{\partial z}{\partial \mu}$ , nous examinons successivement plusieurs cas.

» A. *Pas de point critique.* —  $\frac{\partial z}{\partial \mu}$  est rationnel en  $\mu$ , avec des pôles d'ordre 2 au moins, ou une partie entière, afin que  $z$  ne soit pas du premier type. On peut se donner *a priori* :

$$z = c_r \mu^r + c_{r-1} \mu^{r-1} + \dots + c_0 + \frac{c_1 \cdot s_1}{(\mu - \alpha_1)^{s_1}} + \frac{c_1 \cdot s_1 - 1}{(\mu - \alpha_1)^{s_1-1}} + \dots \\ + \frac{c_1 \cdot s_1}{\mu - \alpha_1} + p_1 \log(\mu - \alpha_1) + \frac{c_1 \cdot s_2}{(\mu - \alpha_2)^{s_2}} + \dots$$

les  $p_i$  étant constants et les  $c_i$ ,  $c_{ij}$ ,  $\alpha$  étant des fonctions inconnues de  $v$ . On identifie  $\frac{\partial z}{\partial \mu}$  avec

$$\frac{P(\mu)(\mu + \rho)}{(\mu - \alpha_1)^{s_1+1} \dots (\mu - \alpha_n)^{s_n+1}},$$

$P(\mu)$  étant un polynôme. On peut se donner arbitrairement l'entier  $n$ , les entiers  $s_1, \dots, s_n$ , le degré  $m$  de  $P(\mu)$  et les constantes  $p$ . Le premier coefficient de  $P(\mu)$  sera alors  $C_1^{m+1-s_1-\dots-s_n-n}$ ; on écrira que toutes les racines de  $P(\mu) = 0$  substituées à  $\mu$  dans  $z$ , rendent  $z$  constant, ainsi que  $\mu = 1$ , et  $\mu = -1$  [ $z(1)$  et  $z(-1)$  pouvant être infinis]. On pourra obtenir  $\rho$  en faisant  $\mu = 0$  dans les deux expressions de  $\frac{\partial z}{\partial \mu}$ .

» Le cas le plus remarquable est celui où  $P(\mu)$  est indépendant de  $\mu$ , et où 1 et -1 figurent parmi les  $\alpha_n$ . Les équations d'identification des deux expressions de  $\frac{\partial z}{\partial \mu}$  donnent alors toutes les inconnues  $c_{ij}$ ,  $\alpha$  (les  $c_i$  et  $p_1 + \dots + p_n$  sont nuls).

» *Exemple :*  $\frac{\partial z}{\partial \mu} = \frac{v(\mu + \rho)}{\mu - \alpha}$ . On a deux inconnues,  $\rho$  et  $\alpha$ , si  $\alpha \neq 1$ , une seule inconnue  $\rho$  si  $\alpha = \pm 1$ . Nous écrirons

$$z = v \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{\mu + \rho}{\mu - \alpha} d\mu = v \left[ \mu - \mu_0 + (\alpha + \rho) \log \frac{\mu - \alpha}{\mu_0 - \alpha} \right],$$



avec  $\mu_0 = -1$ , si  $\alpha + 1 \neq 0$ ,  $\mu_0 = 1$ , si  $\alpha = -1$ . On trouve :

$$» 5^{\circ} \quad \alpha + \rho = \frac{p}{v} \quad (p \text{ constant}) :$$

d'où  $\rho$ , si  $\alpha = \pm 1$ , et, en outre, si  $\alpha^2 \neq 1$ ,

$$v \int_{-1}^{+1} \frac{\mu + \rho}{\mu - \alpha} d\mu = -C_0 ;$$

d'où

$$\alpha = \frac{\frac{e_0 + 2v}{e} \frac{p}{v} - 1}{\frac{e_0 + 2v}{e} \frac{p}{v} + 1}, \quad \text{avec} \quad \tilde{\rho} = \frac{p}{v} - \alpha.$$

» C'est le *premier exemple de M. Ouivet* (242) dont l'équation est, moyennant une condition imposée à  $\rho$ ,

$$-\frac{ds}{s^3 + ks^2} + v(1 - \rho^2) dv = 0,$$

en posant  $s = \frac{1}{v(\mu + \rho)}$ ,

» En égalant à  $dz$  le premier membre de l'équation de M. Ouivet, on a immédiatement l'expression ci-dessus de  $\frac{\partial z}{\partial \mu}$ .

» B. *Un seul point critique.* — C'est la forme

$$z = v_{k+1} \int_{\mu_0}^{\mu} (\mu - \zeta)^{\alpha} (\mu + \rho) (\mu - \alpha_1)^{\alpha_1} \dots (\mu - \alpha_n)^{\alpha_n} d\mu,$$

avec  $k = \alpha + \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ , les  $\alpha_i$  (mais non pas  $\alpha$ ) étant des *entiers* positifs ou négatifs que l'on peut se donner.

» Si  $k + 1 < 0$ , on fait  $\mu_0 = \infty$ . Si  $k + 1 > 0$ , et si l'un des  $\alpha_i$  est positif, ou si  $1, -1$  ne sont point supposés parmi les  $\alpha_i$  à exposants négatifs, ou si  $\alpha > -1$ , on peut prendre  $\mu = \alpha_i$ , ou  $= 1$ , ou  $= -1$ , ou  $= \zeta$ . On voit aisément que l'une au moins de ces hypothèses est vérifiée.

» On a  $n + 2$  inconnues, les  $\alpha_i$ ,  $\rho$ ,  $\zeta$ . A tout  $\alpha_i$  d'exposant négatif, correspond la condition des résidus. A tout  $\alpha_i$  d'exposant positif, correspond la condition  $z(\alpha_i, v) = c_i$ . Enfin, on écrit

$$z(1, v) = c_0, \quad z(-1, v) = c'_0.$$

On a ainsi  $n + 2$  conditions.

» Supposons, par exemple, que  $\frac{\partial z}{\partial \mu}$  n'ait d'autre zéro régulier que  $-\rho$ ,

et que tous ses pôles soient simples. On a

$$\frac{\partial z}{\partial \mu} = (\mu - \zeta)^{\alpha} \left( \frac{c_1}{\mu - a_1} + \dots + \frac{c_n}{\mu - a_n} \right) = C v^{\alpha+2-n} \frac{(\mu - \zeta)^{\alpha} (\mu + \rho)}{(\mu - a_1) \dots (\mu - a_n)},$$

$p_1, \dots, p_n$ ,  $C$  étant des constantes, on a

$$c_1(a_1 - \zeta)^{\alpha} = p_1, \dots, c_n(a_n - \zeta)^{\alpha} = p_n;$$

et si  $\Lambda_n = c_1 a_1^m + \dots + c_n a_n^m$ ,  $\Lambda_n = 0$  pour  $m = 0, 1, \dots, n-3$ ,  
et  $\Lambda_{n-2} = C(\alpha+2-n)$ ,

$$\rho = \frac{(-1)^{n-1} n^{\alpha+2-n}}{C} a_1 a_2 \dots a_n \left( \frac{c_1}{a_1} + \dots + \frac{c_n}{a_n} \right).$$

On a là autant d'équations que d'inconnues si l'on suppose que 1 et  $-1$  sont parmi les  $a_i$ .

» On a, par exemple :

$$z = v^{\alpha} \int_{\mu_0}^{\mu} (\mu - \zeta)^{\alpha} \frac{\mu + \rho}{\mu^2 - 1} d\mu.$$

$$v(1 - \zeta)(1 + \rho)^{\frac{1}{2}} = C \quad \text{et} \quad v(1 + \zeta)(1 - \rho)^{\frac{1}{2}} = C';$$

d'où  $\zeta$  et  $\rho$ .

» C. Deux points critiques. -- On a

$$z = \int_{\mu_0}^{\mu} (\mu - \zeta_1)^{\alpha} (\zeta_2 - \mu)^{\beta} R(\mu) d\mu.$$

$\mu_0$  étant choisi parmi les nombres  $\infty, \zeta_1, \zeta_2, 1, -1$  ou les zéros de  $R(\mu)$ , qui est rationnel en  $\mu$ .

» Si, pour  $\mu$  infini,  $R(\mu)$  est d'ordre  $m$ , positif ou négatif, sa partie principale sera  $v^{\alpha+\beta+m+1} \mu^m$ .

» Aux équations du cas B s'en ajoute un autre  $\varphi \left( \frac{\partial z}{\partial \mu} \right) = \text{const.}$  Multiplié par  $(1 - e^{2i\pi\alpha})(1 - e^{2i\pi\beta})$ ,  $\varphi$  est l'intégrale de  $\frac{\partial z}{\partial \mu}$  prise le long d'un contour se croisant lui-même en  $\mu_0$ , entourant les points singuliers  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$ , et parcouru deux fois, mais en passant en chaque point avec des sens différents les deux fois. Pour évaluer  $\varphi \left( \frac{\partial z}{\partial \mu} \right)$ , on décompose  $R(\mu)$  en éléments simples  $h(\mu)$  et la période  $\varphi \left( \frac{\partial z}{\partial \mu} \right)$  est la somme des périodes  $\varphi(h)$ , la détermination de  $(\mu - \zeta_1)^{\alpha} (\zeta_2 - \mu)^{\beta}$ , dans chacun des éléments  $h$ , étant supposée la même en tout point du double contour.

» 1° Sachant que  $\varphi[t^{p-1}(1-t)^{q-1}]$  [qui coïncide, si  $p$  et  $q$  sont

positifs avec  $\int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt$  vaut  $\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$  ( $\Gamma$  est la fonction interpolant les factorielles), on a, si  $E(\mu)$  est la partie entière de  $R(\mu)$  :

$$\begin{aligned} & \varphi[(\mu - \zeta_1)^\alpha (\zeta_2 - \mu)^\beta E(\mu)] \\ &= \left( \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2} \right)^{\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\ & \times \sum \frac{(\alpha+1)\dots(\alpha+p)}{(\alpha+\beta+1)\dots(\alpha+\beta+p+1)p!} \frac{\partial^p E(\zeta_1, v)}{\partial \zeta_1^p} (\zeta_2 - \zeta_1)^p. \end{aligned}$$

Ainsi, pour

$$z = v^{\alpha+\beta+2} \int_{\mu_0}^{\mu} (1+\mu)^\alpha (\mu-1)^\beta (\mu+\varphi) d\mu \quad (\alpha+\beta+2 > 0),$$

( $\mu_0 = \infty, -1$  ou  $1$ ),

on trouve

$$\left( \frac{\varphi-1}{2} + \frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+2} \right)^{\alpha+\beta+2} = \frac{\alpha}{2},$$

$\alpha$  étant une constante, et en posant  $n = \alpha + \beta + 2$ ,  $b = \frac{\beta-2}{n}$ , il reste  $\varphi = av^n + b$  (première forme de d'Alembert) (239). En faisant dans cette formule

$$\alpha = \frac{2C}{n} + k, \quad \beta - \alpha = 2c, \quad \text{d'où} \quad \varphi = 2C \frac{v^2-1}{n} + k,$$

et en faisant tendre  $n$  vers zéro, on obtient la *troisième forme* de d'Alembert  $\varphi = 2C \log v + k$ , avec l'intégrale générale

$$\int_{\mu_0}^{\mu} (1+\mu)^{-1-2c} (1-\mu)^{-1+2c} (\mu+k+2C \log v) d\mu = \text{const.} \quad (p_0 = -1 \text{ ou } +1).$$

» 2<sup>o</sup> Pour les périodes de la partie fractionnaire de  $R(\mu)$ , il suffit d'avoir

$$\varphi \left[ \frac{(\mu - \zeta_1)^\alpha (\zeta_2 - \mu)^\beta}{(\mu - \alpha)^{p+1}} \right] = F_p(\alpha) \quad (p \text{ entier positif ou nul}).$$

» Si  $p > 0$ ,  $F_p(\alpha) = \frac{1}{p!} \frac{\partial^p F_0(\alpha)}{\partial \alpha^p}$ . D'ailleurs,  $F_0(\alpha)$  satisfait en  $\alpha$  à une équation linéaire du second ordre facile à former (voir PICARD, *Traité d'Analyse*, t. III) et admettant pour intégrale particulière le résidu en  $\alpha$  de la fonction sous le signe  $\varphi$ , soit  $(\alpha - \zeta_1)^\alpha (\zeta_2 - \alpha)^\beta$ . Posons

$$\Omega_1(\alpha) = (\zeta_2 - \zeta_1)^{\alpha+\beta+1} \int_{\frac{\zeta_1+\zeta_2}{2}}^{\alpha} \frac{d\alpha}{(\alpha - \zeta_1)^{\alpha+1} (\zeta_2 - \alpha)^{\beta+1}}.$$

» Si la partie fractionnaire de  $R(\mu)$  est

$$\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{c_{i,p}}{(\mu - \alpha_i)^p},$$

la période correspondante est

$$\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{c_{i,p}}{(p-1)!} \Omega_{i,p-1}(\alpha_i).$$

Ajoutée à la période fournie par  $E(\mu)$ , elle doit donner une somme constante.

» On a des cas particuliers simples en supposant que  $-\varphi$  est le seul zéro de  $R(\mu)$ , que  $1, -1$ , sont parmi les singularités de  $\frac{\partial z}{\partial \mu}$ , et enfin, si les pôles de  $R(\mu)$  ont un ordre au moins égal à 2, que leurs résidus sont nuls. On obtient alors des fonctions  $\varphi$  dépendant de trois constantes arbitraires (ou de deux, si  $\alpha + \beta + 2n + 1 = 0$ ) et dont les plus simples ( $\zeta_1 = 1, \zeta_2 = -1, n = 1$ , le pôle étant double) sont celles de d'Alembert :  $av^n + b + cv^{-n}$  et  $a(\log^2 v) + b \log v + c$ , les constantes  $a, b, c, n$  dans le premier cas,  $a, b, c$  dans le second étant liées par une relation.

» C'est dans ce cas C que rentrent les quatrième et cinquième exemples de Siacci (241).  $R(\mu)$  a deux pôles qui sont  $1$  et  $-1$ , l'un et l'autre simples.  $R(\mu)$  n'a d'autre zéro que  $-\varphi$ . (Dans le quatrième exemple, on a  $\alpha = \beta$ , ce qui ne simplifie pas sensiblement les résultats; dans le cinquième,  $\alpha + \beta = 0$ , cas de dégénérescence de la fonction générale.)

» On a donc

$$z = v^{\alpha+\beta} \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{(\mu - \zeta_1)^{\alpha} (\zeta_2 - \mu)^{\beta} (\mu + \varphi)}{1 - \mu^2} d\mu \quad (\mu_0 = \alpha, \zeta_1 \text{ ou } \zeta_2)$$

moyennant

$$v^{\alpha+\beta} (1 - \zeta_1)^{\alpha} (\zeta_2 - 1)^{\beta} (1 + \varphi) = 2p_1,$$

$$v^{\alpha+\beta} (1 + \zeta_1)^{\alpha} (1 + \zeta_2)^{\beta} (\varphi - 1) = 2p_2,$$

$$\text{et, si } \varphi(w) = \int_1^w \frac{dw}{w^{\alpha+1} (1 - w)^{\beta+1}},$$

$$p_1 \varphi\left(\frac{1 - \zeta_1}{\zeta_2 - \zeta_1}\right) - p_2 e^{i\pi\alpha} \varphi\left(\frac{-1 - \zeta_1}{\zeta_2 - \zeta_1}\right) = C,$$

$p_1, p_2, C$  étant des constantes arbitraires.

» Si  $\alpha + \beta = 0$ , posant

$$\varphi_0(w) = \int_1^w \frac{u^{-\beta}}{1 + u} du,$$

on remplace la dernière équation par celle-ci :

$$\rho \log[v(\zeta_2 - \zeta_1)] = p_1 \varphi_0 \left[ \left( \frac{1+\rho}{2\rho_1} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right] + p_2 e^{i\pi\alpha} \varphi_0 \left[ - \left( \frac{\rho+1}{2\rho_2} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right] + C.$$

Ces conditions résolvent dans toute sa généralité le problème posé par Siacci dans ce passage de son Mémoire (241).

» D. *Trois points critiques.* — C'est le cas du troisième exemple de Siacci correspondant à l'intégrale générale

$$z = v^{x+\beta+2} \int_{\mu_0}^{\mu} (1+\mu)^{\alpha} (1-\mu)^{\beta} (\mu-\alpha)^{\gamma} (\mu+\rho) d\mu,$$

avec  $\mu_0 = \infty, -1, 1$  ou  $\alpha$ . Il y a deux inconnues  $\alpha$  et  $\rho$ .

» Si  $G(\alpha)$  est une période de

$$\int_{\mu_0}^{\mu} (1+\mu)^{\alpha} (1-\mu)^{\beta} (\mu-\alpha)^{\gamma+1} d\mu,$$

$z$  a pour période

$$v^{x+\beta+\gamma+2} \left[ G(\alpha) + \frac{\alpha+\rho}{\gamma+1} G'(\alpha) \right].$$

$G$  satisfait à l'équation

$$(\alpha^2-1)G''(\alpha) - [(1+\alpha+\beta+\gamma+1)\alpha+\beta-\alpha]G'(\alpha) + (\gamma+1)(\alpha+\beta+\gamma+2)G(\alpha) = 0.$$

$G$  se rattache facilement à la fonction hypergéométrique. Si  $G_1$  et  $G_2$  sont deux intégrales distinctes de l'équation en  $G(\alpha)$ , on doit avoir

$$\begin{aligned} G_1(\alpha) + \frac{\rho+\alpha}{\gamma+1} G'_1(\alpha) &= p_1 v^{-2} \alpha^{-\beta-\gamma}, \\ G_2(\alpha) + \frac{\rho+\alpha}{\gamma+1} G'_2(\alpha) &= p_2 v^{-2} \alpha^{-\beta-\gamma}, \end{aligned}$$

$p_1$  et  $p_2$  étant deux constantes.

» Si  $\alpha + \beta + \gamma + 2 = 0$ , les deux équations précédentes se confondent. On posera  $\gamma = -2 - \alpha - \beta + \varepsilon$ , et l'on remplacera la seconde par une combinaison des deux convenablement choisie et tendant vers une expression limite pour  $\varepsilon = 0$ .

» *Exemples du troisième type.* — Les deuxième, septième et sixième exemples de Siacci (241) appartiennent à ce type et correspon-

donnent respectivement aux formes :

$$(A_1) \quad z = \Delta_3(v) \int_{-\infty}^{\mu} (1 + \mu^2)^2 (1 - \mu)^{\beta} e^{cv\mu} d\mu,$$

$$(B_1) \quad z = \Delta_1(v) \int_{-\infty}^{\mu} \frac{(v + \rho)}{1 - \mu^2} (\mu\alpha)^{\rho} e^{cv\mu} d\mu,$$

$$(C_1) \quad z = \Delta_3(v) \int_{-\infty}^{\mu} e^{-(v^2\mu - \alpha + \frac{\mu + \rho}{1 - \mu^2})} d\mu.$$

$c$  étant constant et positif. Le nombre d'inconnues est respectivement 2, 3 et 3.

» Pour le cas (A<sub>1</sub>) si l'on désigne par  $G(w)$  la variation de

$$\int_{-\infty}^{\mu} (1 - \mu)^{\alpha} (1 - v)^{\beta} e^{w\mu} d\mu,$$

sur un lacet issu de  $-\infty$  et  $y$  revenant après avoir tourné autour de 1 ou de  $-1$ , on a

$$wG'' - (\alpha + \beta + 1)G'(w) + (w + \beta - \alpha)G(w) = 0;$$

(G<sub>1</sub> et G<sub>2</sub> étant deux intégrales distinctes de cette équation, les conditions résolvant le problème sont :

$$\Delta_3(v) [\rho G_1(cv) - G'_1(cv)] = p_1,$$

$$\Delta_3(v) [\rho G_2(cv) - G'_2(cv)] = p_2,$$

$p_1$  et  $p_2$  étant deux constantes arbitraires; d'où

$$\rho = \frac{p_1 G'_1 - p_2 G'_2}{p_1 G_1 - p_2 G_2},$$

$\rho$  est donc la dérivée logarithmique d'une intégrale quelconque de l'équation en  $G$ . Les développements des fonctions  $G$  se déduisent aisément de la fonction hypergéométrique et sont donnés par Siacci.

» Dans le cas (B<sub>1</sub>), la condition des résidus donne

$$\Delta_3(1 + \rho) (1 - \alpha)^{\rho} e^{cv} = 2p_1$$

$$\Delta_3(\rho - 1) (\alpha - 1)^{\rho} e^{-cv} = 2p_2 \quad (p_1 \text{ et } p_2 \text{ constants}).$$

» Si  $b(w)$  est la variation, sur un lacet issu de  $-\infty$  pour  $y$  revenir, de

l'intégrale  $\int_{-\infty}^{\mu} \frac{(1-t)^{\rho}}{t} e^{-wt} dt$ , on trouve

$$G = k \int_w^{\infty} \frac{e^{-w}}{(w^{\rho+1})} dw + k_1 \quad (k \text{ et } k_1 \text{ constants});$$

d'où, pour la période correspondante de  $z$ , la condition

$$p_1 \int_{v(1+n)}^{\infty} \frac{e^{-w}}{w^{p+1}} dw + p_2 \int_{v(a-1)}^{\infty} \frac{e^{-w}}{w^{p+1}} dw = p_3 \quad (p_3 \text{ constante arbitraire}).$$

» Si  $p$  est un entier négatif, cette dernière condition, immédiatement résoluble, exprime que le résidu de  $\frac{\partial z}{\partial p}$  en  $\dots a$  est constant.

» Dans le cas ( $C_1$ ), la condition des résidus donne encore

$$\Delta_3 e^{-cv^2(1-a)^2} (1 + \rho) = 2p_1,$$

$$\Delta_3 e^{-cv^2(1+a)^2} (\rho - 1) = 2p_2.$$

» Il faut ensuite utiliser la condition ( $G^0$ ) de la théorie générale, et exprimer que la valeur limite de  $z$  pour  $\mu = +\infty$ ; donc l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-cv(\mu-a)^2} \frac{\mu + \rho}{1 - \mu^2} d\mu$$

est constante.

» On pose

$$H(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u-t} du, \quad \text{d'où} \quad H(t) = c_0 e^{-t^2} \int_0^t e^{t^2} dt + c'_0$$

(les valeurs des constantes  $c_0$  et  $c'_0$  nous étant indifférentes). La condition cherchée est

$$p_1 \int_0^{(a-1)v\sqrt{c}} e^{t^2} dt + p_2 \int_0^{-(1+a)v\sqrt{c}} e^{-t^2} dt = p_3.$$

» *Conclusions.* — Ainsi se trouvent résolus, dans toute leur généralité, les divers problèmes de détermination de fonctions  $\rho(v)$ , posés par les géomètres qui, avant M. Drach, se sont occupés d'intégrer l'équation (1). Le lecteur a pu observer la puissance de la méthode de M. Drach, l'unité et l'ordre systématique introduits par elle dans un sujet où les chercheurs précédents, guidés par la seule ingéniosité, devaient leur succès à des artifices parfois très éloignés des raisons essentielles des faits.

» Il est cependant juste de rendre hommage au profond sens mathématique de Siacci, qui a eu l'intuition de chacune des trois formes possibles de l'intégrale générale.

» Nous ferons encore observer que ce problème éminemment pratique : « Obtenir toutes les expressions de la résistance de l'air, rendant intégrable par quadrature l'équation de la Balistique Extérieure », ce problème trouve sa solution totale et relativement simple dans l'appli-

cation des résultats fondamentaux de la théorie des fonctions de variable complexe. Grâce à elle, les intégrales premières, résolvant entièrement la question, se justifient en toute simplicité. Et l'on n'aperçoit guère par quel détour il serait possible de s'affranchir de la considération des imaginaires, même en perdant le bénéfice des explications rapides et parfaitement satisfaisantes qu'elles nous fournissent. A cet égard, la découverte de M. Drach paraît inscrire à l'actif de l'Analyse des variables complexes, un très remarquable succès d'utilisation pratique. » (Denjoy.)

**244. Problème de M. Denjoy.** -- « Parmi les fonctions  $\rho(v)$  obtenues dans les pages précédentes, il conviendrait de retenir uniquement, comme se rapprochant seules de la fonction expérimentale, celles qui satisfont aux conditions suivantes : 1°  $\rho(v)$  est positif; 2°  $\rho(v)$  est croissant avec  $v$ , 3° et 4°  $\frac{\rho(v)}{v^2}$  tend vers une limite non nulle d'une part pour  $v = 0$ , d'autre part pour  $v$  infini; 5°  $\rho(v)$  doit contenir en facteur une constante arbitraire.

» Cette dernière condition résulte de ce que  $\rho(v)$  est le quotient de la résistance de l'air par le poids du projectile. La première fonction ne dépendant que de la forme extérieure de ce dernier, pour deux projectiles de même forme, mais de masses différentes,  $\rho(v)$  sera modifié, quel que soit  $v$ , dans le rapport de ces masses. Bien entendu, nous admettons ainsi l'hypothèse préliminaire à l'écriture de l'équation (1), savoir que la résistance de l'air possède une résultante de translation tangente à la trajectoire du centre de gravité, et ne dépendant que de la forme extérieure du projectile.

» Sur les trois parties du problème posé, il est aisé de donner la solution des deux premières.

» On a vu précédemment que, si  $z(\mu, v) = \text{const.}$  est l'intégrale générale de l'équation

$$(1) \quad \frac{d\mu}{dv} = \frac{1 - \mu^2}{v(\mu + 1 + \varphi)},$$

les singularités de  $\frac{dz}{d\mu}$ , relativement à la variable complexe  $\mu$ , sont des intégrales de l'équation (1). D'où la nécessité d'étudier l'allure d'une solution de (1) pour les petites et pour les grandes valeurs positives de  $v$ .

**I. Petites valeurs de  $v$ .** -- Convenons de dire que  $\varphi(v)$  est du type normal à l'origine, si  $\varphi(v)$  décroît continûment à zéro simultanément



ment avec  $v$ . On montre que, sous cette seule condition, le produit  $\mu v$  tend, pour  $v = 0$ , vers une limite (réelle ou complexe)  $\frac{1}{\gamma}$  non nulle, sauf dans le cas  $\mu^2 = 1$ . De plus, la valeur limite  $\frac{1}{\gamma}$  caractérise l'intégrale  $\mu$ , en ce sens qu'à deux intégrales  $\mu_1, \mu_2$  distinctes, correspondent deux valeurs limites  $\frac{1}{\gamma_1}, \frac{1}{\gamma_2}$  différentes. Le changement de variable

$$\mu = \frac{1}{v} \left( u + \int_0^v \varphi \, dv \right)$$

donne l'équation

$$(2) \quad \frac{du}{dv} = \frac{h_2}{u + \Pi_1} \quad \left( h_2 = \int_0^v v(1 - \varphi^2) \, dv, \quad \Pi_1 = v\varphi + \int_0^v \varphi \, dv \right),$$

$u$  se met sous la forme

$$(3) \quad u = \frac{1}{\gamma} + h_2 \gamma^{-1} + \dots + h_n \gamma^{n-1} + \dots,$$

la série étant convergente quel que soit  $\gamma$  donné, pourvu que  $v$  soit assez petit;  $h_n$ , nul avec  $v$  pour toute valeur de  $n$ , est de l'ordre de  $v^n$ , si  $n$  est pair, d'un ordre au plus égal à celui de  $v^n \varphi$ , si  $n$  est impair. Ce développement ne convient ni à l'une ni à l'autre des intégrales

$$u = \Psi_1 = v - \int_0^v \varphi \, dv, \quad u = \Psi_2 = -v - \int_0^v \varphi \, dv,$$

correspondant respectivement à  $\mu = 1$  et à  $\mu = -1$ .

» Si la fonction  $\varphi(v)$  rend en outre l'équation (1) intégrable par quadratures, nous savons que l'on a

$$\frac{\partial z}{\partial \mu} = (\mu - a_1)^{\rho_1} (\mu - a_2)^{\rho_2} \dots e^{R_1(\mu)},$$

$R(\mu)$  étant rationnel en  $\mu$ , ou parcellément,  $z = \text{const.}$  étant, l'intégrale générale de (2) :

$$\frac{\partial z}{\partial u} = (u - u_1)^{\rho_1} \dots (u - u_n)^{\rho_n} (u - \psi_1)^{\sigma_{n+1}} (u - \psi_2)^{\rho_{n+2}} e^{R_0(u)},$$

$\rho_{n+1}$  et  $\rho_{n+2}$  pouvant être nuls.

»  $R_0(u)$  possède, au voisinage de chacune de ses singularités polaires  $u_r$ , un développement tel que

$$\sum_{m=1}^{m=q} \lambda_{r,m} \frac{\partial^m}{\partial \gamma^m} \log(u - u_r),$$

si  $q$  est l'ordre du pôle  $u$ , et si  $\frac{1}{\gamma_r}$  est la valeur de  $u$ , pour  $r = 0$ . Les  $\lambda_r$  sont des constantes quelconques. Si  $R_0(u)$  a une partie entière de degré  $q$ , les termes correspondants forment une somme

$$\sum_{m=1}^{m=q} \lambda_m \left[ \frac{\partial}{\partial \gamma_0} \log \gamma_0 (u - u_0) \right]_{\gamma_0=0},$$

$\frac{1}{\gamma_0}$  étant la valeur de  $u_0$  pour  $r = 0$ .

» Les coefficients de la décomposition en fraction simple de  $R$  pour les pôles  $u$ , et  $\infty$  sont tous finis et aisément développables à l'aide des  $h_n$  et de  $H_1$ , pour les petites valeurs de  $v$ , les  $\gamma_r$  étant donnés.

» Au contraire, les coefficients des parties principales relatives aux pôles  $u = \Psi_1$  et  $u = \Psi_2$  sont infiniment grands avec  $\frac{1}{v}$ .

» Si l'on remplace, dans  $z(u, v)$ ,  $u$  par l'expression (3),  $z$  devient une fonction de  $\gamma$  et de  $v$ , constante toutes les fois que  $\gamma$  l'est elle-même, puisque toute valeur constante de  $\gamma$  définit une intégrale  $u$  de l'équation (2). Donc,  $z$ , après cette substitution, est indépendant de  $v$ , et il en est évidemment de même de  $\frac{\partial z}{\partial \gamma} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \gamma}$ . Or,  $\log \frac{\partial z}{\partial \gamma}$  se développe aisément suivant les puissances croissantes de  $\gamma$ . *Tous les coefficients de ce développement doivent être indépendants de  $v$ .* On aboutit facilement à la conclusion suivante :

» Les seules formes de  $\frac{\partial z}{\partial \mu}$  pouvant donner une fonction  $\varphi(v)$  du type normal à l'origine sont

$$\frac{\partial z}{\partial \mu} = \frac{1}{(\mu^2 - 1)^{1 + \frac{\alpha}{2}}} e^{\frac{c_1}{\mu-1} + \frac{d_1}{\mu+1}} \Omega(\mu),$$

$\Omega(\mu)$  étant régulier pour  $\mu = \pm 1$ , et la somme  $c_1 + d_1$  étant finie pour  $v = 0$  (tandis que  $c_1$  et  $d_1$  sont, soit identiquement nuls, soit infiniment grands avec  $\frac{1}{v}$ ).

» A. Si  $c_1$  et  $d_1$  ne sont pas nuls,  $\varphi(v)$ , s'il est normal, est d'ordre entier impair au moins égal à 3.

» B. Si  $c_1$  et  $d_1$  sont nuls,  $\varphi(v)$ , s'il est du type normal, est d'ordre entier impair positif : 1° quand  $\alpha < 0$ ; 2° quand  $2p - 1 < \alpha < 2p + 1$ , et quand les coefficients  $A_2, A_1, \dots, 1_{2p}$  ne sont pas nuls.

» Si  $\alpha$  est un entier impair  $2p+1$ , et si  $A_2, A_4, \dots, A_p$  sont nuls,  $\varphi(v)$ , s'il est du type normal, est du même ordre que  $v^\alpha \log \frac{1}{v}$ .

» Si  $p-1 < \alpha < 2p+1$ , et si les coefficients  $A_2, \dots, A_{2p}$  sont nuls,  $\varphi(v)$ , s'il est du type normal, sera soit de l'ordre  $\alpha$  en  $v$ , soit d'un ordre entier impair supérieur à  $\alpha$ .

» Une conséquence de ces résultats est la suivante : il est impossible, si  $\varphi$  n'est pas infiniment petit d'ordre entier impair, que 1 et  $-1$  soient points réguliers ni pôles simples de  $\frac{\partial z}{\partial \mu}$ . On n'a donc pas, dans ce cas, d'intégrale générale du type

$$\Sigma p_i \log(\mu - a_i) + (\log v) \Sigma p_i = \text{const.}$$

ou

$$v \Sigma p_i (\mu - a_i)^{p_i} \dots (\mu - a_n)^{p_n} = \text{const.}$$

» Enfin, la proposition suivante résulte immédiatement de l'énoncé général :

» Si  $\frac{\varphi(v)}{v^2}$  tend vers une limite pour  $v = 0$ , 1 et  $-1$  sont des pôles doubles de  $\frac{\partial z}{\partial \mu}$  et l'on a de plus la relation

$$\Lambda_2 = p_1 \gamma_1 + \dots + p_n \gamma_n + \lambda_{1,1} + \dots + \lambda_{1,n} = 0,$$

où les notations employées ont été définies plus haut. Les  $\Lambda_{2p}$  sont certaines sommes de termes  $\lambda_{r,m} \gamma_r^h$ .

» II. *Grandes valeurs de  $v$ .* — Nous considérerons  $\varphi(v)$  comme étant du type normal pour les grandes valeurs positives de  $v$ , si  $\varphi(v)$ , continu et croissant à partir d'une certaine valeur  $v_0$  positive de  $v$ , est tel que  $\int_{v_0}^{\infty} \frac{dv}{v\varphi}$  ait un sens.

» On montre alors que toute intégrale finie de (1), distincte de 1 et de  $-1$ , tend, pour  $v = \infty$ , vers une limite qui n'est ni 1, ni  $-1$ , ni  $-\infty$ , et dont la valeur caractérise cette intégrale. Une analyse simple conduit à l'énoncé suivant :

» Pour que  $\varphi(v)$  soit du type normal pour  $v$  infini, il faut que  $R(\mu)$  n'admette pas le pôle  $\mu = \infty$  et que la somme des exposants  $p_1, \dots, p_n$  soit inférieure à  $-2$ . Alors  $\varphi(v)$  est d'ordre

$$-(p_1 + \dots + p_n + 2).$$

» En particulier, si  $\frac{\varphi(v)}{v^2}$  tend vers une limite pour  $v$  infini, la

somme des exposants des facteurs de  $\frac{dz}{d\mu}$  distincts de  $\mu + \varphi$  est égale à  $-\frac{1}{2}$ .

» En réunissant les résultats relatifs à  $v$  très petit et à  $r$  très grand, on aura la proposition suivante :

» Pour que  $\frac{\varphi(v)}{v^2}$  tende vers une limite, d'une part pour  $v=0$ , d'autre part pour  $r=\infty$ , il faut que l'intégrale générale de l'équation (1) (supposée réductible aux quadratures) soit de la forme

$$\frac{1}{v^2} \int_{\infty}^{\mu} \frac{(\mu - a_1)^{p_1} \dots (\mu - a_n)^{p_n}}{(\mu^2 - 1)^2} (\mu + \varphi) e^{R(\mu)} d\mu = \text{const.},$$

$R(\mu)$  n'admettant pour pôles ni 1, ni  $-1$ , ni  $\infty$ , et les conditions  $a^2 - 1 \neq 0$ ,  $R(\infty) = 0$ ,  $p_1 + \dots + p_n = 0$ ,  $A_2 = 0$  (voir I) étant en outre satisfaites.

» Si  $R(\mu) = 0$ , la condition  $A_2 = 0$  se réduit à  $p_1 \gamma_1 + \dots + p_n \gamma_n = 0$ . Par suite, on ne peut remplir les conditions de  $\varphi$  avec deux facteurs  $(\mu - a_1)^{p_1} (\mu - a_2)^{p_2}$  seulement. Car il faudrait

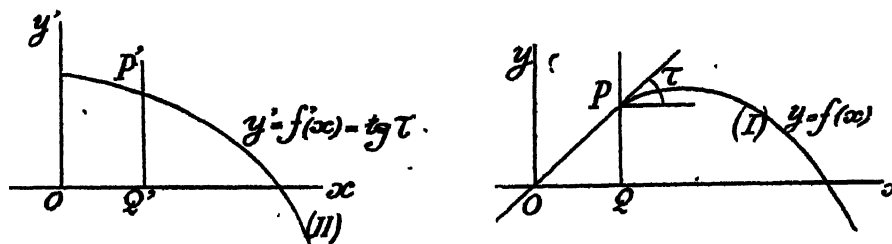
$$p_1 + p_2 = 0, \quad p_1 \gamma_1 + p_2 \gamma_2 = 0;$$

d'où  $\gamma_1 = -\gamma_2$ , ce qui est impossible. »

### III. — LES INTÉGROMÈTRES BALISTIQUES.

• 245. L'intégraphe Abdank-Abakanowicz. — L'intégration graphique des équations de la Balistique peut s'entendre de deux façons : ou bien,

Fig. 228.



suivant les tracés de la Balistique graphique (167, 168), il s'agit simplement de quarrer des courbes donnant  $(x, y, t)$ , qu'on aura construites lorsque l'hodographe aura été résolu ou calculé; ou bien il s'agit de l'intégration même de cet hodographe.

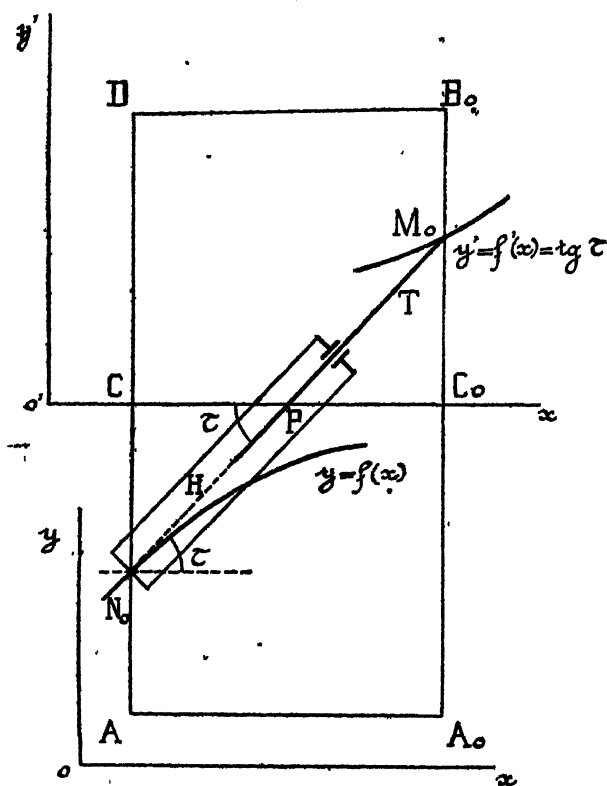
Pour le premier problème, le plus usité parmi les appareils employés, par certains balisticiens, est l'intégraphe Abdank-Abakanowicz dont voici une description schématique.

*Description.* — Soit la courbe (I) représentant la fonction  $y = f(x)$  et la courbe (II) représentant  $y' = f'(x)$  ou  $\frac{dy}{dx} = \tan \tau$ .

A l'ordonnée  $y = PQ$  de la courbe (I) correspond l'ordonnée  $P'Q' = \tan \tau$  de la courbe (II).

Le problème que résout l'intégraphe est le suivant : Connaissant la courbe (II), tracer la courbe (I).

Fig. 229.



Comme presque tous les intégrateurs, l'instrument possède comme organe principal une *roulette* munie d'un bord coupant, qui doit décrire et tracer la courbe *intégrale* (I) quand l'appareil se meut dans une certaine direction sur le plan, tandis qu'une *tige mousse* est assujettie à suivre la courbe (II). Schématiquement, l'intégraphe se compose d'un

cadre  $AA_0BB_0$  dont la hauteur  $BA$  est double de la largeur. La médiane  $CC_0$  est dirigée suivant l'axe des  $x$  de la courbe (II) donnée et l'on déplace le cadre parallèlement à lui-même.

Une tige  $TT'$  passe toujours par le centre  $P$  du rectangle en coulisant en ce point et la pointe mousse  $M_0$  de l'extrémité  $T$  est sur le côté  $A_0B_0$ . Cette pointe  $M_0$  suit la courbe  $y' = f'(x) = \tan \tau$ . Le prolongement de la tige  $TT'$  est une autre tige  $H$  qui coulisse également en passant par le point  $P$  et dont l'extrémité  $N_0$  se déplace sur le côté  $AB$  et porte la *roulette coupante*, dont le fil est dirigé suivant la droite  $M_0N_0$ .

Cette roulette décrit la courbe intégrale  $y = f(x)$ , ce qui est évident, puisque l'angle  $CPN_0$ , qui est celui de la courbe (II) au point  $N_0$  avec l'axe  $Ox$  est égal à l'angle  $M_0PC = \tau$ , par hypothèse.

*Application balistique.* — On suppose l'hodographe intégré par une méthode quelconque, c'est-à-dire qu'on suppose connue la relation entre  $v$  et  $\tau$ .

Pour avoir l'abscisse, par exemple, on pourrait employer la formule  $x = -\frac{1}{g} \int v^2 d\tau$  et construire la courbe  $v^2$  en fonction de  $\tau$ ; mais, à cause des échelles, il vaut mieux employer la formule équivalente (154),  $x = -\frac{1}{g} \int \frac{v du}{F(v)}$  et construire, par suite, la courbe différentielle ayant pour abscisse  $u$  et pour ordonnée  $\frac{1}{cF(v)}$ . Pour  $y$ , on emploie la courbe  $y = \int \tan \tau dx$ , et, pour  $t$ , la courbe  $\frac{du}{cF(v) \cos \tau}$ .

**246. Integrromètre balistique de M. Pascal.** — Cet appareil a pour objet d'intégrer l'hodographe, courbe que M. Pascal met d'abord sous la forme suivante :

Soit l'équation différentielle sous forme ordinaire

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{v \left[ \sin \tau + \frac{c}{g} F(v) \right]}{\cos \tau},$$

on pose

$$\sin \tau = -Y \quad \text{et} \quad v = e^X;$$

d'où

$$\cos \tau d\tau = -dY \quad \text{et} \quad \frac{dv}{v} = dX;$$

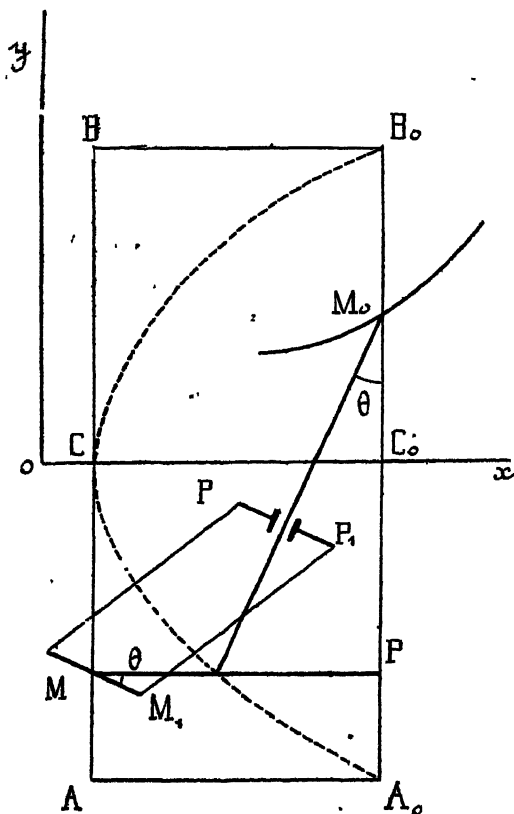
par suite, il vient

$$\frac{dY}{dX} = \frac{1 - Y^2}{\frac{c}{g} F(e^X) - Y}.$$

Ceci posé, l'intégromètre balistique de M. Pascal est schématiquement disposé ainsi qu'il suit :

Soit un cadre  $AA_0BB_0$  dont la hauteur est double de la largeur (celle-ci peut être supposée égale à l'unité). On maintient constamment la médiane  $CC_0$  dirigée suivant l'axe des  $X$ .

Fig. 230.



L'extrémité mousse  $M_0$  de la tige  $T$ , placée sur le côté  $A_0B_0$ , décrit la courbe  $Y = \frac{c}{g} F(e^x)$ , que l'on trace d'avance et qui est définie par la loi de résistance de l'air.

L'autre extrémité  $M_1$  de la tige  $T$  décrit une courbe dite *directrice* et qui, ici, est la parabole  $X = 1 - Y^2$ , rapportée aux axes  $B_0C_0X$ .

La tige  $T$  est articulée en  $M_0$ , pour que ce mouvement soit possible.

La roulette coupante  $M$ , qui se déplace sur le côté  $AB$ , a son fil perpendiculaire à la tige  $T$ , grâce au parallélogramme  $Mpp_1$ , où  $pp_1$  est

une glissière sur T. D'autre part, M et M<sub>1</sub> sont maintenus parallèles à l'axe des X par une tige MM<sub>1</sub> articulée en M<sub>1</sub>.

Dans ces conditions, il est facile de voir que si l'on fait déplacer le cadre le long de l'axe des X, la roulette M décrira l'hodographe.

En effet, on a

$$M_0 P = M_0 C_0 + C_0 P = \frac{c}{g} F(e^X) - Y$$

(C<sub>0</sub>P étant négatif, à cause de la direction des Y positifs).

D'autre part, l'inclinaison  $\theta$  de la roulette sur l'axe des X est égale à l'angle M<sub>1</sub>M<sub>0</sub>P; on a, par suite,

$$\text{tang } \theta = \frac{dY}{dX} = \frac{M_0 P}{M_0 P} = \frac{1 - Y^2}{\frac{c}{g} F(e^X) - Y} \quad \text{C. Q. F. D.}$$

*Remarque.* — Le capitaine Plâtrier a indiqué un intégromètre balistique de principe analogue à celui de M. Pascal, où la courbe directrice est une droite et où la roulette coupante est parallèle à la tige T.

**247. Principe des intégromètres balistiques à lame coupante.** — A peu près simultanément, ont été publiés deux Mémoires sur des procédés d'intégration de l'hodographe à l'aide d'un instrument mécanique.

Quoique très différents comme réalisation, les deux procédés, dont l'un est dû au colonel Jacob et l'autre au lieutenant-colonel Filloux, utilisent des appareils dérivés du planimètre Pritz à lame coupante.

Une tige porte une hachette tranchante à fil courbe, dont le plan est parallèle à l'axe de la tige; lorsqu'on promène la hachette sur une feuille de papier, où elle pénètre légèrement, comme elle ne peut se mouvoir transversalement au plan de son tranchant, celui-ci se trouve toujours orienté suivant la tangente à la courbe décrite par le point de contact sur le papier.

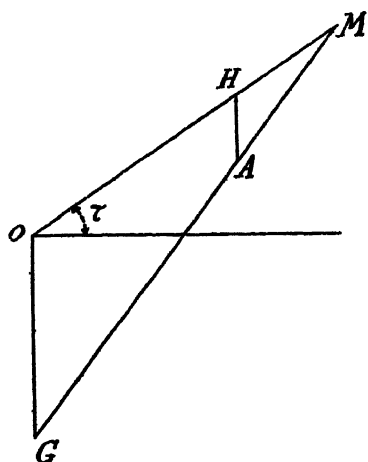
Si l'on donne constamment à la tige une inclinaison, relativement à l'axe des  $x$ , fonction connue des coordonnées du point de contact, la hachette trace une courbe définie par son équation différentielle du premier ordre  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ .

Quoiqu'un tel instrument ne soit, sans doute, susceptible que d'une très faible précision pratique, il est intéressant d'exposer ici les recherches ingénieuses faites dans cette voie pour la solution du problème balistique; quelques propriétés intéressantes de l'hodographe seront ainsi, de plus, mises en évidence.



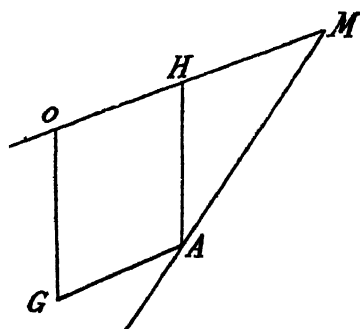
248. **Intégromètre du lieutenant-colonel Filloux.** — L'instrument du lieutenant-colonel Filloux pour l'intégration de l'hodographe utilise simplement la propriété de la tige de l'appareil d'être tangente à l'hodographe. L'auteur cherche donc, par l'étude des propriétés de la tangente à cette courbe, à déterminer la loi du mouvement de l'instrument.

Fig. 231.



On rappelle (163) que, pour trouver la tangente en un point M de l'hodographe, on prend, sur le rayon vecteur, à partir du point M, les longueurs  $MH = cF(v)$  et  $HA = g$ .

Fig. 232.



La tangente est MA, qui coupe la verticale du point O en un point tel que  $OG = \frac{gv}{cF(v)}$ .

Nous examinerons successivement des mécanismes de plus en plus



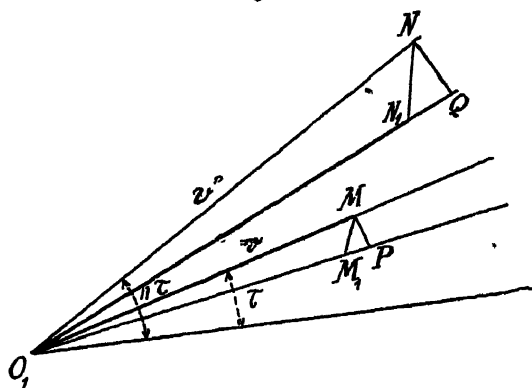


dographe des vitesses, transformation définie par le rayon vecteur  $\rho_1 = v^n$  et  $\tau_1 = n\tau$ .

L'équation de l'hodographe des vitesses étant  $v = f(\tau)$ , celle de l'anamorphose sera  $\rho_1^{\frac{1}{n}} = f\left(\frac{\tau_1}{n}\right)$ .

Soient M et M<sub>1</sub> deux points de l'hodographe des vitesses; N et N<sub>1</sub> deux

Fig. 236.



points de l'anamorphose. Menons les tangentes MM<sub>1</sub>, NN<sub>1</sub> et les perpendiculaires MP, NQ aux rayons vecteurs. Nous aurons

$$MP = v \, d\tau, \quad M_1P = dv, \quad NQ = nv^n \, d\tau, \quad N_1Q = nv^{n-1} \, dv.$$

Les triangles rectangles MM<sub>1</sub>P et NN<sub>1</sub>Q sont donc semblables, puisque  $\frac{NQ}{MP} = \frac{N_1Q}{M_1P}$  et les tangentes à l'hodographe et à son anamorphose font, avec les rayons vecteurs correspondants, des angles égaux. La tangente à l'hodographe en M coupe la verticale Oy en un point G tel que  $OG = \frac{gv}{b_0 + b_n v^n}$ .

Menons Oy' telle que NOy' = MOy. La tangente en N coupe cette droite en H, et nous voyons que, dans les triangles semblables MOG, NOH, on a

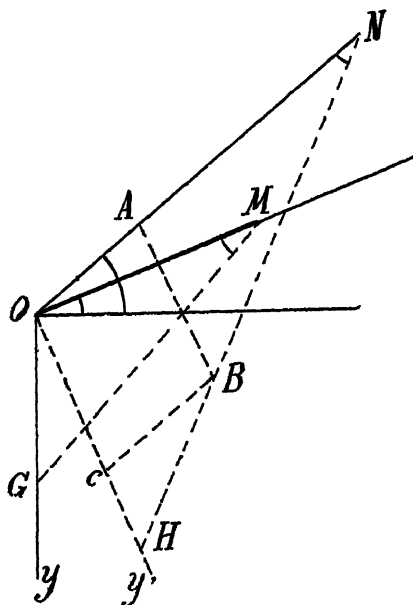
$$\frac{OH}{OG} = \frac{ON}{OM} = v^{n-1}, \quad \text{d'où} \quad OH = \frac{gv^n}{b_0 + b_n v^n}.$$

Prenons OA =  $\frac{b_0}{b_n}$  (la figure suppose  $b_0$  négatif), et menons AB parallèle à Oy'. Nous aurons

$$AB = OH \frac{NA}{NO} = \frac{gv^n}{b_0 + b_n v^n} \cdot \frac{v^n + \frac{b_0}{b_n}}{v^n} = \frac{g}{b_n}.$$

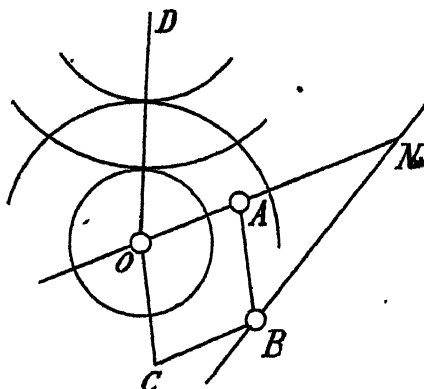
On se trouve donc amené à compléter le parallélogramme  $OABC$  comme dans le cas de  $(b_1 v \dots b_0)$ ; mais il faut de plus déplacer la

Fig. 237.



droite  $Oy'$  en fonction du déplacement de  $OM$  dans le rapport  $n$  à 1. On y arrive au moyen de roues dentées de rayons convenables, comme il est figuré dans le schéma ci-dessous.

Fig. 238.



Le mécanisme permet de résoudre, comme cas particuliers, les cas de  $(b_0 + b_1 v)$  et de  $b_n v^n$  déjà traités.



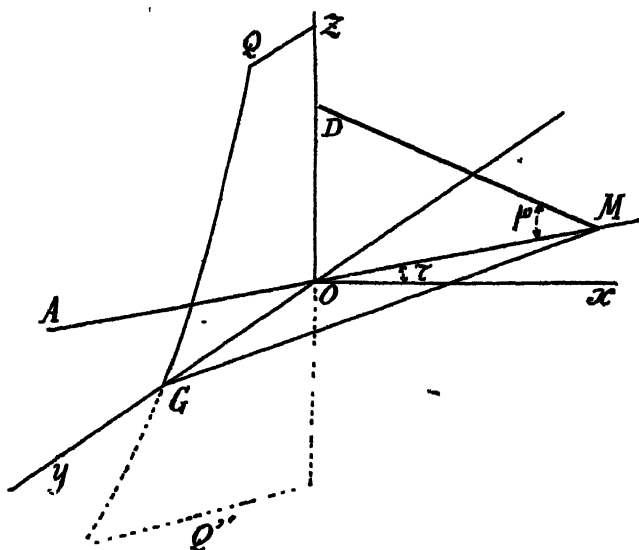
propriété montre qu'il est possible de guider mécaniquement une tige à lame coupante NC au moyen de bielles et de glissières.

5° *Cas général : Résistance  $cF(v)$ .* — Les mécanismes décrits jusqu'ici ne comportent que des *bielles*, *glissières* et *engrenages*.

On peut résoudre le problème, dans le cas le plus général, au moyen d'une *came*.

Soit  $xOy$  le plan horizontal sur lequel est tracé l'*hodographe* dont

Fig. 240.



le rayon vecteur est OM. La tangente en M coupe l'axe  $y$  au point G tel que  $OG = \frac{Fv}{cF(v)}$ .

L'appareil traceur comprend : une *règle* OM passant par O et pouvant coulisser; une *came* QQ' dans un plan perpendiculaire à Ox et pouvant se déplacer verticalement suivant Oz : elle reçoit, suivant cette droite, un mouvement d'élévation proportionnel à OM, c'est-à-dire à  $v$ . Sa forme est telle que les  $y$  soient égaux à  $\frac{Fv}{cF(v)}$ .

Une *règle* MG s'appuyant sur la *came* porte, au point M, où elle est articulée avec OM, la *hachette traceuse*.

Le mouvement de OM suivant son axe est transmis à la *came* par un bras MD incliné sur OM d'un angle  $\mu$ ; ce bras peut tourner autour de Oz sans entraîner la came. On a constamment  $OD = OM \tan \mu$ .

Étant donnée l'échelle  $\lambda$  du graphique, on prendra à l'origine sous

l'angle  $\alpha$ ,  $OM = \lambda V_0$ ; on mettra la came dans une position telle que  $OG = \frac{g}{cF(V_0)} \lambda V_0$ , et l'angle  $\mu$  est déterminé. Quand OM tournera, le déplacement de GM dans sa direction modifie la longueur OM; l'angle  $\mu$  restant fixe, la tige MD fait baisser la came qui entraîne, par G, la tige à hachette GM, etc.

Le théorème qui fait l'importance de ce mécanisme est le suivant : *Si la came a été tracée pour un système particulier défini par les trois constantes  $\lambda_1$ ,  $\tan \mu_1$ , et  $c_1$ , elle convient à un projectile de coefficient balistique différent  $c_2$  à condition de prendre  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\tan \mu_1}{\tan \mu_2} = \frac{c_2}{c_1}$ .*

Soit  $y = \varphi(z)$  l'équation de la came. On a

$$z = OM \tan \mu = \lambda v \tan \mu, \quad \text{d'où} \quad y = \varphi[\lambda v \tan \mu].$$

Mais, dans un cas particulier, le tracé de la came a été fait pour qu'on ait

$$y = \varphi(\lambda_1 v \tan \mu_1) = \frac{g \lambda_1 v}{c_1 F(v)}.$$

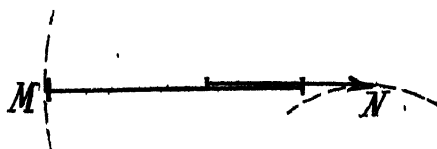
Si l'on change  $c_1$  en  $c_2$ , cette égalité devra subsister; or, la fonction  $F(v)$  reste la même; pour que nous puissions conserver la fonction  $\varphi$ , c'est-à-dire la came, il suffit de prendre

$$\lambda_1 \tan \mu_1 = \lambda_2 \tan \mu \quad \text{et} \quad \frac{\lambda_1}{c_1} = \frac{\lambda_2}{c_2}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

6° *Autres mécanismes.* — Le lieutenant-colonel Filloux étudie, en outre, quelques autres mécanismes à hachette capables de résoudre les équations différentielles du premier ordre, entre autres un *intégromètre dit polaire*.

Il considère également un appareil composé de deux tiges parallèles pouvant glisser l'une par rapport à l'autre; l'une porte une *hachette* N parallèle aux tiges, l'autre une *hachette* M perpendiculaire.

Fig. 241.



La hachette M décrit une courbe à laquelle MN est normale et N décrit une courbe à laquelle MN est tangente; lorsqu'on fait varier l'orientation de l'instrument,  $r = \varphi(\tau)$  sera l'équation de la variation de distance des points M et N.

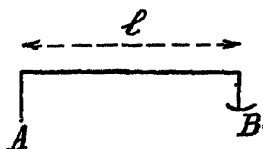


Ce dispositif permet donc de tracer des courbes données par leur rayon de courbure, en particulier la trajectoire puisque la courbe  $v = \psi(\tau)$  est connue par l'hodographe et qu'on a la relation  $r = \frac{v^2}{g \cos \tau}$ . Une came portant cette courbe est déplacée parallèlement et règle le mouvement de l'extrémité N de la hachette. L'autre extrémité N décrit la trajectoire.

Dans le cas même d'une résistance  $(b_0 + b_2 v^2)$  un dispositif à hachette multiple et à deux planchettes parallèles permettrait de tracer directement la trajectoire, sans passer par la courbe des rayons de courbure.

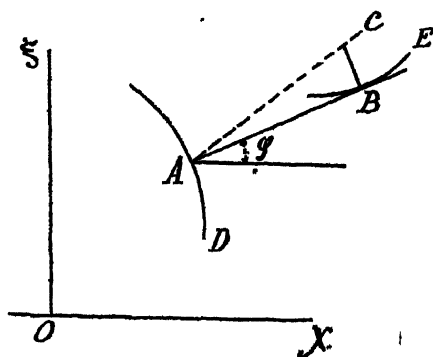
**249. Intégromètre balistique du colonel Jacob.** — L'intégromètre étudié par le colonel Jacob sert à intégrer tout un type d'équations

Fig. 242.



différentielles (équations d'Abel) dont l'équation de l'hodographe fait partie. C'est donc un instrument beaucoup plus général que l'appareil du lieutenant-colonel Filloux et le problème spécial de la Balistique ne se présente, pour cet instrument, que comme un cas particulier.

Fig. 243.



L'intégromètre du colonel Jacob est basé sur la théorie du planimètre Pritz, instrument qui consiste essentiellement en une tige deux fois recourbée à angle droit; elle comporte une pointe *mousse* A d'une

part, une *lame coupante* en forme de hachette B d'autre part, dont le plan est celui de l'instrument.

Si l'on fait décrire à la pointe mousse A une courbe appelée *directrice*, la *hachette* B, qui pénètre dans le papier, guide la direction AB de manière que cette direction soit toujours tangente à la courbe décrite par B.

La longueur  $l$  de l'instrument peut d'ailleurs varier suivant une loi déterminée sans que la propriété de AB d'être tangente à son enveloppe cesse d'être vérifiée constamment.

La *directrice* étant la courbe D, et l'*enveloppe* la courbe E, le centre instantané de rotation est en C, intersection des deux normales aux courbes D et E.

Soient deux axes rectangulaires  $O\chi$ ,  $O\xi$ , dans le plan des courbes D et E;  $\chi$  et  $\xi$  sont les coordonnées du point A,  $\gamma_1$  et  $\xi_1$  celles du point B.

Soit  $\varphi$  l'angle de la base AB de l'instrument avec l'axe des  $\gamma$ . Puisque AB est tangente à son enveloppe, on a

$$\frac{d\xi_1}{d\gamma_1} = \tan \varphi.$$

Mais les relations  $\gamma_1 = \gamma + l \cos \varphi$ ,  $\xi_1 = \xi + l \sin \varphi$  différenciées donnent

$$\begin{aligned} d\gamma_1 &= d\chi + \cos \varphi dl - l \sin \varphi d\varphi, \\ d\xi_1 &= d\xi + \sin \varphi dl + l \cos \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

En portant ces valeurs dans l'expression de  $\frac{d\xi_1}{d\gamma_1}$  on voit que  $dl$  disparaît, et il reste

$$l d\varphi + \cos \varphi d\gamma - \sin \varphi d\xi = 0.$$

Soit  $\chi = f_1(\theta)$  et  $\xi = f_2(\theta)$  l'équation de la directrice en fonction d'un paramètre  $\theta$ ; on a

$$\begin{aligned} d\chi &= f'_1(\theta) d\theta, \\ d\xi &= f'_2(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Posons d'autre part

$$\tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) = \zeta,$$

d'où

$$\cos \varphi = -\frac{\zeta}{1+\zeta^2}, \quad \sin \varphi = \frac{\zeta^2-1}{1+\zeta^2}, \quad d\varphi = 2 \frac{d\zeta}{1+\zeta^2};$$

portant ces valeurs dans l'équation différentielle, il viendra

$$l \frac{d\zeta}{d\theta} + \frac{1}{2} f'_2 - \zeta f'_1 - \frac{1}{2} \zeta^2 f'_1 = 0.$$

Nous ne considérerons, parmi toutes les équations différentielles ainsi formées, que celles où  $l$  prendra la valeur  $\zeta$ .

Nous aurons ainsi l'équation différentielle

$$\zeta \frac{d\zeta}{d\theta} + \frac{1}{2} f_1 - \zeta f_1' - \frac{1}{2} \zeta^2 f_1'' = 0$$

Ainsi, si la directrice est donnée ainsi que les conditions initiales  $\zeta_0$ , et  $\left(\frac{d\zeta}{d\theta}\right)_0$ , lorsque le point A décrira la directrice, la *hachette* tracera une courbe qui fera connaître, à chaque instant, l'intégrale de l'équation ci-dessus, c'est-à-dire  $\zeta$  en fonction de  $\theta$ .

Ceci posé, supposons qu'on ait une équation différentielle du type

$$xy' + P + Ry^2 + Qy = 0.$$

Pour qu'elle puisse être intégrée au moyen de l'intégromètre, il faut et il suffit qu'on ait  $P = -R$ .

La *directrice* sera définie au moyen des deux équations

$$\frac{1}{2} f_1' = P, \quad f_1' = -Q;$$

d'où

$$\frac{dy}{d\theta} = -Q \quad \text{et} \quad \frac{d\zeta}{d\theta} = 2P.$$

*Application à l'hodographe.* — 1° On a mis l'équation de l'hodographe sous la forme normale (233) :

$$v'v + \frac{v^2}{v} - \frac{c}{g} \frac{vF' + 2F}{v} v + \frac{1}{v} \left[ \left( \frac{cF}{g} \right)^2 - 1 \right] = 0,$$

avec

$$v = \sin \tau + \frac{cF}{g}$$

Elle ne se présente pas immédiatement sous la forme requise pour le problème actuel, car elle donne, pour  $P = -R$ , la solution particulière  $\frac{cF}{g} = 0$ ; il reste  $v'v + \frac{v^2 - 1}{v} = 0$ , équation déjà considérée (233, 2°) et qui donne la parabole du vide.

Posons alors  $v = \zeta_1$ , d'où  $v' = \zeta_1' + v_1' \zeta_1$ .

On en déduit

$$\zeta_1' + \frac{1}{v} \left[ \left( \frac{cF}{g} \right)^2 - 1 \right] \frac{1}{\zeta_1} - \frac{c}{g} \frac{vF' + 2F}{v} \frac{\zeta_1}{\zeta_1} + \zeta_1^2 \left( \frac{v_1'}{\zeta_1} + \frac{1}{v} \right) = 0.$$

L'égalité  $P = -R$  donne alors

$$\frac{v_1'}{\zeta_1} + \frac{1}{v} = \frac{1}{v} \left[ 1 - \left( \frac{cF}{g} \right)^2 \right] \frac{1}{\zeta_1}.$$

2° C'est une équation différentielle qu'on mettra sous la forme

$$v_1' v_1 + \frac{c^2}{v} = \frac{1}{v} \left[ 1 - \left( \frac{cF}{g} \right)^2 \right].$$

L'équation sans second membre donne  $v_1 = \frac{K_1}{v}$ .

En faisant varier la constante  $K_1$  suivant la méthode habituelle, on trouve

$$K_1 K_1' = v \left[ 1 - \left( \frac{cF}{g} \right)^2 \right], \quad \text{d'où} \quad K_1^2 = v^2 + \frac{c^2}{g^2} [K - \Psi(v)],$$

où  $\Psi(v)$  est la fonction  $\Psi(v) = \int_0^v 2vF^2 dv$  et  $K$  une constante. On aura donc

$$K_1 = v_1 v = \sqrt{v^2 + \frac{c^2}{g^2} [K - \Psi(v)]}$$

et, par suite,

$$v_1 = \sqrt{1 + \frac{c^2}{g^2} \frac{K - \Psi(v)}{v^2}}.$$

3° Les coordonnées  $\chi$  et  $\xi$  de la directrice seront alors données par les formules ( $l_0$  étant la longueur arbitraire de l'instrument servant d'unité)

$$\frac{d\chi}{dv} = \frac{c}{g} \frac{1}{v} \frac{2F + vF'}{\sqrt{1 + \frac{c^2}{g^2} \frac{K - \Psi(v)}{v^2}}} l_0,$$

$$\frac{d\xi}{dv} = -2 \left[ \frac{c_1}{v_1} + \frac{1}{v} \right] l_0.$$

Cette seconde s'intègre immédiatement et donne

$$\xi = K_2 - 2 l_0 \log(v_1 v),$$

c'est-à-dire

$$\xi = K_2 - l_0 \log \left\{ v^2 + \frac{c^2}{g^2} [K - \Psi(v)] \right\}.$$

D'autre part, on aura

$$\chi = \frac{c}{g} l_0 \int \frac{2F + vF'}{\sqrt{v^2 + \frac{c^2}{g^2} [K - \Psi(v)]}} dv + K_3.$$

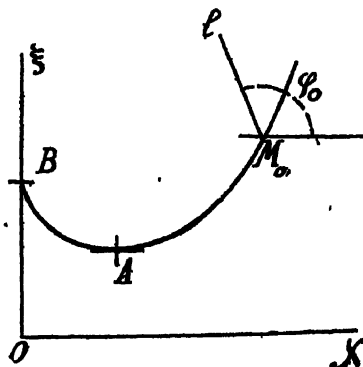
Ces deux équations définissent la directrice cherchée.

Il sera donc possible de calculer cette directrice quand on connaîtra la fonction  $F(v)$  et le coefficient balistique, en adoptant pour les constantes des valeurs arbitraires.

On voit que ce calcul est extrêmement compliqué puisqu'il exige

d'abord le calcul de l'intégrale  $\Psi(v)$ , qui peut être faite une fois pour toutes, puis le calcul de l'intégrale de  $\gamma$ , qui doit être repris pour chaque valeur de  $c$ , du coefficient *balistique*.

Fig. 241.



La directrice a la forme parabolique de la figure avec un minimum en A correspondant à  $\frac{d\xi}{dv} = 0$ , c'est-à-dire à  $\frac{v_1}{v} + \frac{1}{v} = 0$ , ce qui donne  $\frac{cF}{g} = 1$ .

En B, pour  $v = 0$ , la tangente est verticale.

4° A chaque projectile correspond donc une directrice déterminée.

La condition initiale  $V_0$  permet de déterminer la position initiale  $\gamma_0 \xi_0$  sur la directrice.

L'orientation initiale  $\varphi_0$  de la tige est donnée par la formule

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{v}\right) = \zeta_0.$$

Mais, puisque  $\zeta = \frac{v}{v_1}$ , on a, en remplaçant  $v$  par sa valeur (236)

$$\sin \tau + \frac{cF}{g},$$

la formule

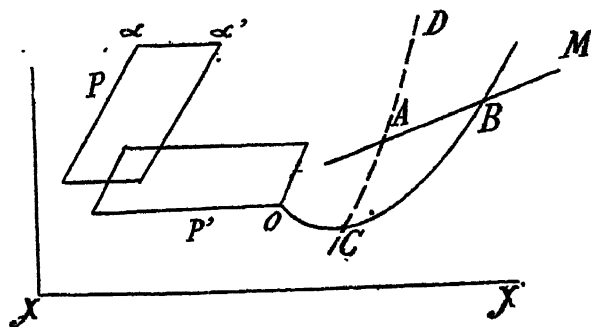
$$\zeta_0 = \frac{v_0}{v_{10}} = \frac{V_0 \left( \sin \alpha + \frac{cF_0}{g} \right)}{\sqrt{V_0^2 + \frac{g^2}{c^2} [K - \Psi(V_0)]}}.$$

Quant à la longueur initiale  $l$  à donner à la tige, elle est  $l_0 = l_0 \zeta_0$ .

5° L'intégromètre du colonel Jacob est mécaniquement constitué :

1° Par deux parallélogrammes articulés  $PP'$  ayant  $\alpha$  et  $\alpha'$  pour points fixes et destinés à assurer la translation parallèle de l'instrument.

Fig. 245.



2° Par une *came*  $C$ , de forme constante pour tous les cas; elle est tracée de manière que, entre la longueur à l'échelle  $OB = l$  de la tige et l'angle  $\varphi$  que fait cette tige avec la direction fixe  $XX'$ , on ait la relation  $l = l_0 \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}\right)$ .

3° La tige  $O\backslash BM$  extensible porte en  $A$  la pointe mousse qui suit la directrice  $D$ , en  $B$  le galet de roulement qui suit la *came* et en  $M$  la *lame coupante* qui décrit l'hodographe.

250. **Autres instruments d'intégration.** 1° Sous le nom d'*appareil pour le calcul des trajectoires*, le colonel Jacob a fait connaître (1910) un intégromètre fondé sur le même principe de la *lame coupante*, que le précédent, et ceux du capitaine Filloux, mais plus spécialement conçu pour les usages balistiques.

La tangente à l'hodographe étant  $AM$ , passe au point  $A$  tel que  $OA = \frac{g v}{c F(v)}$ .

$OM$  est une tige mobile autour de l'axe  $O$ ;  $MA$  est une tige pouvant tourner autour de  $M$ , lequel peut coulisser le long de  $OM$ . La *lame coupante* est en  $M$ , son fil dirigé suivant  $MA$ . La tige  $AM$  peut glisser et tourner autour de  $A$ .

Pour réaliser mécaniquement la condition que la tige  $MA$  passe par le point  $A$  tel que  $OA = \frac{g v}{c F(v)}$ , on construit, dans le plan, la courbe  $KK'$  telle que, pour tout point  $P$ , tel que  $AP = OM = v$ , on ait  $PP' = \frac{g v}{c F(v)}$ , et l'on fait suivre cette courbe par un style fixé à une tige  $AP$  qui se

déplace parallèlement à  $Ox$  tout en pouvant coulisser dans la même

Fig. 246.

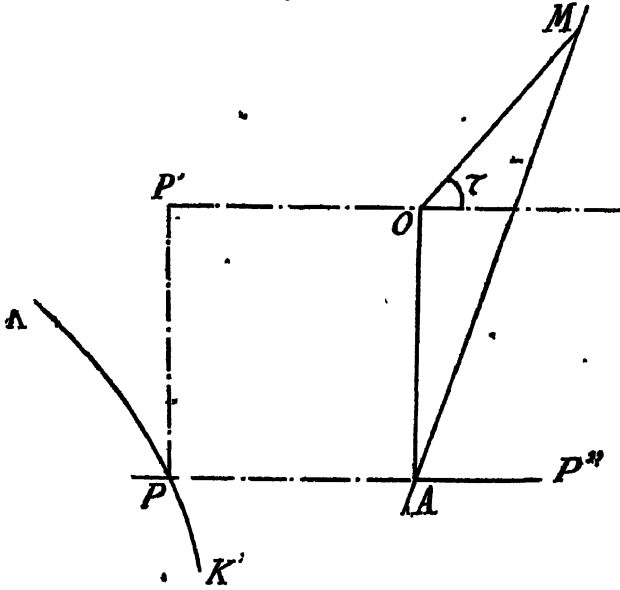
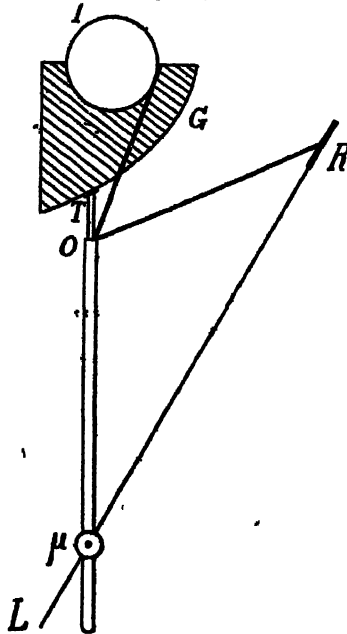


Fig. 247.



direction. Il suffira de faire en sorte que le déplacement du point  $M$  le

long de OM soit égal au déplacement de M le long de PA. Pour réaliser ce mouvement, l'appareil se compose d'une crémaillère PAP" qui engrène en A avec un pignon denté; un arbre transmet le mouvement à un autre pignon égal au premier en O, qui déplace la tige OM à crémaillère d'une quantité égale à la variation de PA.

La tige à lame coupante M \ asservit le mouvement de M suivant la loi de l'hodographe.

Par d'autres appareils annexes, intégrateurs spécialisés à leur rôle balistique, on peut obtenir les abscisses, les temps et les ordonnées, en partant de l'hodographe intégré.

2° Le commandant Parodi constitue son intégromètre comme il suit : la *lame coupante* R est portée par un *bras* RL à rainure qui peut glisser sur le pivot  $\mu$ . Celui-ci, porté par une *tige* TO  $\mu$  peut se mouvoir verticalement, et la *came* G, qui agit sur la *tête* T, est taillée de telle sorte que l'on ait  $O\mu = \frac{g}{cF(v)} v$ .

Un fil inextensible s'enroulant sur la *poulie* I passe en O et est fixé à l'aplomb de la *roulette coupante* R.

**251. Machine à calculer les trajectoires du capitaine Perrin.** — Les appareils décrits précédemment ne donnent du problème général que des solutions partielles et détournées.

Obtenir tous les éléments de la fin d'un arc de trajectoires défini à l'origine par les données  $(V_0, \alpha, c)$ , et, à l'autre extrémité, par le *temps*  $t$ , et lire sur des cadrans les valeurs de  $(x, y, v, \tau)$ , comme on le fait sur une machine à calculer courante, tel se pose le problème dans toute sa généralité et sa difficulté. C'est cette très belle question qu'a su résoudre le capitaine Perrin, dans sa « machine à calculer les trajectoires », dont nous allons indiquer ci-dessous les principes.

Si l'on pose, comme d'habitude,  $\mathfrak{s} = cF(v)$ , on désignera, par abréviation,  $\mathfrak{s} \cos \tau$  par  $\mathfrak{s}_x$  et  $\mathfrak{s} \sin \tau$  par  $\mathfrak{s}_y$ . On a donc pour équations différentielles du mouvement :

$$\begin{aligned} dx &= u \, dt, & du &= -\mathfrak{s}_x \, dt, \\ dy &= w \, dt, & dw &= -(\mathfrak{s}_y + g) \, dt; \end{aligned}$$

d'où les quatre intégrales

$$\begin{aligned} x &= \int_0^t u \, dt, & u &= u_0 - \int_0^t \mathfrak{s}_x \, dt, \\ y &= \int_0^t w \, dt, & w &= w_0 - \int_0^t (\mathfrak{s}_y + g) \, dt. \end{aligned}$$

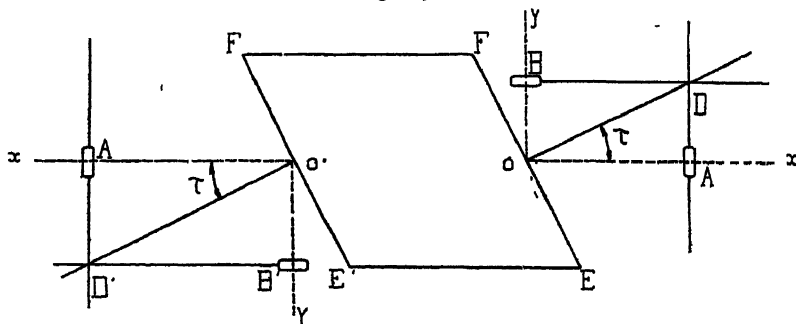


On a les relations

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{v}{u} = \tan \tau.$$

A. Description schématique de l'appareil. — a. Quatre roulettes (A, B), (A', B') (fig. 248) se déplacent perpendiculairement à leur

Fig. 248.



plan sur deux systèmes d'axes fixes (O, x, y), (O', x', y').

Les longueurs OA et OB représentent  $u$  et  $v$ ; les longueurs O'A' et O'B' représentent  $\frac{1}{c} \partial x$  et  $\frac{1}{c} \partial y$ .

Les roulettes sont portées par des barres (AD, BD), (A'D', B'D') astreintes à rester parallèles aux axes; par les points de croisement (D, D') de ces barres, passent deux autres barres (OD, O'D') tournant autour des points O et O' et reliées par un parallélogramme articulé (EFE'F'), qui les force à rester constamment parallèles: cela réalise la relation  $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{v}{u} = \tan \tau$ .

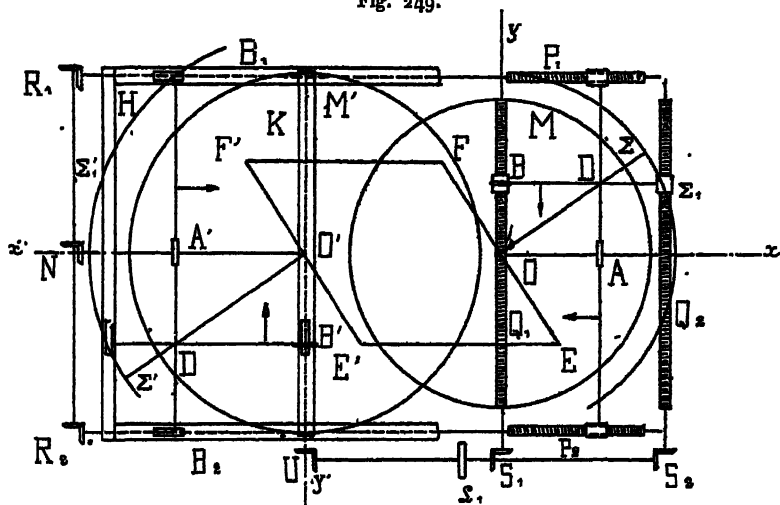
Les barres (AD, BD) portent des glissières dans lesquelles vient s'engager, à leur point de croisement, le tenon D d'une crémaillère portée par la barre OD. De même pour (A'D', B'D', O'D').

Les barres ODO'D' reposent à une extrémité sur les pivots (O, O') et, à l'autre, sur des chariots Σ, Σ' roulant sur des chemins de roulement circulaire Σ<sub>1</sub>, Σ'<sub>1</sub> (fig. 249).

b. D'autre part, les crémaillères (OD, O'D') dont les longueurs (OD, O'D') représentent évidemment  $r = \sqrt{u^2 + v^2}$  et  $\frac{\partial}{\partial c} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{c}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{c}\right)^2}$  engrenent avec les roues G, ayant pour centre O, et G' portées par le bras E'F' du parallélogramme. Une roue H solidaire de G transmet son mouvement, par l'intermédiaire de la roue I, à une roue H' de centre O' qui porte une came ayant pour profil F(v) (où v est représenté par

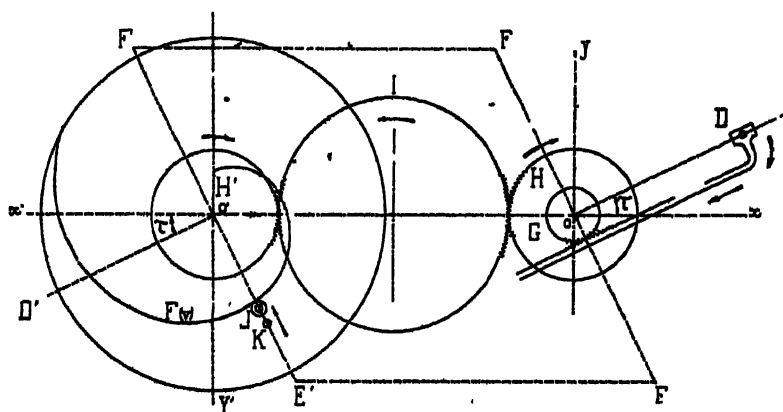
l'angle de rotation de la came, lequel est proportionnel à la longueur  $OD$  ; ou plus exactement, le point  $J$  devant décrire la courbe  $F(v)$ , la came a

Fig. 249.



pour profil la courbe enveloppe des cercles égaux à la roulette  $J$  et ayant leur centre sur la courbe  $F(v)$ . Cette came actionne la tige  $JK$  solidaire de la crémaillère  $KL$  portée par le bras  $E'F'$  du parallélogramme ; et la crémaillère  $KL$ , par l'intermédiaire de la roue  $G''$  solidaire de  $G'$ , déplace la crémaillère  $(O'D')$  de longueurs proportionnelles à son propre déplacement.

Fig. 250.



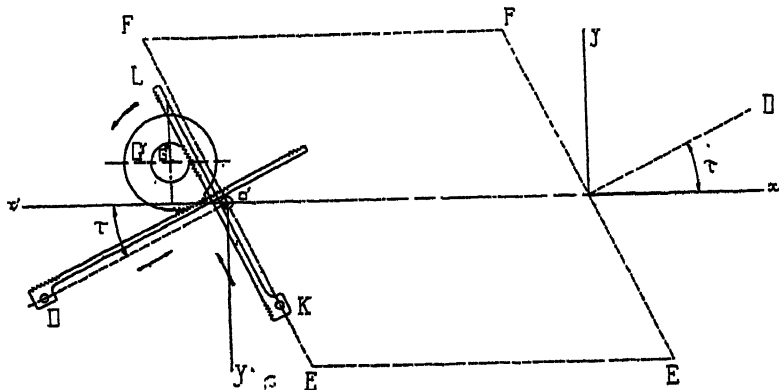
Ce dispositif réalise la relation  $\frac{\lambda}{\sigma} = F(v)$ .

En effet :  $r \circ \tau$  étant fixe, si l'on fait varier  $OB$ , qui représente  $v$ , le déplacement angulaire de la came  $F(v)$  est proportionnel à la variation

de OD, et la variation de  $O'D'$  représentant  $\frac{\lambda}{c}$  est proportionnelle à la variation OK, c'est-à-dire à  $F(v)$ .

2° Si  $\tau$  varie, sans que OD varie, tout le système (OD, roue G, roue H) tourne de l'angle  $d\tau$  et, par l'intermédiaire de la roue I, fait aussi tourner

Fig. 251.



la came  $F(v)$  d'un angle  $d\tau$  (la roue  $H'$  étant égale à la roue H). Mais la tige JK portée par le bras  $E'F'$  du parallélogramme ayant aussi tourné du même angle  $d\tau$ , sa position relative par rapport à la came  $F(v)$  reste la même et le point K ne bouge pas sur  $E'F'$ . Par suite, tout le système (KL, roues  $G'$  et  $G$ , et crémaillère  $O'D'$ ) tourne de  $d\tau$  sans se déformer.

Donc, quel que soit  $\tau$ , on aura toujours  $O'D' = F(OD) + \text{const.}$

c. Sous les quatre roulettes (A, B, A', B') tournent, d'angles égaux représentant le temps  $t$ , deux plateaux M et M', de centres O et O', qui entraînent les quatre roulettes (fig. 249).

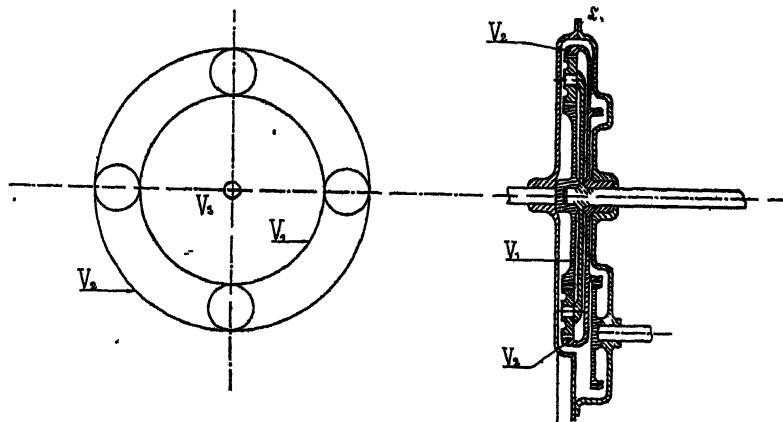
Les barres (AD, BD) sont portées par des vis ( $P_1, P_2, Q_1, Q_2$ ).

Les vis  $P_1, P_2$  sont entraînées par la roulette A', par l'intermédiaire des engrenages ( $N, R_1, R_2$ ), ce qui réalise la relation  $du = -\lambda_x dt$ , les rapports d'engrenages ( $N, R_1, R_2$ ) étant convenablement choisis. De même les vis  $Q_1, Q_2$  sont entraînées par la roulette B', par l'intermédiaire des engrenages ( $U, S_1, S_2$ ) et du différentiel  $\zeta_1$  (fig. 252) dont la roue  $V_1$  est entraînée par (B'), et la roue  $V_2$ , au moyen d'un engrenage, par le mécanisme qui entraîne les plateaux M et M', et par l'intermédiaire d'autres engrenages convenables, la fait tourner d'angles proportionnels à  $(g dt)$ . L'axe  $V_3$  tourne alors d'angles proportionnels à  $\lambda(\lambda_y + g) dt$ .

La relation  $d\dot{r} = -(\dot{\gamma} + g) dt$  se trouve alors réalisée, les engrenages ( $U, S_1, S_2$ ) étant convenablement choisis.

d. Les barres ( $A'D', B'D'$ ) sont portées par des chariots roulant sur les barres ( $B_1, B_2, HK$ ) du bâti, ce qui leur permet de se déplacer parallèlement aux axes ( $O'r', O'\gamma'$ ) sous l'action du tenon  $D'$  de la crémaillère  $O'D'$ .

Fig. 252.



e. Enfin les roulettes A et B portent des compteurs de tours indiquant  $\int u dt, \int v dt$ , et une manivelle actionnée à la main fait tourner les plateaux M et M' et la roue  $V_2$  du différentiel  $\mathcal{C}_1$ .

Un compteur de tours sur la transmission des plateaux M et M' indique, d'autre part, le temps  $t$ .

B. *Fonctionnement théorique de l'appareil.* —  $V_0$  et  $\alpha$  étant donnés, on calcule  $u_0 = V_0 \cos \alpha$ ,  $v_0 = V_0 \sin \alpha$ ; puis la transmission des roulettes A' et B' étant débrayée, on manœuvre les vis ( $P_1, P_2, Q_1, Q_2$ ) (qui portent des compteurs de tours) de manière à avoir  $OA = u_0$ ,  $OB = v_0$ .

On a alors aussi  $O'A' = \left(\frac{\partial x}{\partial c}\right)_0$ ,  $O'B' = \left(\frac{\partial y}{\partial c}\right)_0$ , les transmissions étant supposées correspondre au coefficient balistique  $c$  pour lequel on veut déterminer la trajectoire.

On ramène les compteurs de tours des roulettes A et B et des plateaux au zéro, et l'on embraye les transmissions de A' et B'.

Faisant tourner alors les plateaux M et M', les roulettes A' et B' font tourner les vis ( $P_1, P_2, Q_1, Q_2$ ) qui modifient la longueur et la position de la crémaillère OD, laquelle agit sur  $O'D'$  et, par suite, modifie la position des roulettes A' B'.

A chaque instant ( $t$ ) indiqué par le compteur de tours des plateaux, on aura donc :

1°  $x = \int u dt$ ,  $y = \int v dt$ , indiqués par les compteurs de tours des roulettes A et B;

2° l'angle  $\tau$ , indiqué par une graduation circulaire  $\Sigma$ , devant laquelle se déplace l'extrémité  $\Sigma$  de la barre OD $\Sigma$ ;

3° les composantes  $u$ ,  $v$  de la vitesse restante données par les compteurs de tours des vis ( $P_1 P_2$ ,  $Q_1 Q_2$ ).

Tous les éléments de chaque point de la trajectoire sont donc déterminés.

En particulier, on aura les éléments du *sommet* au moment où  $\tau$  passe par zéro, et les éléments du *point de chute* au moment où ( $\gamma$ ) revient à zéro.

Le compteur de tours des plateaux indique les temps  $T_s$ ,  $T_w$  correspondants.

C. *Coefficient balistique variable.* — On intercale sur les transmissions des roulettes A', B' deux systèmes de cônes renversés reliés par des roulettes de manière à faire varier le rapport de transmission, c'est-à-dire le *coefficient balistique*  $c$ .

On peut également, par un système de cônes convenablement placés, tenir compte de la diminution de la densité de l'air avec l'altitude.

---

## CHAPITRE II.

### PROBLÈMES BALISTIQUES INVERSES.

---

#### I. — LES FORMULES DES PROBLÈMES BALISTIQUES INVERSES.

252. THÉORÈME. — *Si l'on donne, a priori, une relation finie entre deux quelconques des éléments du mouvement, en un point quelconque de la trajectoire, savoir  $(x, y, v, t, \tau)$ , on peut calculer les trois autres éléments sans qu'il soit besoin de connaître la résistance de l'air, c'est-à-dire la fonction  $F(v)$ .*

Ce théorème résulte de l'hypothèse faite que la résistance de l'air est tangentielle; cette hypothèse est traduite analytiquement par l'équation

$$\frac{v \, d\tau}{dt} = -g \cos \tau,$$

qui est une des équations intrinsèques de la trajectoire.

Si, à cette équation, on joint les relations de définition

$$\frac{dx}{dt} = v \cos \tau, \quad \frac{dy}{dt} = v \sin \tau,$$

et la relation finie que l'énoncé suppose donnée, on aura, entre les cinq inconnues, quatre relations, ce qui permet d'exprimer chacune d'elles en fonction d'une autre.

Aucune de ces relations ne contient la fonction  $F(v)$ .

On appelle parfois *mouvements balistiques* ceux qui correspondent à l'hypothèse d'une résistance tangentielle, c'est-à-dire ceux où l'équation  $\frac{v \, d\tau}{dt} = -g \cos \tau$  est vérifiée.

C'est à ces mouvements seuls que s'applique la théorie actuelle.

253. Définition des problèmes balistiques inverses. — Supposons, pour préciser la nature du problème, qu'on ait déterminé expérimentalement la trajectoire d'un projectile, en relevant, par exemple, les points

d'impact sur des écrans convenablement disposés. La courbe ainsi déterminée pourra être représentée par une formule  $y = f(x)$  avec une approximation plus ou moins grande.

Le problème balistique inverse consistera tout d'abord à obtenir les valeurs des autres éléments ( $v$ ,  $\tau$ ,  $t$ ) au point  $(x, y)$  et le théorème précédent démontre que la solution en sera toujours possible.

Mais il sera possible également de porter les valeurs calculées dans l'équation de l'hodographe  $\frac{d(v \cos \tau)}{d\tau} = \frac{cvF}{g}$  et, par suite, de déterminer l'expression de la fonction  $F$ , seule inconnue de cette équation; la fonction ainsi déterminée représente la loi de résistance de l'air qu'il eût fallu admettre pour que la trajectoire fût, justement, représentée par la fonction  $y = f(x)$ .

Si l'on choisit  $y = f(x)$  arbitrairement, c'est-à-dire en dehors des quelques formes que l'on obtient par une intégration rigoureuse des équations différentielles en choisissant convenablement la forme de la fonction  $F(v)$ , on trouvera, par la solution du problème balistique inverse, une expression de  $F$  qui ne sera pas uniquement fonction de la vitesse de translation  $v$ ; il y entrera d'autres lettres  $\tau$ ,  $y$ , ..., qui d'ailleurs seront exprimables en fonction de  $v$ ; mais il s'introduira alors les caractéristiques de l'origine de la trajectoire, c'est-à-dire  $(c, V_0, \alpha)$ .

On aura ainsi altéré la loi de résistance de l'air expérimentale, et, au degré plus ou moins grand de cette altération, on pourra juger du degré d'approximation que l'équation  $y = f(x)$  comporte et des hypothèses que son adoption entraîne.

Il est possible, par exemple, que, graphiquement, la courbe  $y = f(x)$  adoptée sort d'une approximation très suffisante pour résoudre certains problèmes qui ne dépendent que de la géométrie de cette courbe (par exemple, problèmes de pointage), mais que cette même courbe, balistiquement, c'est-à-dire quand on déduira la loi du mouvement du projectile qu'elle entraîne, ne conduise qu'à des valeurs grossièrement erronées des éléments mécaniques tels que la vitesse, le temps ou la résistance de l'air.

Au lieu de la relation  $y = f(x)$ , on peut se donner une relation entre deux éléments, par exemple  $\tau = \varphi(v)$  ou  $x = \Psi(t)$ . On aura ainsi une série de problèmes balistiques inverses.

D'une façon plus générale, d'ailleurs, on peut dire que le problème balistique inverse traite de toutes les questions où l'on part de relations finies théoriques ou empiriques entre les éléments de la trajectoire et où l'on cherche à remonter aux hypothèses mécaniques qu'il faut supposer

pour que, introduites dans les équations différentielles exactes du mouvement, elles fassent retomber sur les relations finies, dont on peut vérifier ainsi les aptitudes balistiques.

**254. Formules de Lagrange.** — Ces formules donnent la solution du problème balistique inverse, lorsqu'on suppose donnée la courbe balistique  $y = f(x)$ .

Désignons par  $y'$ ,  $y''$ ,  $y'''$  les dérivées successives de  $y$  par rapport à  $x$ .

1<sup>o</sup> *Inclinaison.* — On a d'abord  $\tan \tau = y'$ , d'où

$$(1) \quad \cos \tau = [1 + y'^2]^{-\frac{1}{2}}.$$

2<sup>o</sup> *Vitesse.* — En différentiant l'équation qui donne  $\tan \tau$ , on en déduit

$$\frac{d\tau}{\cos^2 \tau} = y'' dx.$$

Mais, on a

$$dx = - \frac{v^2 \cos^2 \tau}{g} \frac{d\tau}{\cos^2 \tau}.$$

On aura donc, en éliminant  $\frac{d\tau}{\cos^2 \tau}$ ,

$$(2) \quad v^2 = -g \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

La vitesse horizontale  $u$  sera donnée par la relation

$$(3) \quad u = \left( -\frac{g}{y''} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

3<sup>o</sup> *Temps.* — Comme  $\frac{dx}{dt} = u$ , on aura pour le temps  $t$  l'intégrale

$$(4) \quad t = \int_0^x \left( -\frac{y''}{g} \right)^{\frac{1}{2}} dx.$$

4<sup>o</sup> *Résistance de l'air.* — La fonction  $F$ , ou plutôt l'accélération  $\lambda = c F(v)$  de la résistance de l'air se calculera ainsi qu'il suit :

Différentiant la relation

$$\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = -\frac{g}{y''},$$

on obtient

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{g y'''}{2 y'^2}.$$



Mais, comme la première équation du mouvement est

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -cF \cos \tau,$$

on aura, en identifiant, et remplaçant  $\cos \tau$  par sa valeur trouvée plus haut :

$$(5) \quad cF = -\frac{g y'''}{2 y'^2} (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}.$$

On peut mettre cette équation sous une autre forme, en remarquant que

$$v^4 = g^2 \frac{(1 + y'^2)^2}{y'^4} \quad \text{et que} \quad \cos^3 \tau = (1 + y'^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

On aura ainsi

$$(6) \quad \Delta = cF = -\frac{y'''}{2g} v^4 \cos^3 \tau.$$

Ainsi donc, le problème balistique inverse est complètement résolu à l'aide de différentiations, à l'exception du temps  $t$  qui exige une intégration.

Les trois premières dérivées  $y'$ ,  $y''$ ,  $y'''$  ont pour expression

$$y' = \tan \tau, \quad y'' = -\frac{g}{u^2}, \quad y''' = -\frac{2g c F}{v^4 \cos^3 \tau}.$$

5° *Rayon de courbure.* — Comme on a (160)  $r = -\frac{v^3}{g \cos^3 \tau}$ , remplaçant  $\frac{1}{\cos \tau}$  par  $(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}$  et  $v^2$  par  $-g \frac{1 + y'^2}{y''}$ , il viendra

$$r = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

pour valeur du rayon de courbure en un point de la trajectoire, ce qui est bien l'expression connue du rayon de courbure en coordonnées cartésiennes.

6° *Résumé.* — Le Tableau suivant renferme les formules ci-dessus établies :

$\begin{aligned} y' &= \tan \tau, \\ y'' &= -\frac{g}{u^2}, \\ y''' &= -2g \frac{cF \cos \tau}{u^4}, \end{aligned}$	$\begin{aligned} \tan \tau &= y', \\ \frac{u^2}{g} &= -y'', \\ t &= -\int_0^x \sqrt{-\frac{y''}{g}} dx, \\ cF &= -\frac{g y'''}{2 y'^2} (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$
---	--

7° On pourra écrire encore cette dernière formule, d'après Greenhill,

$$\frac{cF}{v^2} = - \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)}{2 \frac{d}{dx} \log y''}.$$

255. Formule de J. Bernoulli. — La formule (6) :

$$y'' = - \frac{2gcF(v)}{v^2 \cos^2 \tau},$$

a d'abord été établie par J. Bernoulli (1719) par une méthode que nous exposerons plus loin (t. II).

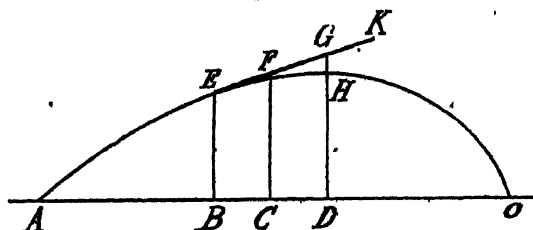
De son côté, Borda (1769) l'a démontrée non par la voie détournée qui vient d'être suivie, mais tout à fait directement comme résultant de l'énoncé même du problème balistique.

Nous donnons ici cette très intéressante démonstration, en conservant le texte et les notations de l'auteur.

PROBLÈME. — *Trouver la courbe décrite par un corps pesant sphérique, qui se meut dans un milieu résistant.*

Solution. — Soit AE() cette courbe; je tire à des distances infiniment petites et égales les ordonnées EB, FC et GD; j'appelle AB,  $x$ , BE,  $y$ , AE,  $s$ , la vitesse avec laquelle le corps parcourt EF,  $v$ ; le temps

Fig. 253.



employé pour parcourir AE,  $t$ ; la résistance du fluide au point E,  $\delta$ ; et la force de la gravité  $g$ .

« Considérons le corps lorsqu'il vient de parcourir EF avec la vitesse  $v$ , il est clair, que s'il était abandonné à lui-même; il parcourrait dans l'instant suivant une ligne FK dans le prolongement de EF qui serait à cette ligne EF comme la durée du second instant est à la durée du premier : on aura donc

$$dt : dt' :: ds : FK, \quad \text{d'où} \quad FK = ds + \frac{ds \, dt}{dt};$$

mais si l'on suppose que pendant le second instant le corps éprouve l'action de la gravité et la résistance du fluide, et qu'en vertu de ces deux forces, il parvienne en H, GH sera l'effet de l'action de la gravité, et GK sera celui de la résistance du fluide; on aura donc

$$GH = g \, dt^2 \quad \text{et} \quad GK = \delta \, dt^2.$$

» Maintenant, puisque  $BC = CD$ , on aura

$$FG = EF = ds, \quad FK = ds + \frac{ds \, d \, dt}{dt} = ds + GK.$$

Donc  $GK = \frac{ds \, d \, dt}{dt}$ . Par la même raison,  $GH = -d \, dy$ ; on aura donc

$$\delta \, dt^2 = \frac{ds \, d \, dt}{dt} \quad \text{et} \quad g \, dt^2 = -d \, dy;$$

éliminant  $dt$ , on aura

$$-2\delta \, d \, dy^2 = g \, ds \, d^2 y. \quad \text{« C. Q. F. T. et D. »} \quad (\text{BORDU}).$$

On passe de ces formules à celles qui emploient les notations actuelles en remarquant que  $d \, dy^2$  est mis pour  $y'^2$  et  $d^2 y$  pour  $y''$ ; enfin,  $ds$  pour  $\frac{dx}{\cos \tau}$  et  $\delta$  pour  $cF(v)$ .

On a donc

$$-2cF(v) = g \cos \tau \frac{y'''}{y'^2}.$$

Avec la relation  $y' = -\frac{g}{u^2}$ , on arrive à la formule du texte.

**256. Sur l'équation différentielle de la trajectoire.** — La relation (5) du n° 254, si l'on met dans le premier membre la fonction  $F(v)$  expérimentale de la résistance de l'air où l'on aura remplacé  $v$  par sa valeur (2) en fonction des dérivées  $y'$  et  $y''$ , deviendra une équation différentielle qui sera celle de la trajectoire.

(On aura ainsi l'équation différentielle du troisième ordre suivante :

$$y'''(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} + 2 \frac{c}{g} y''^2 F \left[ \left( -g \frac{1 + y'^2}{y''} \right)^{\frac{1}{2}} \right] = 0.$$

1° Pour  $c = 0$ , elle devient  $y''' = 0$ , ce qui donne l'équation d'une parabole.

2° Pour  $cF(v) = b_1 v$ , on trouve

$$y''' \sqrt{g} + 2b_1 (-y'')^{\frac{3}{2}} = 0.$$

L'intégration donne

$$\frac{y'''}{(-y'')^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2b_1}{\sqrt{g}} = -\Lambda_1, \quad \text{d'où} \quad y'' = \frac{1}{(\Lambda_1 x + \Lambda_0)^2};$$

puis

$$y' = \frac{1}{\Lambda_1} \frac{1}{\Lambda_1 x + \Lambda_0} + \Lambda_2;$$

et enfin

$$y = \Lambda_2 x + \frac{1}{\Lambda_1^2} \log(\Lambda_1 x + \Lambda_0).$$

C'est l'équation de la trajectoire; les constantes  $\Lambda_0$  et  $\Lambda_2$  sont déterminées par les conditions initiales  $V_0$  et  $\alpha$ . On a

$$\tan \alpha = \frac{1}{\Lambda_1 \Lambda_0} + \Lambda_2 \quad \text{et} \quad \Lambda_0^2 = \frac{u_0^2}{g}.$$

3° Si l'on part de l'équation (6) du n° 254 et qu'on suppose : *a.* que  $\cos \tau$  soit assez petit pour qu'on puisse remplacer ce cosinus par l'unité; *b.* que la résistance soit biquadratique, c'est-à-dire que  $cF(v) = b_4 v^4$ , on trouve

$$-2gb_4 = y''.$$

La courbe balistique est une courbe du troisième degré, de la forme

$$y = \Lambda_1 x + \Lambda_2 x^2 + \Lambda_3 x^3,$$

avec  $6\Lambda_3 = -2gb_4$ , et  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  étant déterminés par les conditions initiales

$$\Lambda_1 = \tan \alpha \quad \text{et} \quad 2\Lambda_2 = -\frac{g}{u_0^2}.$$

L'équation est donc

$$y = \tan \alpha x - \frac{gx^2}{2u_0^2} \left[ 1 + \frac{2}{3} b_4 u_0^2 x \right].$$

257. Sur une forme d'équation de la trajectoire. — On a la formule

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{-2gcF}{v^4 \cos^3 \tau}.$$

Tenant compte des conditions initiales

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_0 = \tan \alpha \quad \text{et} \quad \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)_0 = -\frac{g}{u_0^2},$$

il viendra, en intégrant d'abord deux fois, puis trois fois :

$$\begin{aligned} \tan \tau &= \tan \alpha - \frac{gx}{u_0^2} - 2g \int_0^x dx \int_0^x \frac{cF}{v^4 \cos^3 \tau} dx, \\ y &= x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2u_0^2} - 2g \int_0^x dx \int_0^x dx \int_0^x \frac{cF}{v^4 \cos^3 \tau} dx, \end{aligned}$$

Mais une intégration par parties donne

$$\int_0^x dx \int_0^x \frac{cF}{v^4 \cos^3 \tau} dx = x \int_0^x \frac{cF}{v^4 \cos^3 \tau} dx - \int_0^x \frac{x cF}{v^4 \cos^3 \tau} dx.$$

Le second membre peut s'écrire, en remarquant que la lettre qui figure, pour représenter la variable, sous le signe  $\int$  n'influe pas sur le résultat :

$$x \int_0^x \frac{cF}{v^4 \cos^3 \tau} d\xi - \int_0^x \frac{cF\xi}{v^4 \cos^3 \tau} d\xi = \int_0^x \frac{(x-\xi)}{v^4 \cos^3 \tau} cF d\xi.$$

Dans cette forme d'équation, où  $x$  ne figure que comme une constante indiquant la limite supérieure de l'abscisse  $\xi$ , les lettres  $v$  et  $\tau$  sont les valeurs de la vitesse et de l'inclinaison pour l'abscisse  $\xi$ , dont elles sont fonction.

On aura, de même, pour l'intégrale triple qui entre dans  $y$  :

$$\begin{aligned} & \int_0^x dx \int_0^x dx \int_0^x \frac{cF}{v^4 \cos^3 \tau} dx \\ &= \int_0^x x dx \int_0^x \frac{cF}{v^4 \cos^3 \tau} dx - \int_0^x dx \int_0^x \frac{x cF}{v^4 \cos^3 \tau} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \int_0^x \frac{cF}{v^4 \cos^3 \tau} dx - \frac{1}{2} \int_0^x \frac{x^2 cF}{v^4 \cos^3 \tau} dx - x \int_0^x \frac{x cF}{v^4 \cos^3 \tau} dx + \int_0^x \frac{x^3 cF}{v^4 \cos^3 \tau} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^x \frac{(\xi^2 + x^2 - 2x\xi) cF}{v^4 \cos^3 \tau} d\xi = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{(\xi - x)^2}{v^4 \cos^3 \tau} d\xi. \end{aligned}$$

On aura donc les deux formules suivantes :

$$\begin{aligned} y &= x \operatorname{tanga} - \frac{gx}{u_0^2} - 2gc \int_0^x \frac{(x-\xi)}{v^4 \cos^3 \tau} F(v) d\xi, \\ \operatorname{tang} \tau &= \operatorname{tanga} - \frac{gx^2}{2u_0^2} - gc \int_0^x \frac{(x-\xi)^2}{v^4 \cos^3 \tau} F(v) d\xi. \end{aligned}$$

Dans ces intégrales,  $v$  et  $\tau$  sont considérées comme fonction de  $\xi$ .

On écrira encore, en posant  $\zeta = \xi x$ , avec la variable  $\zeta$  ( $x$  étant ici une constante, limite supérieure des intégrales) :

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} \tau &= \operatorname{tanga} - \frac{gx}{u_0^2} - 2gcx^2 \int_0^1 \frac{(1-\zeta)}{v^4 \cos^3 \tau} F(v) d\zeta, \\ y &= x \operatorname{tanga} - \frac{gx^2}{2u_0^2} - gcx^3 \int_0^1 \frac{(1-\zeta)^2}{v^4 \cos^3 \tau} F(v) d\zeta. \end{aligned}$$

Cette forme d'équation de la trajectoire a été utilisé par le colonel Siacci, par M. de Sparre, à qui est due cette démonstration, et par le lieutenant-colonel Vallier.

*Remarque.* — On peut donner (colonel Vallier) une démonstration beaucoup plus simple de la formule

$$y = x \tan g z - \frac{g x^2}{2 u_0^2} - g c \int_0^x \frac{(x - \xi)^2}{v^4 \cos^3 \tau} F(v) d\xi$$

de la manière suivante.

Intégrons par parties l'équation

$$y = \int_0^x \tan g \tau d\xi.$$

On aura, en tenant compte de la relation  $d\xi = -\frac{u^2}{g} \frac{d\tau}{\cos^2 \tau}$ :

$$y = x \tan g \tau - \int_0^x \xi \frac{d \tan g \tau}{d\xi} d\xi = x \tan g \tau + g \int_0^x \xi \frac{d\xi}{u^2}.$$

Mais, on a identiquement

$$g x \int_0^x \frac{d\xi}{u^2} = -x [\tan g \tau - \tan g z].$$

Par suite, en remplaçant  $x \tan g \tau$  par sa valeur, on écrira

$$y = x \tan g z - g \int_0^x (x - \xi) \frac{d\xi}{u^2}.$$

Intégrons de nouveau par parties, on aura

$$y = x \tan g z - \frac{g}{2} \left[ \left( \frac{x - \xi}{u} \right)^2 \right]_0^x + g \int_0^x (x - \xi)^2 \frac{1}{u^3} \frac{du}{d\xi} d\xi.$$

Mais  $\frac{du}{d\xi} = -\frac{c F(v)}{v}$ . On aura donc

$$y = x \tan g z - \frac{g x^2}{2 u_0^2} - g c \int_0^x \frac{(x - \xi)^2}{v^4 \cos^3 \tau} F(v) d\xi.$$

C'est la formule annoncée.

**238. Sur un théorème relatif à l'angle de portée maximum.** — Prenons l'équation de la trajectoire sous la forme précédente :

$$y = x \tan g z - \frac{g x^2}{2 u_0^2} - g c \int_0^x \frac{(x - \xi)^2}{v^4 \cos^3 \tau} F(v) d\xi,$$

qui donne la portée  $X$  par la relation

$$\operatorname{tang} z = \frac{gX}{2u_0^2} + \frac{gc}{X} \int_0^{\tau} \frac{(X - \xi)^2}{v^2 \cos^3 \tau} F(v) d\xi;$$

et, remplaçant  $d\xi$  par  $\left(-\frac{v^2 d\tau}{g}\right)$ , il viendra

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{gX}{2u_0^2} - \frac{c}{X} \int_{\alpha}^{\omega} \frac{(X - \xi)^2}{v^2} F(v) \frac{d\tau}{\cos^3 \tau}.$$

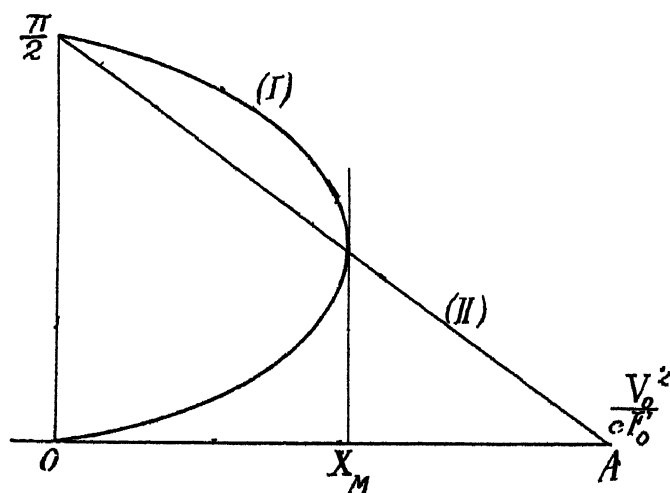
Soit

$$I = - \int_{\alpha}^{\omega} \frac{(X - \xi)^2}{v^2} F(v) \frac{d\tau}{\cos^3 \tau}.$$

Différentiations par rapport à  $\alpha$ . On aura

$$\frac{\partial z}{\cos^2 \alpha} = \frac{g}{V_0^2} \frac{\cos \alpha dX + X \sin \alpha d\alpha}{\cos^4 \alpha} - \frac{c}{X^2} I dX + \frac{c}{X} \left[ \left( \frac{dI}{d\alpha} \right) d\alpha + \left( \frac{dI}{dX} \right) dX \right].$$

Fig. 254.



S'il s'agit de la portée maximum,  $dX = 0$ , et l'on a

$$(1) \quad \frac{I}{\cos^2 \alpha_M} = \frac{g}{V_0^2} \frac{X_M \sin \alpha_M}{\cos^3 \alpha_M} + \left( \frac{dI}{d\alpha} \right)_M \frac{c}{X_M}.$$

Il faut donc évaluer  $\left( \frac{dI}{d\alpha} \right)$ .

Cette intégrale se composera de deux parties :

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = \frac{X^2 F(V_0)}{V_0^2 \cos^3 \alpha} - \int_{\alpha}^{\omega} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{(X - \xi)^2 F(v)}{v^2 \cos^3 \tau} \right] d\tau.$$

La première se rapporte à la limite de l'intégrale; la seconde à la différentiation sous le signe  $\int$ , les variables  $\xi$  et  $v$  étant exprimées en fonction de  $\tau$  et de  $z$ .

Si l'on admet, avec le colonel Vallier, que l'intégrale du second membre est nulle, on aura, en remplaçant dans (I) la relation

$$\cos z_M = \frac{X_M}{V_0^2} (g \sin z_M + c F_0).$$

Cette formule détermine, dans le plan où l'on aurait tracé la courbe (I) des portées  $X$  en fonction des angles de projection, une seconde courbe (II) qui coupe la première au point de portée maximum (fig. 254).

Mais, si cette formule est vraie dans le vide ( $c = 0$ ) et, ainsi qu'on le verra, dans le cas d'une résistance linéaire, la démonstration n'est pas faite dans le cas d'une loi quelconque de résistance.

**259. Autres problèmes balistiques inverses.** — 1° Supposons qu'on donne, comme relation finie,  $x = \varphi(t)$ ; on en déduit la vitesse horizontale  $v$  par la formule  $u = \varphi'(t)$ .

De la formule  $dt = \frac{u}{g} \frac{d\tau}{\cos^2 \tau}$ , on déduit

$$\tan \tau = \tan z - g \int_0^t \frac{dt}{\varphi'(t)},$$

qui fait connaître l'inclinaison  $\tau$ .

L'ordonnée  $y$ , qui est définie par  $dy = dx \tan \tau$ , sera donnée par la formule

$$y = \int_0^t \left[ \tan z - g \int_0^t \frac{dt}{\varphi'(t)} \right] \varphi'(t) dt.$$

**Résistance de l'air.** — On écrira, puisque  $\frac{d^2 x}{dt^2} = \varphi''(t)$ ,

$$\varphi''(t) = -c F \cos \tau = -c F \frac{u}{v};$$

mais  $\varphi'(t) = u$ , donc

$$\varphi''(t) = -c F \frac{\varphi'(t)}{v}.$$

Par suite, il viendra

$$c F = -v \frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)}.$$

Le problème balistique inverse est encore complètement résolu.

2° On se donne l'hodographe. Si l'on pose, par exemple,  $v = \Psi(\tau)$ ,



es autres éléments seront fournis (158) par les équations

$$g \, dt = -\Psi \frac{d\tau}{\cos \tau}, \quad g \, dx = -\Psi^2 d\tau, \quad g \, dy = -\Psi^2 \tan \tau \, d\tau.$$

D'autre part, l'équation différentielle de l'hodographe

$$\frac{d(v \cos \tau)}{d\tau} = \frac{c}{g} v F$$

étant développée sous la forme

$$\frac{cF}{g} = \sin \tau - \frac{\cos \tau}{v} \frac{dv}{d\tau},$$

on voit que la fonction  $F$  sera déterminée par la relation

$$\frac{cF}{g} = \sin \tau - \cos \tau \frac{\Psi'(\tau)}{\Psi(\tau)}.$$

## II. — APPLICATIONS.

**260. Trajectoire de Piton-Bressant.** La trajectoire de Pito Bressant est la courbe du troisième degré :

$$y = x \tan \alpha - \frac{g x^3}{2 V_0^2 \cos^2 \alpha} (1 + K V_0^2 x),$$

$K$  étant un coefficient constant.

On calcule immédiatement :

$$y' = \tan \alpha - \frac{g x}{V_0^2 \cos^2 \alpha} \left[ 1 + \frac{3}{2} K V_0^2 x \right],$$

$$y'' = -\frac{g}{V_0^2 \cos^2 \alpha} [1 + 3 K V_0^2 x],$$

$$y''' = -\frac{3 g K}{\cos^2 \alpha}.$$

En employant les formules du n° 254, on obtient :

1° *Inclinaison*, en fonction de  $x$ ,

$$\tan \tau = \tan \alpha - \frac{g x}{V_0^2 \cos^2 \alpha} \left( 1 + \frac{3}{2} K V_0^2 x \right);$$

2° *Vitesse horizontale*, en fonction de  $x$ ,

$$u = u_0 (1 + 3 K V_0^2 x)^{-\frac{1}{2}};$$

3° *Temps*, en fonction de  $x$ ,

$$u_0 t = \frac{2}{9} \frac{1}{KV_0^2} \left[ (1 + 3KV_0^2 x)^{\frac{3}{2}} - 1 \right];$$

4° *Résistance de l'air*,

$$cF = \frac{3K}{2} \frac{v^4 \cos^3 \tau}{\cos^2 \alpha}.$$

On voit que la résistance de l'air ne dépend pas seulement, en un point, de la vitesse  $v$ , mais aussi de l'inclinaison  $\tau$  et de l'inclinaison  $\alpha$  à l'origine. On pourrait exprimer  $\cos^3 \tau$  en fonction de  $v$  et de  $(\alpha, V_0, K)$ .

La trajectoire de Piton-Bressant altère donc la loi de résistance de l'air. Dans le cas où  $\alpha$  et  $\tau$  sont assez petits pour que les deux cosinus soient, sensiblement, égaux à l'unité, l'équation de Piton-Bressant suppose une résistance  $cF = \frac{3K}{2} v^4$ , c'est-à-dire biquadratique.

Il en serait de même si le rapport  $\frac{\cos^3 \tau}{\cos^2 \alpha}$  pouvait, dans les limites de la pratique, être remplacé par une constante indépendante de  $\alpha$ . Cette dernière hypothèse est connue, en Balistique, sous le nom d'*artifice d'intégration de Didion* et peut s'appliquer à des lois de résistance quelconques.

261. *Trajectoire du général Duchène.* - 1° Soit donnée la courbe balistique :

$$y' = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} (1 + ax + bx^2),$$

$a$  et  $b$  étant des constantes.

On formera

$$y' = \tan \alpha - \frac{gx}{V_0^2 \cos^2 \alpha} \left[ 1 + \frac{3}{2} ax + 2bx^2 \right],$$

$$y'' = - \frac{g}{V_0^2 \cos^2 \alpha} [1 + 3ax + 6bx^2],$$

$$y''' = - \frac{3g}{V_0^2 \cos^2 \alpha} [a + 4bx].$$

Donc :

$$\tan \tau = \tan \alpha - \frac{gx}{V_0^2 \cos^2 \alpha} \left[ 1 + \frac{3}{2} ax + 2bx^2 \right],$$

$$u^2 = \frac{u_0^2}{1 + 3ax + 6bx^2},$$

$$t = \frac{1}{V_0} \int_0^x [1 + 3ax + 6bx^2]^{\frac{1}{2}} dx,$$

$$cF = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{v^3 \cos^3 \tau}{V_0^2 \cos^2 \alpha} \sqrt{(3a^2 - 8b)v^2 \cos^2 \tau + 8bV_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

La formule qui donne le temps s'intègre en posant

$$\frac{8b}{3a^3 - 8b} (1 + 3ax + 6bx^2) = 3 \operatorname{tang}^2 \varphi.$$

2° L'expression de  $cF(v)$  prend une forme particulièrement simple si l'on suppose  $8b = 3a^2$ .

(On a, en effet,

$$cF = \frac{3a}{2} \frac{v^2 \cos^2 \tau}{V_0 \cos \alpha}.$$

Si l'on fait sur  $\tau$  et  $\alpha$  les mêmes hypothèses que pour l'équation de Piton-Bressant, c'est-à-dire  $\cos \tau$  et  $\cos \alpha$  voisins de l'unité, ou si l'on emploie l'artifice de Didion, on voit que  $cF = \frac{3a}{2V_0} v^2$ .

L'équation du quatrième degré :

$$y = x \operatorname{tang} \alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} \left( 1 + \alpha' V_0 x + \frac{3}{8} \alpha'^2 V_0^2 x^2 \right),$$

correspond ainsi à la loi cubique

$$cF = \frac{3}{2} \alpha' v^3.$$

3° Pour  $b = 0$ , on a la loi biquadratique

$$cF = \frac{3a}{2} \frac{v^4}{V_0^2}.$$

**262. Hyperbole de Newton.** — Soit l'équation d'une hyperbole admettant une asymptote verticale et une tangente à l'origine égale à  $\operatorname{tang} \alpha$  :

$$y = \frac{m}{a} \frac{ax - x^2}{m - x} \operatorname{tang} \alpha,$$

$a$  et  $m$  étant des constantes.

On calculera :

$$y'(m - x) - y = \frac{m}{a} (a - x) \operatorname{tang} \alpha,$$

$$y''(m - x) - 2y' = -\frac{2m}{a} \operatorname{tang} \alpha,$$

$$y'''(m - x) - 3y'' = 0.$$

(On en déduira :

1° L'inclinaison en fonction de  $x$ ,

$$\operatorname{tang} \tau = \frac{m}{a} \left[ 1 - \frac{m(m - a)}{(m - x)^2} \right] \operatorname{tang} \alpha;$$

2° La *vitesse horizontale*  $u$  en fonction de  $x$ ,

$$u^2 = \frac{ga(m-x)^3}{m^2(m-a)\tan\alpha};$$

3° Le *temps*  $t$  en fonction de  $x$ ,

$$t = \gamma m \sqrt{\frac{2}{ga}(m-a)\tan\alpha} \left[ (m-x)^{-\frac{1}{2}} - m^{-\frac{1}{2}} \right];$$

4° La *résistance de l'air*  $cF$ , dont l'expression est  $cF = -\frac{\gamma'''}{2g} \frac{u^4}{\cos\tau}$ , se calculera ainsi qu'il suit :

On a

$$\gamma''' = \frac{3\gamma''}{m-x} = -\frac{3g}{u^2(m-x)};$$

mais

$$(m-x) = \left[ \frac{\gamma m^2(m-a)\tan\alpha}{ga} \right]^{\frac{1}{3}} u^{\frac{2}{3}}.$$

Donc

$$\gamma''' = -\frac{3g[ga]^{\frac{1}{3}}}{u^{2+\frac{2}{3}}[2m^2(m-a)\tan\alpha]^{\frac{1}{3}}}.$$

On aura, par suite :

$$cF = \frac{3}{2} \frac{[ga]^{\frac{1}{3}}}{[2m^2(m-a)\tan\alpha]^{\frac{1}{3}}} \frac{u^{\frac{1}{3}}}{\cos\tau}.$$

Mais, à l'origine,  $\alpha$  et  $m$  sont liés aux caractéristiques initiales de la trajectoire par l'équation

$$u_0^2 = \frac{gam}{2(m-a)\tan\alpha},$$

qui résulte de l'équation  $\gamma'' = -\frac{g}{u^2}$ .

(On peut encore écrire

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{m} = \frac{g}{V_0^2 \sin 2\alpha}.$$

On aura, par suite, en portant dans  $cF$  la valeur de  $(m-a)\tan\alpha$ , l'expression

$$(1) \quad cF = \frac{3}{2} \frac{u^{\frac{1}{3}} u_0^{\frac{2}{3}}}{m \cos\tau}.$$

Ainsi, la résistance dépend, dans ce cas, comme dans celui de l'équation de Piton-Bressant, non seulement de la vitesse  $v$ , mais aussi de l'inclinaison  $\tau$  au point considéré, inclinaison qu'on peut, d'ailleurs, exprimer en fonction de  $v$  et des données initiales.

Dans le cas où  $\alpha$  et  $\tau$  restent assez petits pour que leurs cosinus soient pris sensiblement égaux à l'unité ou dans le cas où l'on emploie l'artifice de Didion, la *trajectoire hyperbolique de Newton* suppose une résistance de la forme

$$cF = \frac{3}{2^{\frac{1}{3}}} \frac{V_0^{\frac{2}{3}}}{m} v^{\frac{4}{3}}.$$

Si l'on a choisi pour  $m$ , qui est arbitraire, la valeur

$$m = \frac{3}{2^{\frac{1}{3}}} \frac{V_0^{\frac{2}{3}}}{H},$$

il viendra

$$cF = H v^{\frac{4}{3}}.$$

*La résistance est proportionnelle à la puissance  $\frac{4}{3}$  de la vitesse.*

6° *Formules du lieutenant-colonel Petitcol.* — Si l'on poursuit la solution balistique avec l'hypothèse de l'hyperbole de Newton, on arrive à d'assez curieuses formules, dont voici les principales.

Appelons  $x'$  la distance de l'origine à l'asymptote verticale. On peut écrire l'hyperbole de Newton sous la forme

$$y = x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2 V_0^2 \cos^2 \alpha} \frac{x'}{x' - x},$$

ce qui s'identifie avec l'équation donnée plus haut en posant :

$$m = x' \quad \text{et} \quad a \left( 1 + \frac{g x'}{2 V_0^2 \sin \alpha \cos \alpha} \right) = 2'.$$

En introduisant la portée définie par

$$\frac{R}{2 V_0^2 \cos^2 \alpha} = \frac{x' - X}{x' X} \tan \alpha,$$

on peut écrire l'équation de la trajectoire

$$y = \left( 1 - \frac{x}{X} \frac{x' - X}{x' - x} \right) x \tan \alpha.$$

Dè la formule de la tangente

$$y' = \tan \alpha - \frac{g x x'}{2 V_0^2 \cos^2 \alpha} \frac{(2x' - x)}{(x' - x)^2}$$

ou

$$y' = \left[ 1 - \frac{x}{X} \frac{(x' - X)(2x' - x)}{(x' - x)^2} \right] \tan \alpha,$$

on déduit, pour l'angle de chute,

$$\operatorname{tang} \omega = -\frac{2V_0' \sin^2 \alpha}{gX} \quad \text{ou encore} \quad \frac{\operatorname{tang} \omega}{\operatorname{tang} \alpha} = -\frac{V_0' \sin 2\alpha}{gX} = -\frac{x'}{x' - X}.$$

Pour le sommet de la trajectoire,  $y' = 0$ , on trouve, en posant  $\omega_1 = -\omega$ :

$$X_s = x' - x' \left( \frac{gX}{V_0'^2 \sin^2 \alpha} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{X \operatorname{tang}^{\frac{1}{2}} \omega_1}{\operatorname{tang}^{\frac{1}{2}} \omega_1 + \operatorname{tang}^{\frac{1}{2}} \alpha},$$

$$Y_s = X \frac{\operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \omega_1}{(\operatorname{tang}^{\frac{1}{2}} \omega_1 + \operatorname{tang}^{\frac{1}{2}} \alpha)^2}.$$

Pour le temps  $t$ , on trouve, en un point courant,

$$t = \frac{2x'}{V_0 \cos \alpha} \left[ \left( \frac{x'}{x' - x} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right],$$

et, au point de chute, on aura la formule

$$T^2 = \frac{8Y_s}{g},$$

comme dans le vide.

Pour la vitesse restante, on obtient

$$V_\omega = \frac{V_0 \sin \alpha}{\sin \omega_1} \left( \frac{\operatorname{tang} \alpha}{\operatorname{tang} \omega_1} \right)^{\frac{1}{2}},$$

et, enfin, pour la *fonction de résistance de l'air*,

$$\frac{cF}{g} = \frac{V_0 v \cos \alpha}{2x'} \left( \frac{x' - x}{x'} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

*Remarque.* On trouve, chez divers auteurs, généralisée l'hyperbole de Newton sous des formes telles que

$$y = x \operatorname{tang} \alpha - \frac{gx^2}{2V_0'^2 \cos^2 \alpha} \left( \frac{x'}{x' - x} \right)^a$$

ou

$$y = x \operatorname{tang} \alpha - \frac{gx^2}{2V_0'^2 \cos^2 \alpha} \left( 1 + a \log \frac{x'}{x' - x} \right).$$

**263. Les coniques comme courbes balistiques.** -- Dès le début de la Balistique, le désir de ramener à une forme simple l'équation de la trajectoire conduisit à essayer de remplacer cette trajectoire par un arc de conique.

« Newton proposa d'adopter une hyperbole dont l'une des asymptotes

était verticale. Depuis, les recherches de Saint-Robert semblèrent encourager à suivre cette voie; il démontrait, en effet, que la trajectoire réelle possède deux asymptotes dont une verticale, que le sommet se trouve plus près du point de chute que de l'origine, que la courbure va en croissant jusqu'à un point situé entre le sommet et le point de chute, pour décroître ensuite indéfiniment. Toutes ces propriétés se retrouvent dans l'hyperbole de Newton.

» Aussi de nombreux auteurs, parmi lesquels nous nous bornerons à citer Indra et Oëkinghaus, ont-ils repris à leur compte l'hypothèse de Newton en admettant que l'on pouvait, sans erreur sensible, remplacer la trajectoire réelle par un arc d'hyperbole. On a également proposé l'adoption d'un arc de parabole à axe oblique (220, 4°) » (C' Batailler).

Aussi, paraît-il intéressant de traiter d'une façon générale ce problème pour nous rendre compte des hypothèses qu'une telle solution comporte et des cas où son application pourra être légitime. La discussion qui suit est due au commandant Batailler.

1° Dans ce problème, on prend l'équation générale des coniques passant par l'origine sous la forme

$$Ay = 1 + Bx - \zeta^2,$$

en posant

$$\zeta = 1 - \alpha x + l\alpha^2 x^2.$$

Si  $l < 0$ , on a une *ellipse*; si  $l = 0$ , on a une *parabole*; si  $l > 0$ , on a une *hyperbole*.

Si, dans cette dernière hypothèse, on a  $l < 1$ , les directions asymptotiques sont comprises dans le troisième quadrant.

Fig. 255.

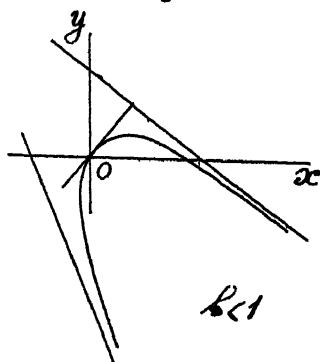
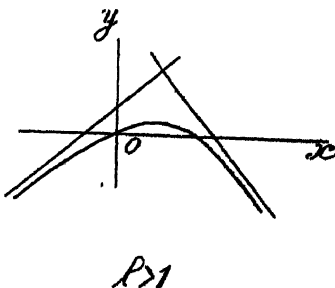


Fig. 256.



Si  $l > 1$ , une des directions asymptotiques est dans le troisième, l'autre dans le premier ou le quatrième.

L'hyperbole ressemble donc assez, comme forme, dans ce cas, et sur une certaine partie, à la *courbe balistique*. Le centre de cette conique a pour abscisse  $\alpha x = \frac{1}{l}$ .

Les dérivées  $y'$ ,  $y''$  et  $y'''$  auront pour expressions :

$$\begin{aligned} y' &= \frac{B}{A} + \frac{\alpha}{A} (1 - \alpha x) \zeta^{-\frac{1}{2}}, \\ -y'' &= \frac{\alpha^2}{A} (l-1) \zeta^{-\frac{3}{2}} = \frac{g}{u^2}, \\ -y''' &= \frac{3\alpha^3}{A} (l-1)(1 - \alpha x) \zeta^{-\frac{5}{2}} = \frac{2g^2 F \cos \alpha}{u^4}. \end{aligned}$$

Soient donnés à l'origine  $V_0$ ,  $\alpha$  et  $cF_0$ , résistance initiale; on aura

$$\begin{aligned} B &= A \tan \alpha - \alpha, \\ A g &= u_0^2 \alpha^2 (l-1), \\ \alpha &= \frac{2}{3} cF_0 \frac{\cos \alpha}{u_0^2}; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} B &= \frac{l-1}{g} \left( \frac{2}{3} \frac{cF_0}{V_0} \right)^2 \tan \alpha - \frac{2}{3} \frac{cF_0}{V_0 \cos \alpha}, \\ A &= \frac{l-1}{g} \left( \frac{2}{3} \frac{cF_0}{V_0} \right)^2, \\ \alpha &= \frac{2}{3} \frac{cF_0}{V_0 \cos \alpha}. \end{aligned}$$

Ainsi on pourra déterminer  $\alpha$ ,  $A$  et  $B$  en fonction des caractéristiques initiales et du paramètre arbitraire  $l$ .

La forme de l'équation de la trajectoire est la suivante :

$$A^2 y^2 + (B^2 - l\alpha^2) x^2 - 2A\alpha xy + 2(\alpha + B)x - \alpha y = 0.$$

2° *Résistance de l'air*. — Des deux relations

$$\frac{g}{u^2} = \frac{\alpha^2}{A} (l-1) \zeta^{-\frac{3}{2}} \quad \text{et} \quad \frac{g}{u_0^2} = \frac{\alpha^2}{A} (l-1),$$

on tire

$$u = u_0 \zeta^{\frac{1}{2}}.$$

De l'équation

$$\zeta = 1 - 2\alpha x + l\alpha^2 x^2 = \left( \frac{u}{u_0} \right)^2,$$

on tirera, par résolution de l'équation du second degré,

$$1 - l\alpha x = \left[ 1 - l' + l \left( \frac{u}{u_0} \right)^{\frac{4}{3}} \right]^{\frac{1}{2}}.$$



En portant ces valeurs dans l'équation qui donne  $cF$ , il viendra

$$cF = \frac{cF_0 \cos \alpha}{\cos \tau} \left\{ \left( \frac{u}{u_0} \right)^{\frac{4}{3}} \left[ 1 - l + l \left( \frac{u}{u_0} \right)^{\frac{4}{3}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi que dans les exemples précédents, la loi de résistance contient  $\alpha$  et  $\tau$ . Elle ne sera pratiquement dépendante de  $v$  seulement que pour de petites valeurs de  $\tau$  et de  $\alpha$ . C'est donc l'emploi de l'artifice de Didion (260).

On aura alors

$$cF = cF_0 \left\{ \left( \frac{v}{V_0} \right)^{\frac{4}{3}} \left[ 1 - l + l \left( \frac{v}{V_0} \right)^{\frac{4}{3}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Une telle loi pourra être admissible et susceptible d'applications pratiques si l'on peut déterminer le paramètre arbitraire  $l$  de manière à compenser suffisamment la courbe expérimentale de la résistance de l'air, à partir de la vitesse initiale  $V_0$ .

3° *Discussion.* — Pour la discussion, cherchons le degré  $n$  de la résistance en chaque point.

Ce degré, défini par la formule  $n = \frac{vF'(v)}{F}$ , a pour expression

$$n = \frac{\frac{4}{3} \frac{\left( \frac{v}{V_0} \right)^{\frac{4}{3}} - \frac{l-1}{l}}{\left( \frac{v}{V_0} \right)^{\frac{4}{3}} - \frac{l-1}{l}}}{\frac{l-1}{l}}.$$

Le degré initial ( $v = V_0$ ) est  $n = \frac{2}{3}(1+l)$ ; pour une vitesse infiniment petite, il est égal, quel que soit  $l$ , à  $\frac{2}{3}$ .

La discussion peut être résumée dans le Tableau suivant :

- $-\infty < l < -1$ ... *Ellipse.* — La résistance croît à partir de  $V_0$ . Maximum pour  $\frac{v}{V_0} = \left( \frac{l-1}{2l} \right)^{\frac{3}{4}}$ . Elle décroît jusqu'à zéro; pour  $v = 0$ , elle est tangente à l'axe des  $cF$ . Le degré d'abord négatif, puis nul, croît ensuite jusqu'à  $\frac{2}{3}$ .
- $-1 < l < 0$ ... *Ellipse.* — La résistance diminue jusqu'à zéro; la courbe est tangente à l'axe des  $cF$ . Le degré  $n$  positif croît jusqu'à  $\frac{2}{3}$ .

- $l = 0$ ..... *Parabole*. — La résistance est une *parabole* de degré  $\frac{2}{3}$  :  
on a  $c F(v) = bv^{\frac{2}{3}}$ .
- $0 < l < 1$ ..... *Hyperbole*. — La résistance est concave vers le bas si  $l < 0,22$   
si  $l > 0,22$ , elle est d'abord concave vers le haut jusqu'au  
point  $\left(\frac{v}{V_0}\right)^{\frac{1}{3}} = 0,28 \frac{1-l}{l}$ . Le degré toujours inférieur à  $\frac{4}{3}$   
va en diminuant jusqu'à  $\frac{2}{3}$ .
- $l = 1$ ..... *Hyperbole à asymptote verticale*. — La résistance est une  
*parabole* de degré  $\frac{4}{3}$ . On a  $c F(v) = bv^{\frac{4}{3}}$ . La résistance est  
tangente à l'axe des  $v$  à l'origine. C'est le cas qui corres-  
pond à l'hyperbole de Newton.
- $1 < l < \infty$ ..... *Hyperbole*. — 1° Si  $l < 2,28$ . La courbe de résistance pré-  
sente un point d'inflexion pour  $\left(\frac{v}{V_0}\right)^{\frac{1}{3}} = 2,78 \frac{l-1}{l}$ . Elle se  
termine normalement sur l'axe des  $v$  au point  $\left(\frac{v}{V_0}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{l-1}{l}$ .  
Le degré  $n$  est toujours  $> \frac{4}{3}$  et croît de  $\frac{2}{3}(1+l)$  à  $\infty$ .  
2° Si  $l = 2,28$ . Mêmes propriétés, mais pas de point d'in-  
flexion.

La figure ci-après représente quelques-unes des formes que peut présenter la loi de résistance.

D'après cette discussion, on voit que, seules, les valeurs de  $l > 1$  peuvent convenir pour représenter la loi expérimentale de résistance dont on a indiqué la forme (8).

En particulier, une compensation de ce genre peut, d'après la forme de la courbe des  $F(v)$ , se concevoir dans la région des hautes vitesses où, moyennant une détermination convenable du paramètre arbitraire  $l$ , elle peut être substituée à la loi de Chapel  $F(v) = b_1 v - b_0$ , qui présente la même limite d'emploi.

(Or, on peut représenter, dans la région des vitesses supérieures à 300<sup>m</sup>, la loi expérimentale de la résistance de l'air par la forme (9, 6°)

$$F(v) = \sqrt{Mv^{\frac{4}{3}}(v^{\frac{1}{3}} - N)}.$$

Nous pourrions donc déterminer le paramètre  $l$  en identifiant l'expression de  $F(v)$  avec celle qui a été trouvée plus haut et qui est

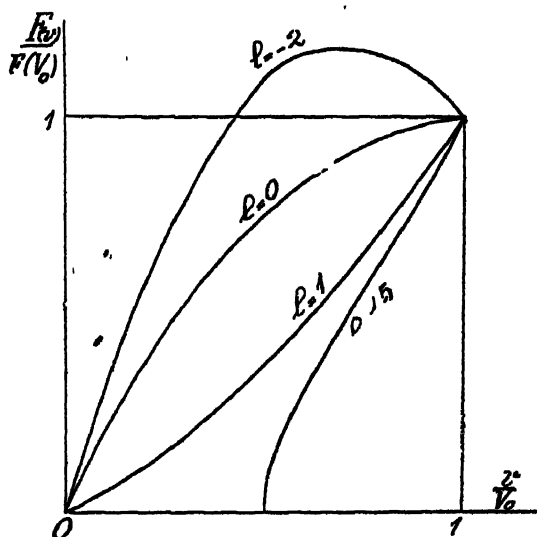
$$F_0 \left\{ \left( \frac{v}{V_0} \right)^{\frac{1}{3}} \left[ 1 - l + l \left( \frac{v}{V_0} \right)^{\frac{1}{3}} \right] \right\}^{\frac{4}{3}}.$$

L'identification se fera en prenant

$$l = \frac{V_0^{\frac{1}{2}}}{V_0^{\frac{1}{2}} N} \quad \text{et} \quad F_0^2 = M(V_0^{\frac{1}{2}} - N).$$

Avec cette valeur de  $l$ , la trajectoire est une hyperbole du second degré, dont l'équation, qui a été donnée plus haut, est tout à fait différente de celle de Newton, qui correspond à l'hypothèse  $l = 1$ .

Fig. 257.



Dans l'équation de la trajectoire, en plus de  $l$ , figurent les coefficients  $A$ ,  $B$  et  $\alpha$  renfermant  $cF_0$  que l'on exprimera par la formule  $F_0^2 = M(V_0^{\frac{1}{2}} - N)$ , en fonction de  $M$  et de  $N$ .

Cette trajectoire correspond, dans l'hypothèse de l'artifice de Didion, à la loi de résistance, très admissible entre certaines limites :

$$F(v) = \sqrt{M v^{\frac{1}{2}} (v^{\frac{1}{2}} - N)}.$$

**264. Deuxième problème balistique inverse**  $(x, t)$ . — 1<sup>re</sup> Supposons qu'on donne  $b, x = u_0(1 - e^{-bt})$ , comme relation entre l'abscisse et le temps. La résistance de l'air est donnée (243) par la formule

$$cF = -v \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}.$$

On a

$$\varphi'(t) = e^{-bt}, \quad \varphi(t) = -b_1 e^{-b_1 t};$$

d'où

$$cF = b_1 v.$$

La résistance est linéaire.

2° Soit la formule proposée

$$b_2 t = \frac{1}{V_0} (e^{b_2 v} - 1).$$

On a

$$b_2 x = \log(1 + b_2 V_0 t);$$

d'où

$$\varphi'(t) = \frac{V_0}{1 + b_2 V_0 t}, \quad \varphi''(t) = -\frac{b_2 V_0^2}{(1 + b_2 V_0 t)^2}.$$

Donc

$$cF = \frac{b_2 v V_0}{(1 + b_2 V_0 t)}.$$

Mais, puisque  $u = \varphi'(t)$ , on écrira

$$cF = b_2 v^2 \cos \tau.$$

C'est donc la résistance quadratique que l'on suppose, si l'on prend  $\tau$  assez petit pour que le cosinus reste très voisin de l'unité (ou artifice de Didion).

3° Soit  $x = \frac{At}{1 + Bt}$  (formule de d'Antoni).

On a

$$u = \varphi'(t) = \frac{A}{(1 + Bt)^2}, \quad \varphi'' = \frac{-2AB}{(1 + Bt)^3}.$$

Par suite,

$$cF = -v \frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)} = \frac{2Bv}{1 + Bt} = \frac{2B}{\sqrt{A}} v \sqrt{u} = \frac{2B}{\sqrt{A}} v^{\frac{3}{2}} \cos^{\frac{1}{2}} \tau.$$

4° Soit

$$t = \frac{x}{u_0} (1 + ax + bx^2).$$

On trouve

$$cF = \frac{2v^{\frac{3}{2}} \cos^{\frac{3}{2}} \tau}{\pi_0} \sqrt{(a^2 - 3b)u + 3bu_0}.$$

On pourra identifier (cas de l'artifice de Didion) cette loi à une loi donnée

$$cF = v^{\frac{3}{2}} \sqrt{Mv + N},$$

en prenant

$$b = \frac{NV_0}{3.4}, \quad a^2 = V_0(MV_0 + N).$$

Cette loi peut, dans certaines limites, représenter la loi réelle de résistance.

265. *Autres problèmes balistiques inverses.* — 1° *Quelle loi de résistance suppose l'intégrale de l'hodographe  $v \cos(\theta + \tau) = q$ ,  $\theta$  et  $q$  étant des constantes?*

La formule générale est

$$\frac{cF}{g} = \sin \tau - \cos \tau \frac{\Psi'(\tau)}{\Psi(\tau)}.$$

Or, ici

$$\Psi(\tau) = \frac{q}{\cos(\theta + \tau)}, \quad \text{d'où} \quad \Psi'(\tau) = q \frac{\sin(\theta + \tau)}{\cos^2(\theta + \tau)}.$$

On a donc

$$\frac{cF}{g} = \sin \tau - \cos \tau \frac{\sin(\theta + \tau)}{\cos(\theta + \tau)} = - \frac{\sin \theta}{\sin(\theta + \tau)}.$$

Donc

$$\frac{cF}{g} = \left( - \frac{\sin \theta}{q} \right) v.$$

*La résistance est proportionnelle à la vitesse.*

2° *Quelle loi de résistance suppose l'intégrale de l'hodographe*

$$\tan \tau + \frac{K}{nb_n v^n \cos^n \tau} = \tan \theta.$$

On en déduit

$$v = \left[ \frac{g}{nb_n} \right]^{\frac{1}{n}} \frac{1}{\cos \tau (\tan \theta - \tan \tau)^{\frac{1}{n}}} = \Psi(\tau).$$

Formons  $\frac{\Psi'}{\Psi}$ , on trouve, d'après la formule

$$\frac{\beta}{g} = \sin \tau - \frac{\Psi'}{\Psi} \cos \tau,$$

la valeur suivante pour la résistance  $\beta$  :

$$\beta = \frac{K}{n \cos \tau} \frac{1}{(\tan \theta - \tan \tau)}$$

ou, encore,

$$\beta = \frac{K}{n} \frac{\cos \theta}{\sin(\theta - \tau)}.$$

La courbe polaire  $(\beta, \tau)$  est donc une droite parallèle à l'asymptote  $\theta$ , qui coupe la verticale de l'origine en un point tel que

$$\beta' = \frac{K}{n}.$$

On peut encore écrire  $\beta = b_n v^n \cos^{n-1} \tau$ , ce qui montre que l'équation proposée de l'hodographe représente une loi de résistance monome, modifiée par l'artifice de Didion.

3° *Quelle loi de résistance donne, comme hodographe, une conique rapportée à son foyer ?*

La conique ayant l'équation

$$v = \frac{a}{1 + \eta \cos(\theta + \tau)}$$

( $a$ ,  $\eta$  et  $\theta$  étant constants), on trouve

$$\Psi'(\tau) = \frac{-a\eta \sin(\theta + \tau)}{[1 + \eta \cos(\theta + \tau)]^2};$$

d'où

$$\frac{cF}{g} = \frac{v}{a} [\sin \tau - \eta \sin \theta].$$

Choisissons  $\theta = 0$ , il restera, pour équation de la conique,

$$v = \frac{a}{1 + \eta \cos \tau},$$

et, pour la résistance,

$$\frac{cF}{g} = \frac{v}{a} \sqrt{1 - \frac{1}{\eta^2} \left( \frac{a}{v} - 1 \right)^2} = \frac{1}{a} \sqrt{v^2 \left( 1 - \frac{1}{\eta^2} \right) + \frac{2av}{\eta^2} - \frac{a^2}{\eta^2}}$$

Cette loi dépend non seulement de la vitesse  $v$ , mais encore des caractéristiques à l'origine impliquées dans  $\eta$  et  $a$ .

4° *Quelle loi de résistance faut-il supposer pour que la trajectoire soit une circonférence ?*

L'équation du rayon de courbure est  $\frac{v^2}{r} = -g \cos \tau$ .

Si  $r$  est constant, l'hodographe a pour équation

$$v^2 = -gr \cos \tau.$$

Donc

$$\Psi(\tau) = [-gr]^{\frac{1}{2}} \cos^{\frac{1}{2}} \tau, \quad \Psi'(\tau) = -\frac{1}{2} [-gr]^{\frac{1}{2}} \sin \tau \cos^{-\frac{1}{2}} \tau.$$

Donc

$$\frac{cF}{g} = \frac{3}{2} \sin \tau = \frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{v^4}{g^2 r^2}}.$$

5° Voici encore un problème analogue : *Un point pesant lancé horizontalement dans un milieu dont la résistance est proportionnelle à sa densité et au carré de la vitesse décrit un quart de cercle, comment varie la densité de ce milieu ?* (P. Jullien.)

La formule de résistance s'écrit donc

$$\frac{cF}{g} = \frac{b_2 v^2}{g}$$

et  $b_2$  variera pour se plier à la courbe balistique donnée. On aura donc, d'après le problème 4<sup>o</sup>,

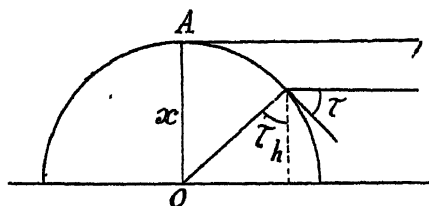
$$b_1 \frac{v^2}{g} = \frac{3}{2} \sin \tau.$$

Mais, puisque la courbe décrite est un cercle, on a

$$v^2 = gr \cos \tau; \quad \text{donc} \quad b_2 = \frac{3}{2} \frac{\sin \tau}{\cos \tau}.$$

La variation de  $b_2$  est donc réglée par cette formule, ou, en intro-

Fig. 258.



duisant le rayon  $r$  et la hauteur  $h$  au-dessus du centre par la formule

$$b_2 = \frac{3}{2} \frac{1}{h} \sqrt{r^2 - h^2}.$$

6<sup>o</sup> Quelle loi de résistance suppose la relation

$$\frac{1}{\cos^2 \tau} = m - m' y?$$

En différentiant, nous aurons

$$3 \frac{\sin \tau}{\cos^4 \tau} = -m' \frac{dy}{d\tau} = \frac{m'}{g} v^2 \tan \tau.$$

Donc

$$v^2 = \frac{3g}{m'} \frac{1}{\cos^2 \tau}.$$

On aura donc, pour la résistance,

$$\frac{cF}{g} = \sin \tau - \cos \tau \frac{\Psi'}{\Psi} = -\frac{1}{2} \sin \tau = -\frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{3g}{m'}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{v^2}}.$$

7<sup>o</sup> *Problème de Greenhill.* — Quelle loi de résistance suppose une courbe telle que le rayon de courbure  $PI$  soit un multiple constant de la portion de normale  $PE$  comprise entre la courbe et une horizontale  $OE$ ?

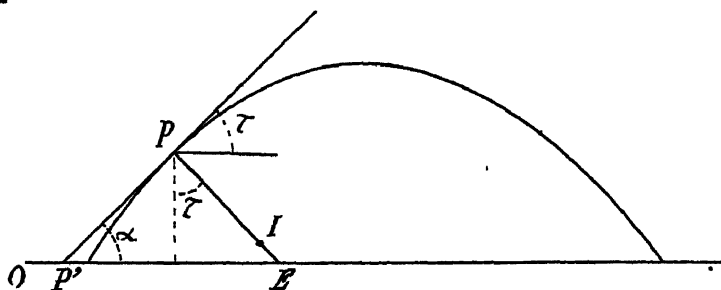
On a

$$\frac{PE}{PI} = m \quad \text{ou} \quad \frac{y}{r \cos \tau} = m,$$

et, comme  $r' = -\frac{v^2}{g \cos \tau}$ , il viendra

$$-\frac{g\gamma}{v^2} = m$$

Fig. 259.



Mais, d'après

$$\frac{dy}{d\tau} = -\frac{v^2}{g} \tan \tau.$$

on aura

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{\gamma}{m} \tan \tau;$$

ce qui s'intégrera sous la forme

$$\gamma^m \cos \tau = a.$$

On en déduit aisément

$$\frac{\gamma^m}{\gamma'} = \frac{\gamma'}{\gamma} (2m-1);$$

d'où

$$\frac{cF}{v^2} = -\frac{2m-1}{2} \frac{\sin \tau}{\gamma}$$

ou bien, sur la figure,

$$\frac{cF}{v^2} = -\frac{2m-1}{2} PP'.$$

Pour différentes valeurs de  $m$ , on a :

$$m = \frac{1}{2}, \quad \text{parabole du vide};$$

$$m = 1, \quad \text{chaînette};$$

$$m = -1, \quad \text{demi-cercle de Newton};$$

$$m = -\frac{1}{2}, \quad \text{cycloïde}.$$

8° Traitons enfin l'exemple suivant (C<sup>t</sup> Batailler) :

Prenons  $u = u_0 - 2 \wedge x - Bx^2$ .

Mettons l'expression précédente sous la forme

$$u = \frac{k}{\alpha} [1 + (mx + n)^2]$$



ou, en posant  $\tan \zeta = mx + n$ ,

$$u = \frac{k}{a} \frac{1}{\cos^2 \zeta}.$$

On établira les formules suivantes :

$$y = -\frac{g}{2m^2} \frac{a^2}{k^2} [(\zeta + K') \tan \zeta + K']$$

$$\tan \tau = -\frac{g}{2m} \frac{a^2}{k^2} [\zeta + \sin \zeta \cos \zeta + K'],$$

$$u = \frac{a}{k} \frac{1}{\cos^2 \zeta},$$

$$t = \frac{a}{mk} (\zeta + K),$$

$$cF = 4m \frac{k^2}{a^2} \frac{\sin \zeta}{\cos^3 \zeta} \left( \frac{1}{\cos \tau} \right).$$

Cette dernière expression, pour  $\tau$  petit, donne la loi de résistance

$$cF = 4m \frac{\sqrt{k}}{a} \sqrt{av - k}.$$

9° Prendre (C<sup>ne</sup> Parodi) :

$$u = A + B \cos \tau + C \sin \tau,$$

calculer  $x$ ,  $y$ ,  $t$  et déterminer les coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$  pour que l'hodographe représenté ci-dessus et l'hodographe exact soient osculateurs à l'origine.

266. Trajectoire à vitesse constante. — *Quelle est la trajectoire décrite si la vitesse est constante? Quelle loi de résistance suppose cette trajectoire?*

Faisons le calcul direct : on a les deux équations intrinsèques de la trajectoire (160) :

$$\frac{dv}{dt} = -cF - g \sin \tau, \quad \frac{V_0^2}{r} = -g \cos \tau.$$

Si  $v$  est constamment égal à  $V_0$ , la première équation donne

$$-\frac{cF}{g} = \sin \tau.$$

D'après la seconde, comme  $r = \frac{ds}{d\tau}$ , on aura

$$\cos \tau \frac{ds}{d\tau} = -\frac{V_0^2}{g}, \quad \text{d'où} \quad ds = -\frac{V_0^2}{g} \frac{d\tau}{\cos \tau}.$$

Donc

$$x = \frac{V_0^2}{g} (z - \tau).$$

On aura ensuite

$$\frac{dy}{dx} = \tan \left( z - \frac{gx}{V_0^2} \right),$$

d'où

$$y = \frac{V_0^2}{g} \log \frac{\cos \left( z - \frac{gx}{V_0^2} \right)}{\cos z}.$$

Telle est l'équation de la trajectoire. C'est une chaînette d'égale tension.

Le mobile s'élève d'abord, atteint une hauteur maximum

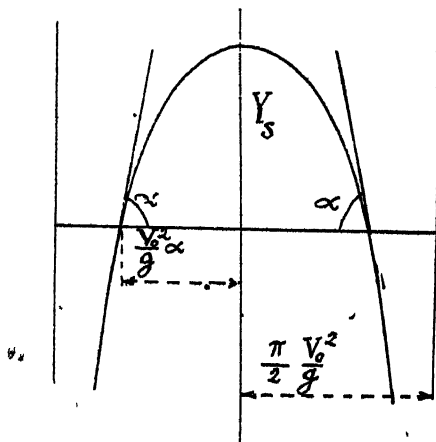
$$Y_s = \frac{V_0^2}{g} \log \frac{1}{\cos z} \quad \text{pour} \quad \lambda_s = \frac{V_0^2}{g} z \quad \text{et} \quad \tau = 0.$$

Il redescend indéfiniment et devient asymptote à la droite

$$x' = \frac{V_0^2}{g} \left( z + \frac{\pi}{2} \right).$$

La courbe est symétrique par rapport à la verticale du sommet.

Fig. 260.



La position du mobile à chaque instant se déduira de la relation

$$\frac{dx}{dt} = V_0 \cos \tau = V_0 \cos \left( z - \frac{gx}{V_0^2} \right),$$

d'où

$$t = \frac{V_0}{g} \log \frac{\tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{z}{2} + \frac{gx}{2V_0^2} \right)}{\tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{z}{2} \right)}.$$

La trajectoire limitée par l'asymptote qu'on a trouvée ne saurait passer par un point dont l'abscisse surpasse  $\frac{\pi V_0^2}{g}$ . Mais on peut faire en sorte qu'elle passe par un point quelconque dont l'abscisse est comprise entre zéro et cette limite, car son équation donne sans difficulté l'angle  $\alpha$  quand on connaît  $x$ ,  $y$  et  $V_0$  (de Saint-Germain).

*Remarques.* — I. On peut comparer les trois problèmes qui viennent d'être résolus et remarquer combien différent les trajectoires pour des valeurs de la résistance en apparence bien voisines  $\frac{cF}{g} = \frac{2}{3} \sin \tau$  dans le cas d'une trajectoire circulaire,  $\frac{cF}{g} = -\frac{1}{2} \sin \tau$  pour le problème 5°, et, enfin,  $\frac{cF}{g} = -\sin \tau$  pour le cas de la trajectoire à vitesse constante.

II. Cette dernière trajectoire est une approximation de la forme de toute trajectoire dans le voisinage du point de vitesse minimum, quand, par suite, la vitesse est de grandeur sensiblement constante.

**267. Facteurs de la trajectoire.** — On appelle *facteurs de la trajectoire* les fonctions qui, pour chacun des éléments de la fin d'un arc de trajectoire, font différer leur expression de celle qu'ils affectent dans le vide.

Posons donc

$$\begin{aligned} y &= x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2 u_0^2} G_y, \\ \tan \tau &= \tan \alpha - \frac{g x}{u_0} G_\tau, \\ t &= \frac{x}{u_0} G_t, \\ u &= u_0 G_u. \end{aligned}$$

Les facteurs de la trajectoire sont les fonctions  $G_y, \tau, t, u$  qui dépendent de l'un des éléments de la fin de l'arc ( $x, t, \dots$ ) et des caractéristiques ( $c, \alpha, V_0$ ) à l'origine. Tous ces facteurs se réduisent à l'unité dans le vide.

Plus spécialement et plus ordinairement, on considère les fonctions  $G$  comme dépendant de la variable  $x$ , de sorte que la première équation représente l'équation de la trajectoire.

Les formules de Lagrange (254) permettent alors de déterminer les trois autres facteurs de la trajectoire  $G_y, t, u$  en fonction de  $G_y$ .

1° En différenciant la première par rapport à  $x$ , on trouve la deuxième

équation; donc

$$G_\tau = G_y + \frac{x}{2} \frac{dG_y}{dx}.$$

En formant  $y''$  et d'après la relation  $u = \left(-\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}}$ , on trouve

$$G_u = \left[ G_y + 2x \frac{dG_y}{dx} + \frac{x^2}{2} \frac{d^2 G_y}{dx^2} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Enfin, d'après la relation

$$t = \int_0^x \left( -\frac{y''}{g} \right)^{\frac{1}{2}} dx,$$

on a

$$G_t = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{dx}{G_u}.$$

Le Tableau suivant rassemble ces trois formules :

$$\begin{aligned} G_\tau &= G_y + \frac{x}{2} \frac{dG_y}{dx}, \\ G_u &= \left[ G_y + 2x \frac{dG_y}{dx} + \frac{x^2}{2} \frac{d^2 G_y}{dx^2} \right]^{-\frac{1}{2}}, \\ G_t &= \frac{1}{x} \int_0^x \frac{dx}{G_u}. \end{aligned}$$

2° Donnons une autre forme à la solution. On se donne le facteur  $G$ , et par suite l'équation de la trajectoire. Déterminer les autres facteurs et l'accélération et la résistance de l'air  $\mathfrak{A} = cF$ .

De  $y' = x \tan \alpha = \frac{gx^2}{2u_0^2} (1_y)$ , on tire d'abord

$$y' = \tan \alpha = \frac{g}{u_0^2} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} x^2 (1_y) \right).$$

Donc

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{2} x^2 G_y \right] = x G_\tau.$$

Puis

$$y'' = -\frac{g}{u^2} = -\frac{g}{u_0^2} \frac{d}{dx} (x G_\tau) = -\frac{g}{u_0^2 G_h^2}.$$

On a donc

$$\frac{1}{G_h^2} = \frac{d}{dx} (x G_\tau).$$

Enfin

$$y'' = -\frac{g}{u_0^2} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{G_h^2} \right) = -\frac{2g\mathfrak{A} \cos \tau}{u^4}.$$

Pour le temps, on a

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{u_0} \frac{d}{dx} (x G_t); \quad \text{donc} \quad \frac{1}{G_u} = \frac{d}{dx} (x G_t).$$

On a donc le Tableau suivant :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} x^2 G_y \right) &= x G_\tau, \\ \frac{d}{dx} (x G_\tau) &= \frac{1}{G_u^2}, \\ \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{G_u^2} \right) &= \frac{2 \delta u_0^2 \cos \tau}{u^3}, \\ \frac{d}{dx} (x G_t) &= \frac{1}{G_u} \end{aligned} \right| \begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} x^2 G_y \right) &= x G_\tau, \\ \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{1}{2} x^2 G_y \right) &= \frac{1}{G_u^2}, \\ \frac{d^3}{dx^3} \left( \frac{1}{2} x^2 G_y \right) &= \frac{2 \delta u_0^2 \cos \tau}{u^3}, \\ \frac{d}{dx} (x G_t) &= \frac{1}{G_u}. \end{aligned}$$

Ainsi, entre les quatre facteurs  $G_y, \tau, u, t$ , il existe trois équations différentielles; si donc nous nous donnons, en plus, l'un quelconque d'entre eux, ou plus généralement une relation nouvelle quelconque entre eux, ces quatre facteurs et, par suite, la trajectoire, les conditions du mouvement et la résistance de l'air sont complètement déterminées.

L'expression de la résistance de l'air est

$$\delta = \frac{u^4}{2 u_0^2 \cos \tau} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{G_u^2} \right);$$

ou encore

$$\delta = \frac{u^4}{2 u_0^2 \cos \tau} \left[ 3 G_y' + 3 x G_y'' + \frac{x^2}{2} G_y''' \right].$$

On a donc

$$\delta = \frac{u^4}{2 u_0^2 \cos \tau} f(x, c, V_0, \alpha).$$

Nous voulons l'avoir sous la forme  $\delta = c F$ ; pour cela, il faut éliminer  $x$  et  $\tau$  entre

$$\tan \tau = \tan \alpha - \frac{g x}{u_0} G_\tau \quad \text{et} \quad \frac{u}{u_0} = G_u,$$

après avoir remplacé  $u$  par  $v \cos \tau$ .

Nous aurons ainsi une expression de la forme

$$\delta = F(v, c, V_0, \alpha).$$

La résistance de l'air n'est plus une fonction de la seule vitesse  $v$ ; elle dépendrait encore des données à l'origine, ce qui est en contradiction avec nos hypothèses et avec la vraisemblance.

Ainsi donc, si l'on choisit arbitrairement la trajectoire parcourue, la

résistance tangentielle à laquelle on est conduit dépend, non seulement de la vitesse, mais encore des données à l'origine.

Tout à fait exceptionnellement et pour des formes de trajectoires particulièrement choisies, il pourrait arriver que tous les termes en  $(c, V_0, \alpha)$  se détruisant, la résistance ne soit plus fonction que de la seule vitesse. Il resterait à déterminer la forme de la trajectoire de manière que cette fonction de  $v$  se confonde sensiblement avec la fonction expérimentale  $F(v)$ .

On ne connaît pas actuellement de forme de trajectoire répondant à cette double condition.

3° Soit la trajectoire

$$(1) \quad y = x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2 u_0^2} G_y(x).$$

Supposons que  $G_y(x)$  soit indépendant de l'angle  $\alpha$  et cherchons quelle loi de résistance de l'air cela suppose.

On a

$$\delta \cos \tau = \frac{u^4}{2 u_0^2} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{G_y^2} \right),$$

ce qui, par élimination de  $x$  entre cette équation et  $u = u_0 G_u$ , nous donne

$$\begin{aligned} \delta \cos \tau &= \frac{u^4}{u_0^2} \varphi \left( \frac{u}{u_0}, V_0, c \right) = u_0^2 \frac{u^4}{u_0^2} \varphi = u_0^2 \Psi \left( \frac{u}{u_0}, V_0, c \right) \\ &= V_0^2 \cos^2 \alpha \Psi \left( \frac{u}{u_0}, V_0, c \right) \\ &= \cos^2 \alpha \Psi_1 \left( \frac{u}{\cos \alpha}, V_0, c \right). \end{aligned}$$

Nous pouvons donc admettre que, si la véritable loi de résistance est  $\delta = c F(v, V_0, c)$ , il suffit de la modifier légèrement en adoptant comme loi de résistance la loi  $\delta_1$  définie par la relation

$$\delta_1 = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos \tau} c F \left[ \frac{v \cos \tau}{\cos \alpha}, V_0, c \right],$$

pour rendre possible l'intégration et mettre l'équation de la trajectoire sous la forme (1), où  $G_y$  ne sera pas fonction de  $\alpha$ .

En particulier, si la loi de résistance est simplement  $\delta = c F(v)$ , il faut prendre

$$\delta_1 = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos \tau} c F \left( \frac{v \cos \tau}{\cos \alpha} \right).$$

4° Nous voulons que  $G_y$  ne contienne l'angle que sous la forme  $\frac{x}{\cos \alpha}$ .

On écrira

$$\sin \cos \tau = \frac{u^4}{2 u_0^4} \frac{d}{\cos \alpha \frac{dx}{\cos \alpha}} \left( \frac{1}{G_u^2} \right).$$

Donc

$$\begin{aligned} \sin \cos \tau &= \frac{u^4}{2 u_0^4} \frac{u_0^4}{\cos \alpha} \varphi \left( \frac{u}{u_0}, V_0, c \right) = \frac{u_0^4}{\cos \alpha} \Psi \left( \frac{u}{u_0}, V_0, c \right) \\ &= V_0^2 \cos \alpha \Psi_1 \left( \frac{u}{\cos \alpha}, V_0, c \right), \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\sin = \frac{\cos \alpha}{\cos \tau} c F \left[ \frac{u \cos \tau}{\cos \alpha}, V_0, c \right].$$

**268. Le problème de la réduction des facteurs de la trajectoire.** -- Comme autre application des théorèmes du problème balistique inverse, nous donnerons la suivante, qui est due au commandant Batailler.

Le problème que nous voulons traiter s'énonce ainsi :

*Est-il possible d'exprimer les facteurs de la trajectoire en fonction d'une même variable  $\xi$ , cette variable étant elle-même une fonction d'une autre variable  $\zeta$  et des caractéristiques initiales; c'est-à-dire  $\xi(\zeta, c, \alpha, V_0)$ .*

On voit immédiatement l'intérêt pratique que présenterait la possibilité envisagée. Au lieu de quatre tables à quadruple entrée, telles que  $(x, c, \alpha, V_0)$ , nécessaires pour la solution du problème balistique général, c'est-à-dire pour déterminer  $(\tau, y, t, u)$ , on n'aurait plus à calculer qu'une de ces tables à quadruple entrée, celle qui donne  $\xi$  en fonction de  $(c, \alpha, V_0, \zeta)$ ; et quatre tables avec la simple entrée  $\xi$  suffiraient alors pour achever le calcul des autres éléments.

Divers balisticiens ont fait des tentatives en ce sens : il importe donc d'étudier la question.

1° Les quatre équations finies du mouvement sont le système intégral des deux équations différentielles :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -c F(v) \cos \tau, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -c F(v) \sin \tau - g.$$

Les quatre équations finies ne sont pas indépendantes, la deuxième se déduisant de la première par différentiation par rapport à  $x$ , et la quatrième de la troisième de la même façon. On aura donc, puisque  $G_y$  et  $G_x$  sont supposés fonction d'une même variable  $\xi$ ,

$$G_x = G_y + \frac{x}{2} \frac{dG_y}{d\xi} \frac{d\xi}{dx}.$$

On en déduit

$$x \frac{d\xi}{dx} = \varphi(\xi);$$

d'où, par intégration,

$$\Psi(\xi) = \log m_1 x.$$

Donc  $\xi$  est une fonction de  $m_1 x$ , la constante  $m_1$  dépendant des caractéristiques initiales  $(c, \alpha, V_0)$ .

Ainsi, la première conclusion à laquelle on arrive est que, si le problème est possible, la variable unique est  $m_1 x$ .

Des deux équations  $t = \frac{x}{u_0} G_t$  et  $u = u_0 G_u$  on déduit, par la même méthode,  $\xi = m_2 x$ .

2° Déterminons maintenant les constantes,  $m_2$  par exemple. On a

$$t = \frac{x}{u_0} G_t(m_2 x).$$

Formons  $\frac{d^2 x}{dt^2}$ . En égalant à la première équation différentielle du second ordre, on a

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -c F(v) \cos \tau = -u_0^2 \frac{2 m_2 G'_t + m_2^2 x G''_t}{(G_t + m_2 x G'_t)^3}.$$

Pour  $x = 0$ , on tire

$$2 m_2 u_0^2 \frac{G'_t}{G_t^3} = c F(V_0) \cos \alpha;$$

et comme, pour  $x = 0$ , les fonctions  $G_t$  et  $G'_t$  ne sont pas fonction de  $m_2$  qui n'entre que multiplié par  $x$ , elles ne renferment qu'une constante absolue  $A$ . On tire donc de là

$$m_2 = A \frac{c F(V_0)}{V_0^2 \cos \alpha}.$$

Donc, la variable des facteurs de la trajectoire est

$$\xi = A \frac{c F(V_0)}{V_0^2 \cos \alpha} x.$$

Prenons alors l'équation qui donne  $u$  sous la forme

$$\frac{u}{u_0} = G_u \left[ \frac{A c F(V_0)}{V_0^2 \cos \alpha} x \right].$$

Les deux fonctions  $\frac{u}{u_0}$  et  $\frac{A c F(V_0)}{V_0^2 \cos \alpha} x$  sont fonctions l'une de l'autre :

Si l'on prend la dérivée de la seconde par rapport à la variable  $\frac{u}{u_0}$ , on



dira encore que cette dérivée est une fonction de  $\frac{u}{u_0}$ . Or

$$\frac{dx}{d\frac{u}{u_0}} = u_0 \frac{dx}{du} = - \frac{vu_0}{c F(v)}.$$

Ainsi,  $\left[ -A \frac{v}{F(v)} \frac{F(V_0)}{V_0} \right]$  est une fonction de  $\frac{u}{u_0}$ , c'est-à-dire de  $\frac{v}{v_0} \frac{\cos \tau}{\cos \alpha}$ .

Or, ceci ne peut avoir lieu d'abord que si les deux fonctions ne renferment que les mêmes variables, c'est-à-dire si  $\frac{\cos \tau}{\cos \alpha}$  peut être remplacé par une constante, par exemple si  $\tau$  et  $\alpha$  sont très voisins de zéro. C'est l'artifice de Didion (259).

Dans ce cas, on pourra écrire

$$A \frac{v}{V_0} \frac{F_0}{F} = \Psi\left(\frac{v}{V_0}\right), \quad \text{d'où} \quad \frac{F}{F_0} = \Psi\left(\frac{v}{V_0}\right).$$

On sait que cette relation exige que la fonction  $F(v)$  soit une expression monome de la forme  $F(v) = B_n v^n$ .

On arriverait exactement à la même conclusion en déterminant la constante  $m_1$  en partant de la première équation

$$y = x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2 u_0^2} G_y(m_1 x),$$

en formant  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ , qu'on égalera à sa valeur (254) :  $-\frac{2gc F(v)}{v^4 \cos^4 \tau}$ , et en faisant ensuite  $x = 0$ ,  $v = V_0$ ,  $\tau = \alpha$ .

3° En résumé, on dira : *Les facteurs de la trajectoire ne peuvent être exprimés en fonction d'une seule variable que : 1° si l'on applique à l'intégration des équations différentielles l'artifice de Didion; 2° si la résistance  $F(v)$  est monome, de la forme  $B_n v^n$ .*

4° Supposons donc qu'il en soit ainsi. On aura, par exemple,

$$t = \frac{x}{u_0} G_1(m_2 x) \quad \text{ou} \quad m_2 t u_0 = m_2 x G_1(m_2 x).$$

Donc

$$m_2 x = \Psi(m_2 t u_0),$$

et l'on pourra écrire comme il suit

$$t = \frac{x}{u_0} H(m_2 t u_0).$$

Ainsi on pourra prendre comme variable, au lieu de  $m_2 x$ , la nouvelle variable  $m_2 t u_0$ .

On pourrait également prendre comme variable, soit

$$\alpha(\tan \tau - \tan \alpha), \quad \text{soit} \quad \alpha' \left( \frac{v}{x} - \tan \alpha \right).$$

*Remarque.* — Si la résistance n'était pas seulement fonction de la vitesse  $v$ , mais aussi de la vitesse initiale  $V_0$ , il pourrait se faire que les facteurs de la trajectoire puissent s'exprimer en fonction d'une seule variable, dans des cas autres qu'une résistance monome.

Mais on a vu, d'après la démonstration, que la variable nécessaire était  $\frac{Ac F(V_0)}{V_0^2 \cos \alpha} x$  et que la condition sera  $F = F(V_0) \Psi \left( \frac{v}{V_0} \right)$  avec l'artifice de Didion.

Ainsi la trajectoire du général Duchène (avec l'artifice de Didion) est dans ce cas. On a, en effet (261),

$$cF = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{v^3}{V_0^2} \sqrt{(3\alpha^2 - 8b)v^2 + 8bV_0^2}.$$

Comme  $cF_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} V_0^2 \sqrt{3\alpha^2}$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{F(v)}{F(V_0)} &= \frac{v^3}{V_0^3} \frac{1}{\sqrt{3\alpha^2}} \sqrt{(3\alpha^2 - 8b)v^2 + 8bV_0^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3\alpha^2}} \left( \frac{v}{V_0} \right)^3 \sqrt{(3\alpha^2 - 8b) \left( \frac{v}{V_0} \right)^2 + 8b}. \end{aligned}$$

On a donc bien

$$\frac{F(v)}{F(V_0)} = \Psi \left( \frac{v}{V_0} \right).$$

**269. Facteurs de la trajectoire de M. Sugot.** — Dans la définition ci-dessus, des facteurs de la trajectoire, tels, par exemple, que

$$y = x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2 V_0^2 \cos^2 \alpha} G_1,$$

on compare la trajectoire atmosphérique à la trajectoire du vide ayant même vitesse initiale  $V_0$ .

On peut choisir un autre terme de comparaison et prendre, par exemple, la trajectoire parabolique ayant même portée  $X$  que la trajectoire aérienne.

Soit  $X$  la portée dans l'air, à laquelle correspondrait dans le vide une certaine vitesse initiale  $\varphi_\alpha$ , sous le même angle de projection  $\alpha$ .

On écrira

$$y = x \tan \alpha - \frac{g x^2 \tan \alpha}{\varphi_\alpha^2 \sin 2\alpha} \left[ \frac{\psi_\alpha^2}{V_0^2} G_1 \right]$$

ou bien

$$y = x \operatorname{tang} \alpha - \frac{x^2}{X} \operatorname{tang} \alpha \mathfrak{Q}_1,$$

$\mathfrak{Q}_1$  est le facteur de la trajectoire choisi par M. Sugot. Il est fonction de  $(x, \alpha, V_0, c)$ , ou bien de

$$\left( \frac{x}{X}, \alpha, V_0, c \right).$$

On aura, de même, pour les autres éléments de la trajectoire,

$$y' = x \operatorname{tang} \alpha - \frac{x^2 \operatorname{tang} \alpha}{X} \mathfrak{Q}_1,$$

$$\operatorname{tang} \tau = \operatorname{tang} \alpha - \frac{2x \operatorname{tang} \alpha}{X} \mathfrak{Q}_1,$$

$$t = \frac{x}{V_\alpha \cos \alpha} \mathfrak{Q}_1,$$

$$u = V_\alpha \cos \alpha \mathfrak{Q}_1.$$

La vitesse  $V_\alpha$  est dite *vitesse fictive* dans la méthode de calcul des Tables de tir de M. Sugot.



---

## CHAPITRE III.

### DEVELOPPEMENT EN SÉRIE EN UN POINT DE LA TRAJECTOIRE.

---

#### I. — FORMULES POUR LE CALCUL D'UN PETIT ARC DE TRAJECTOIRE.

270. **Principe du développement.** — S'il n'est pas possible, en général, de résoudre le problème balistique par l'intégration des équations différentielles, il est, par contre, toujours facile, sans intégration, d'obtenir un développement en série qui, entre certaines limites, permettra le calcul d'un très petit arc de trajectoire.

Étant données les valeurs des éléments à l'origine d'un arc, c'est-à-dire  $(x_0, y_0, v_0, t_0, \tau_0)$  ou, plus simplement,  $V_0$  et  $\alpha$ , en prenant  $x_0 = y_0 = t_0 = 0$ , et le coefficient balistique  $c(c, V_0$  et  $\alpha$  constituant les caractéristiques à l'origine), on se propose de calculer quatre des cinq quantités  $(x, y, v, t, \tau)$  de la fin de l'arc, l'une d'elles quelconque étant supposée donnée pour définir cette extrémité.

Comme on connaît les dérivées de toutes ces quantités les unes par rapport aux autres (157, 4<sup>o</sup>), on pourra calculer aisément les dérivées deuxième, troisième, quatrième, etc. On pourra donc obtenir immédiatement le développement, d'après la formule de Mac Laurin, des éléments de la fin de l'arc, en fonction des données à l'origine et d'un des éléments de l'extrémité pris comme argument.

A condition de réduire suffisamment l'amplitude de l'arc, de manière que tous les éléments n'éprouvent que de faibles variations, on aura ainsi une méthode de calcul qui pourra se prêter, dans le cas où la convergence de la série sera suffisamment rapide, à de multiples applications pratiques.

Il existe, avec les cinq variables choisies, prises l'une ou l'autre pour argument  $(x, y, v, t, \tau)$ , cinq groupes de formules applicables autour du point choisi pour origine. Tous ces systèmes rentreront évidemment les uns dans les autres, auront une convergence de même ordre, et l'on pourra passer de l'un à l'autre par la méthode du retour des séries (110).

Il suffira donc de calculer les coefficients d'une des séries pour pou-

voir calculer ceux des séries développées suivants les autres arguments.

Les formules qui sont établies dans le présent Chapitre présentent le plus grand intérêt pratique, non qu'on puisse, à cause de la complication des calculs et de la faible convergence de la plupart de ces séries, étendre bien loin leur application correcte et utile, mais parce qu'elles donnent l'expression des limites des formules de la Balistique, quand l'arc devient de plus en plus petit. Elles peuvent servir, en les maniant convenablement, de base à des méthodes très précises et très utiles de calcul des trajectoires par arcs successifs (*voir* Livre VIII).

D'autre part, les efforts de nombreux balisticiens se sont, depuis l'origine, portés sur un des problèmes traités ici, le développement de l'équation de la trajectoire,  $y = f(x)$ , en fonction de l'abscisse, principalement dans le cas d'une résistance quadratique (*voir* Livre V, Chap. V, § 3).

Dans le cas général d'une résistance quelconque, les premiers termes du développement (jusqu'en  $x^4$ ) ont été donnés par de Saint-Robert.

Nous établissons ici les formules dans le cas général d'une résistance quelconque et nous donnons le calcul de chaque élément en fonction des autres.

Mais, si, pour les applications pratiques, où il s'agit toujours d'amplitudes très faibles, il ne peut y avoir de doute sur la légitimité d'emploi des ces formules, on doit ajouter cependant que la convergence de ces séries; pour de fortes valeurs de l'amplitude de l'arc, n'est point démontrée, d'une manière générale tout au moins.

**271. Équation d'un arc de trajectoire.** Nous prendrons, comme point de départ de toutes ces séries, la relation entre  $y$  et  $x$ , c'est-à-dire l'équation de la trajectoire que nous écrirons

$$(1) \quad y = x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2 u_0^2} \left[ 1 + \Lambda_1 \frac{x}{3!} + \Lambda_2 \frac{x^2}{4!} + \Lambda_3 \frac{x^3}{5!} + \dots \right].$$

Les deux premiers termes du second membre peuvent être écrits directement, puisqu'à l'origine ( $V_0, \alpha$ ), la trajectoire atmosphérique et la trajectoire du vide ont trois points communs (218).

Il s'agit de déterminer les coefficients successifs  $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \dots$  de la série; à cet effet, on identifiera, terme à terme, l'équation ci-dessus et l'équation de la trajectoire déduite du développement de Mac Laurin

$$(2) \quad y = x \left( \frac{dy}{dx} \right)_0 + \frac{x^2}{2!} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)_0 + \frac{x^3}{3!} \left( \frac{d^3 y}{dx^3} \right)_0 + \frac{x^4}{4!} \left( \frac{d^4 y}{dx^4} \right)_0 + \dots + \frac{x^n}{n!} \left( \frac{d^n y}{dx^n} \right)_0.$$

Calculons donc les dérivées successives de  $y$  par rapport à  $x$ , en sachant que (157)

$$\frac{d\tau}{dx} = -\frac{g}{v^2} \quad \text{et} \quad \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{d\tau} \frac{d\tau}{dx} = -\frac{c F(v) + g \sin \tau}{v \cos \tau}.$$

On trouve les formules qui suivent :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \tan \tau, & \frac{d^2 y}{dx^2} &= -\frac{g}{v^2 \cos^2 \tau}, & \frac{d^3 y}{dx^3} &= -\frac{2gc F(v)}{v^4 \cos^3 \tau}, \\ \frac{d^4 y}{dx^4} &= \frac{2gc F(v)}{v^6 \cos^5 \tau} \left[ g \left( \frac{v F'}{F} - 1 \right) \sin \tau + c F \left( \frac{v F'}{F} - 1 \right) \right], \\ \frac{d^5 y}{dx^5} &= -\frac{2gc F(v)}{v^8 \cos^7 \tau} \left[ g^2 \left( \frac{v^2 F''}{F} - \frac{2v F'}{F} + 3 \right) \sin^2 \tau \right. \\ &\quad \left. + gc F \left( \frac{2v^2 F''}{F} + \frac{v^2 F'^2}{F^2} - \frac{15v F'}{F} + 14 \right) \sin \tau \right. \\ &\quad \left. + g^2 \left( \frac{v F'}{F} - 1 \right) + c^2 F^2 \left( \frac{v^2 F''}{F} + \frac{v^2 F'^2}{F^2} - \frac{13v F'}{F} + 24 \right) \right]. \end{aligned}$$

On fera, dans ces dérivées successives,  $v = V_0$  et  $\tau = \alpha$ . La comparaison des deux développements (1) et (2) conduira alors aux valeurs suivantes des coefficients  $A_1, A_2, A_3$  :

$$\begin{aligned} A_1 &= + \frac{4c F_0}{V_0^2 \cos \alpha}, \\ A_2 &= - \frac{4c F_0}{V_0 \cos^2 \alpha} \left[ g \left( \frac{V_0 F'_0}{F_0} - 1 \right) \sin \alpha + c F_0 \left( \frac{V_0 F'_0}{F_0} - 1 \right) \right], \\ A_3 &= + \frac{4c F_0}{V_0^3 \cos^3 \alpha} \left[ g^2 \left( \frac{V_0^2 F''_0}{F_0} - \frac{3V_0 F'_0}{F_0} + 3 \right) \sin^2 \alpha \right. \\ &\quad \left. + gc F_0 \left( \frac{2V_0^2 F''_0}{F_0} + \frac{V_0^2 F'^2_0}{F_0^2} - \frac{15V_0 F'_0}{F_0} + 14 \right) \sin \alpha \right. \\ &\quad \left. + g^2 \left( \frac{V_0 F'_0}{F_0} - 1 \right) + c^2 F_0^2 \left( \frac{V_0^2 F''_0}{F_0} + \frac{V_0^2 F'^2_0}{F_0^2} - \frac{13V_0 F'_0}{F_0} + 24 \right) \right]. \end{aligned}$$

D'après ce Tableau, on voit que :

$A_1$  renferme la résistance initiale de l'air  $cF_0$ ;

$A_2$  renferme, outre cette résistance, sa dérivée première  $F'_0$ , et aussi la gravité  $g$ ;

$A_3$  renferme la résistance et ses deux premières dérivées  $F'_0$  et  $F''_0$ , ainsi que la gravité  $g$ .

En ce qui concerne l'angle de projection  $\alpha$ , on voit que :

$A_1$  est du degré 0 en  $\sin \alpha$  et ( $-1$ ) en  $\cos \alpha$ ;

$A_2$  est du degré 1 en  $\sin \alpha$  et ( $-2$ ) en  $\cos \alpha$ ;

$A_3$  est du degré 2 en  $\sin \alpha$  et ( $-3$ ) en  $\cos \alpha$ .

272. Calcul des autres éléments d'un arc de trajectoire. — Pour

obtenir, en fonction de  $x$ , le développement des autres éléments de l'extrémité de l'arc, c'est-à-dire  $(t, \text{tang} \tau, u)$ , on opérerait de la même manière que pour  $y$ , au moyen des dérivées successives telles que

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)_0, \quad \left(\frac{d^2 t}{dx^2}\right)_0, \quad \left(\frac{d^3 t}{dx^3}\right)_0,$$

portées dans le développement de Mac Laurin.

Mais, sous peine de renoncer à toute dépendance des formules entre elles, il importe de conduire les calculs de manière à n'introduire, dans les formules de tous les autres éléments de l'extrémité de l'arc, que les mêmes coefficients  $A_1, A_2, A_3$  qui figurent dans l'équation de la trajectoire. On arrivera à ce résultat en employant les formules du problème balistique inverse (254) qui permettent, étant donnée l'équation de la trajectoire, de calculer les différents éléments d'un point  $(x, y)$ . On a, en effet,

$$\text{tang} \tau = y', \quad t = \int_0^x \left(\frac{y''}{g}\right)^{\frac{1}{2}} dx, \quad u = \left(-\frac{x}{y''}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

**273. Le développement suivant les puissances de l'abscisse.** — L'application des formules ci-dessus conduit au système suivant :

$$\begin{aligned} y &= x \text{ tang} \alpha - \frac{g}{2u_0^2} \left[ 1 + A_1 \frac{x}{3!} + A_2 \frac{x^2}{4!} + A_3 \frac{x^3}{5!} + \dots \right], \\ \text{tang} \tau &= \text{tang} \alpha - \frac{g}{u_0^2} \left[ 1 + \frac{A_1}{2} \frac{x}{2!} + \frac{A_2}{2} \frac{x^2}{3!} + \frac{A_3}{2} \frac{x^3}{4!} + \dots \right], \\ t &= \frac{x}{u_0} \left[ 1 + \frac{2A_1}{2.8} x + \frac{1}{3.8} \left( A_2 - \frac{A_1^2}{4} \right) x^2 + \frac{1}{4.8} \left( \frac{A_3}{3} - \frac{A_1 A_2}{4} + \frac{A_1^3}{16} \right) x^3 + \dots \right], \\ u &= u_0 \left[ 1 - \frac{2A_1}{8} x - \frac{1}{8} \left( A_2 - \frac{3}{4} A_1^2 \right) x^2 - \frac{1}{8} \left( \frac{A_3}{3} - \frac{A_1 A_2}{4} + \frac{5}{16} A_1^3 \right) x^3 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Nous avons mis chacune de ces équations sous une forme telle que ces formules ne diffèrent des équations du vide que par le terme entre crochets, égal à l'unité dans le vide. On sait (267) qu'on donne, d'une manière générale, le nom de *facteurs de la trajectoire* à ces fonctions, qui dépendent des trois caractéristiques à l'origine ( $V_0, \alpha, c$ ) et de la variable  $x$ , et qui viennent modifier la trajectoire du vide.

**274. Les cinq systèmes de formules.** — 1° Au lieu de l'abscisse  $x$ , qui figure dans les formules précédentes, on peut avoir à considérer une autre variable, définissant l'autre extrémité de l'arc, variable suivant les puissances de laquelle les autres se trouveraient exprimées. On peut concevoir ainsi, comme rentrant les unes dans les autres, cinq séries principales ayant pour argument la différence entre les valeurs de

chacun des éléments aux deux extrémités de l'arc, savoir :

$$x, \left( \frac{y}{x} - \tan \alpha \right), (\tan \tau - \tan \alpha), t, (u_0 - u).$$

On remarquera que la variable  $y$  n'est pas prise pour un des arguments; en effet, ainsi qu'on l'a vu pour le vide (19), elle conduit à des équations compliquées de radicaux, du fait que  $x$  s'exprime en  $y$  par une équation du second degré.

La variable naturelle du problème est  $\left( \frac{1}{x} - \tan \alpha \right)$  ou  $(\tan \sigma - \tan \alpha)$  (en introduisant l'angle de site  $\sigma$ ), variable tout à fait comparable à  $(\tan \tau - \tan \alpha)$ .

De même, la variable  $v$  introduit des formules compliquées, tandis qu'en  $u$  les éléments s'exprimeront très simplement.

On a calculé les quatre derniers groupes de formules ci-dessous; le premier n'est que la transcription du développement en fonction de  $x$  donné plus haut, et duquel tous les autres dérivent par le retour des séries (110). Comme les applications ne nécessitent jamais l'emploi de nombreux termes de ces séries, qui deviennent vite très compliquées, nous avons borné le développement au terme en  $x^3$ , un de moins, par conséquent, qu'au n° 273.

En cas de besoin, les formules du retour des séries permettraient le calcul facile du terme de l'ordre de  $x^4$ .

3° *Tableau des formules.* — Donnons maintenant les cinq systèmes de séries de la trajectoire, que nous nous proposons d'établir et dans lesquels figurent les deux coefficients  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  dont les valeurs sont les suivantes :

$$\Lambda_1 = \frac{4cF_0}{V_0^2 \cos^2 \alpha},$$

$$\Lambda_2 = -\frac{4cF_0}{V_0^2 \cos^2 \alpha} \left[ \frac{V_0 F'_0}{F_0} - 1 \right] \sin \alpha + cF_0 \left( \frac{V_0 F'_0}{F_0} - 4 \right).$$

I. — VARIABLE  $x$ .

$$(1) \quad \alpha = \dots \dots \dots,$$

$$(2) \quad \tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{Kx}{2u_0^2} \left[ 1 + \Lambda_1 \frac{x}{3!} + \Lambda_2 \frac{x^2}{4!} + \dots \right],$$

$$(3) \quad \tan \alpha = \tan \tau = \frac{Kx}{u_0^2} \left[ 1 + \frac{\Lambda_1}{2} \frac{x}{2!} + \frac{\Lambda_2}{2} \frac{x^2}{3!} + \dots \right],$$

$$(4) \quad t = \frac{x}{u_0} \left[ 1 + \frac{2\Lambda_1}{2.8} x + \frac{1}{3.8} \left( \Lambda_2 - \frac{\Lambda_1^2}{4} \right) x^2 + \dots \right],$$

$$(5) \quad u = u_0 \left[ 1 - \frac{2\Lambda_1}{8} x - \frac{1}{8} \left( \Lambda_2 - \frac{3}{4} \Lambda_1^2 \right) x^2 + \dots \right].$$



II. — VARIABLE  $\left(\operatorname{tang} \alpha - \frac{\gamma}{x}\right)$  ou  $(\operatorname{tang} \alpha - \operatorname{tang} \sigma)$ .

$$(1) \quad x = \frac{2u_0^2}{g} \left( \operatorname{tang} \alpha - \frac{\gamma}{x} \right) \left[ 1 - \frac{\Lambda_1}{3!} \frac{2u_0^2}{g} \left( \operatorname{tang} \alpha - \frac{\gamma}{x} \right) - \frac{1}{4!} \left( \Lambda_2 - \frac{4}{3} \Lambda_1^2 \right) \left( \frac{2u_0^2}{g} \right)^2 \left( \operatorname{tang} \alpha - \frac{\gamma}{x} \right)^2 + \dots \right],$$

$$(2) \quad \alpha \dots \dots \dots$$

$$(3) \quad \operatorname{tang} \alpha - \operatorname{tang} \tau = 2 \left( \operatorname{tang} \alpha - \frac{\gamma}{x} \right) \times \left[ 1 + \frac{2\Lambda_1}{4!} \frac{2u_0^2}{g} \left( \operatorname{tang} \alpha - \frac{\gamma}{x} \right) + \frac{1}{4!} \left( \Lambda_2 - \frac{2\Lambda_1^2}{3} \right) \left( \frac{2u_0^2}{g} \right)^2 \left( \operatorname{tang} \alpha - \frac{\gamma}{x} \right)^2 + \dots \right],$$

$$(4) \quad t = \frac{2u_0}{g} \left( \operatorname{tang} \alpha - \frac{\gamma}{x} \right) \left[ 1 - \frac{\Lambda_1}{4!} \frac{2u_0^2}{g} \left( \operatorname{tang} \alpha - \frac{\gamma}{x} \right) + 2 \left( \frac{\Lambda_1}{4!} \right)^2 \left( \frac{2u_0^2}{g} \right)^2 \left( \operatorname{tang} \alpha - \frac{\gamma}{x} \right)^2 + \dots \right],$$

$$(5) \quad u = u_0 \left[ 1 - \frac{\Lambda_1}{4} \frac{2u_0^2}{g} \left( \operatorname{tang} \alpha - \frac{\gamma}{x} \right) - \frac{1}{4} \left( \frac{\Lambda_2}{2} - \frac{1}{4!} \right) \left( \frac{2u_0^2}{g} \right)^2 \left( \operatorname{tang} \alpha - \frac{\gamma}{x} \right)^2 + \dots \right].$$

III. — VARIABLE  $(\operatorname{tang} \alpha - \operatorname{tang} \tau)$ .

$$(1) \quad x = \frac{u_0^2}{g} (\operatorname{tang} \alpha - \operatorname{tang} \tau) \left[ 1 - \frac{\Lambda_1}{4} \frac{u_0^2}{g} (\operatorname{tang} \alpha - \operatorname{tang} \tau) - \frac{1}{4} \left( \frac{\Lambda_2}{3} - \frac{\Lambda_1^2}{2} \right) \left( \frac{u_0^2}{g} \right)^2 (\operatorname{tang} \alpha - \operatorname{tang} \tau)^2 + \dots \right]$$

$$(2) \quad \operatorname{tang} \alpha - \frac{\gamma}{x} = \frac{1}{2} (\operatorname{tang} \alpha - \operatorname{tang} \tau) \times \left[ 1 - \frac{2\Lambda_1}{4!} \frac{u_0^2}{g} (\operatorname{tang} \alpha - \operatorname{tang} \tau) - \frac{1}{4!} \left( \Lambda_2 - \Lambda_1^2 \right) \left( \frac{u_0^2}{g} \right)^2 (\operatorname{tang} \alpha - \operatorname{tang} \tau)^2 + \dots \right],$$

$$(3) \quad \alpha \dots \dots \dots$$

$$(4) \quad t = \frac{u_0}{g} (\operatorname{tang} \alpha - \operatorname{tang} \tau) \left[ 1 - \frac{\Lambda_1}{8} \frac{u_0^2}{g} (\operatorname{tang} \alpha - \operatorname{tang} \tau) - \frac{1}{4!} \left( \Lambda_2 - \frac{5}{4} \Lambda_1^2 \right) \left( \frac{u_0^2}{g} \right)^2 (\operatorname{tang} \alpha - \operatorname{tang} \tau)^2 + \dots \right]$$

$$(5) \quad u = u_0 \left[ 1 - \frac{\Lambda_1}{4} \frac{u_0^2}{g} (\operatorname{tang} \alpha - \operatorname{tang} \tau) - \frac{1}{8} \left( \Lambda_2 - \frac{5}{4} \Lambda_1^2 \right) \left( \frac{u_0^2}{g} \right)^2 (\operatorname{tang} \alpha - \operatorname{tang} \tau)^2 + \dots \right].$$

IV. -- VARIABLE  $t$ .

$$(1) \quad x = u_0 t \left[ 1 - \frac{A_1}{8} u_0 t - \frac{1}{3.8} (A_2 - A_1^2) u_0^2 t^2 + \dots \right],$$

$$(2) \quad \tan \alpha - \frac{\gamma}{x} = \frac{g t}{2 u_0} \left[ 1 + \frac{A_1}{4!} u_0 t + 0 + M t^2 + \dots \right],$$

$$(3) \quad \tan \alpha - \tan \tau = \frac{g t}{u_0} \left[ 1 + \frac{A_1}{8} u_0 t + \frac{1}{3.8} \left( A_2 - \frac{A_1^2}{2} \right) u_0^2 t^2 + \dots \right],$$

$$(4) \quad \alpha \dots \dots \dots$$

$$(5) \quad u = u_0 \left[ 1 - \frac{A_1}{4} u_0 t - \frac{1}{8} (A_2 - A_1^2) u_0^2 t^2 + \dots \right].$$

 V. -- VARIABLE  $(u_0 - u)$ .

$$(1) \quad x = \frac{4}{A_1} \frac{u_0 - u}{u_0} \left[ 1 - \frac{2}{A_1^2} \left( A_2 - \frac{3}{4} A_1^2 \right) \left( \frac{u_0 - u}{u_0} \right) + \dots \right],$$

$$(2) \quad \tan \alpha - \frac{\gamma}{x} = \frac{2g}{u_0^2} \frac{1}{A_1} \frac{u_0 - u}{u_0} \left[ 1 - \frac{4}{A_1^2} \left( \frac{A_2}{2} - \frac{13}{4!} A_1^2 \right) \left( \frac{u_0 - u}{u_0} \right) + \dots \right],$$

$$(3) \quad \tan \alpha - \tan \tau = \frac{4g}{u_0^2} \frac{1}{A_1} \frac{u_0 - u}{u_0} \left[ 1 - \frac{2}{A_1^2} \left( A_2 - \frac{5}{4} A_1^2 \right) \left( \frac{u_0 - u}{u_0} \right) + \dots \right],$$

$$(4) \quad t = \frac{4}{A_1} \frac{u_0 - u}{u_0^2} \left[ 1 - \frac{2}{A_1^2} (A_2 - A_1^2) \left( \frac{u_0 - u}{u_0} \right) + \dots \right],$$

$$(5) \quad \alpha \dots \dots \dots$$

On fera, sur ces formules, les quelques remarques suivantes :

1° On voit, dans le système IV, que  $\left( \tan \alpha - \frac{\gamma}{x} \right)$  ne contient pas de terme en  $t^2$ ; dans le système II, le temps  $t$ , en fonction de  $\left( \tan \alpha - \frac{\gamma}{x} \right)$ , ne contient, dans le terme en  $\left( \tan \alpha - \frac{\gamma}{x} \right)^2$ , que  $A_1$  et pas le coefficient  $A_2$ , c'est-à-dire seulement  $F_0$ , mais pas  $F'_0$ .

2° Les formules avec la variable  $(u_0 - u)$  n'ont pas d'équivalentes dans le vide. Le terme  $\frac{4}{A_1} \left( \frac{u_0 - u}{u_0} \right)$ , qui est  $(u_0 - u) \frac{V_0^2 \cos \alpha}{c F_0}$ , se présente alors sous la forme indéterminée  $\frac{0}{0}$ , car  $c = \infty$ , si  $u = u_0$ .

3° Remarquons la relation

$$\left( \frac{u_0 - u}{u_0} \right)^2 = \frac{A_1}{2} (u_0 t - x) + \frac{1}{3.8} A_1 (A_2 - A_1^2) u_0^2 t^2 + \dots$$

4° Si, ne conservant, dans le système I, que les termes en  $A_1 x$  dans les crochets, on élimine cette quantité entre les différentes variables, on aura les relations exprimées par les égalités ci-après :

$$\left[ \frac{2 u_0^2}{g x} \left( \tan \alpha - \frac{\gamma}{x} \right) - 1 \right] = 2 \left[ \frac{u_0^2}{g x} (\tan \alpha - \tan \tau) - 1 \right] = 4 \left( \frac{u_0 t}{x} - 1 \right) = 2 \left( 1 - \frac{u}{u_0} \right) = \frac{A_1 x'}{2}.$$

**275. Expression de l'abaissement et de l'ordonnée.** — 1° On peut avoir besoin d'exprimer l'abaissement  $y = x \tan \alpha - j$  en fonction des différentes variables de la fin de l'arc. Des formules ci-dessus, on déduit aisément les suivantes, en introduisant les mêmes coefficients  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  :

$$\begin{aligned} y &= \frac{g x^2}{2 u_0^2} \left[ 1 + \Lambda_1 \frac{x}{3!} + \Lambda_2 \frac{x^2}{4!} + \dots \right] = x \tan \alpha - j, \\ y &= \frac{u_0^2}{2 g} (\tan \alpha - \tan \tau)^2 \left[ 1 - \frac{\Lambda_1}{3} \frac{u_0^2}{g} (\tan \alpha - \tan \tau) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8} \left( \Lambda_2 - \frac{3}{2} \Lambda_1^2 \right) \left( \frac{u_0^2}{g} \right)^2 (\tan \alpha - \tan \tau)^2 + \dots \right], \\ y &= \frac{g t^2}{2} \left[ 1 - \frac{2 \Lambda_1}{4!} u_0 t - \frac{1}{4!} \left( \Lambda_2 - \frac{7}{8} \Lambda_1^2 \right) u_0^2 t^2 + \dots \right], \\ y &= \frac{8 g}{u_0^2} \frac{1}{\Lambda_1^2} \left( \frac{u_0 - u}{u_0} \right)^2 \left[ 1 - \frac{2}{\Lambda_1^2} \left( 2 \Lambda_2 - \frac{11}{6} \Lambda_1^2 \right) \frac{u_0 - u}{u_0} + \dots \right]. \end{aligned}$$

2° *Calcul de  $y$ .* — La série du n° 274 [syst. III, éq. (2)] peut s'écrire

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} (\tan \alpha + \tan \tau) x + \frac{1}{2} \frac{g x}{u_0^2} \left( \frac{u_0^2}{g} \right)^2 (\tan \alpha - \tan \tau)^2 \\ &\quad \times \left[ \frac{2 \Lambda_1}{4!} + \frac{1}{4!} (\Lambda_2 - \Lambda_1^2) \frac{u_0^2}{g} (\tan \alpha - \tan \tau) - \dots \right]. \end{aligned}$$

En remplaçant  $x$  par son développement en  $(\tan \alpha - \tan \tau)$ , il viendra la formule

$$\begin{aligned} y &= \frac{u_0^2}{2 g} (\tan^2 \alpha - \tan^2 \tau) \\ &\quad \times \left[ 1 - \frac{\Lambda_1}{6} \frac{u_0^2}{g} \frac{\tan \alpha + 2 \tan \tau}{\tan \alpha + \tan \tau} (\tan \alpha - \tan \tau) - \frac{1}{1.6} \left( \frac{u_0^2}{g} \right)^2 \right. \\ &\quad \times \frac{(\Lambda_2 - 2 \Lambda_1^2) \tan \alpha + (3 \Lambda_2 - 4 \Lambda_1^2) \tan \tau}{\tan \alpha + \tan \tau} (\tan \alpha - \tan \tau)^2 + \dots \left. \right]. \end{aligned}$$

Lorsque l'arc que l'on considère est éloigné du sommet, on pourra poser  $\tan \alpha = 2 \tan \alpha - (\tan \alpha - \tan \tau)$  et réduire le crochet à n'être plus fonction que de  $(\tan \alpha - \tan \tau)$ . Mais on enlève ainsi à la formule la généralité qu'elle a dans la texture ci-dessus.

3° Donnons, enfin, un théorème énoncé par le capitaine Uchard.

L'abaissement qui, dans le vide, est constant pour un même temps  $\theta$ , lorsque  $V_0$  varie (57, 4°) ( $\alpha$  constant), diminue dans l'air avec  $V_0$ , si  $n > 1$ ; il augmente si  $n < 1$ .

En effet, l'expression de  $y$  en fonction de  $t$ , qui est

$$y = \frac{g t^2}{2} \left[ 1 - \frac{2 \Lambda_1}{4!} u_0 t + \dots \right],$$

avec  $A_1 = \frac{4cF_0}{V_0^2 \cos z}$ , donne, en différentiant par rapport à  $V_0$ , la formule

$$\frac{dy}{dV_0} = -\frac{\pi \theta^2}{6} (n-1) V_0^{n-2}.$$

**276. Sur la convergence des séries.** — La convergence des séries qui viennent d'être établies n'a pas été démontrée d'une manière générale, et même on sait que  $y = f(x)$ , par exemple, est divergente, dans certains cas tout au moins.

Un théorème qui indique un cas très étendu de convergence de certaines de ces séries s'applique aux séries développées suivant les puissances de  $t$ ; il est dû à C. Veithen.

Il est basé sur la proposition d'analyse suivante :

« Soient deux équations différentielles du premier ordre :

$$\frac{d\xi}{dt} = \varphi(t, \xi, \eta), \quad \frac{d\eta}{dt} = \psi(t, \xi, \eta).$$

« Supposons que les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  puissent se développer en séries de puissances de  $(t - t_0)$ ,  $(\xi - \xi_0)$ ,  $(\eta - \eta_0)$ , qui soient convergentes pour toutes les valeurs de ces différences. On démontre alors que l'on peut écrire

$$\xi = \xi_0 + \xi_1(t - t_0) + \dots, \quad \eta = \eta_0 + \eta_1(t - t_0) + \dots$$

et qu'on a deux séries ordonnées suivant les puissances de  $(t - t_0)$  et *convergentes* quelles que soient les valeurs de  $(t - t_0)$ . »

Soient maintenant les équations fondamentales de la Balistique :

$$(1) \quad \frac{du}{dt} = u \Phi(v),$$

$$(2) \quad \frac{dv}{dt} = v \Phi(v) - g$$

avec

$$\Phi(v) = \frac{c F(v)}{v},$$

$$u = v \cos \tau, \quad v = v \sin \tau, \quad v = \sqrt{u^2 + v^2}.$$

Supposons que la fonction empirique  $\Phi(v)$  puisse, avec une approximation donnée, être représentée par un polynôme d'un nombre fini de termes, tous de puissance paire :

$$\Phi(v) = a_0 + a_1 v^2 + a_2 v^4 + \dots + a_m v^{2m}.$$

Les seconds membres des équations (1) et (2) seront, dès lors, des polynômes entiers en  $u$  et  $v$ . Ils sont donc développables en séries con-

vergentes, suivant les puissances de  $(u - u_0)$  et  $(v - v_0)$ . La condition exigée par le théorème d'Analyse est remplie, et l'on pourra écrire les deux séries convergentes pour toute valeur de  $t$  :

$$\begin{aligned} u &= u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + \dots, \\ v &= v_0 + v_1 t + v_2 t^2 + \dots \end{aligned}$$

$(u_0, u_1, u_2, v_0, v_1, v_2)$  sont des constantes. Comme on a

$$x = \int_0^t u \, dt, \quad y = \int_0^t v \, dt,$$

les séries

$$\begin{aligned} x &= u_0 t + \frac{1}{2} u_1 t^2 + \dots, \\ y &= v_0 t + \frac{1}{2} v_1 t^2 + \dots \end{aligned}$$

sont également convergentes.

Le théorème est donc démontré pour une loi de résistance  $F(v)$  qui ne contient que des puissances impaires de  $v$  :

$$c F(v) = b_1 v + b_3 v^3 + b_5 v^5 + \dots$$

277. La série en  $(\tau_0 - \tau)$ . — Parmi les nombreuses séries qu'il est possible d'envisager, celle qui se développe suivant l'argument  $v\tau = \tau_0 - \tau$ , amplitude d'un petit arc, trouve, en Balistique, de nombreuses applications. Les formules fondamentales sont les expressions établies (176) des dérivées de  $v$  par rapport à  $\tau$  :

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\tau} &= \frac{v}{\cos \tau} \left( \frac{cF}{g} + \sin \tau \right), \\ \frac{d^2 v}{d\tau^2} &= \frac{v}{\cos^3 \tau} \left[ 1 + \left( \frac{cF}{g} \right)^2 \left( 1 + \frac{vF'}{F} \right) + \frac{cF}{g} \left( 3 + \frac{vF'}{F} \right) \sin \tau + \sin^2 \tau \right]. \end{aligned}$$

On écrira cette dernière avec la notation du degré  $n$  de la résistance et de  $\rho = \frac{cF(v)}{g}$  :

$$\frac{d^2 v}{d\tau^2} = \frac{v}{\cos^3 \tau} [1 + (n+1)\rho^2 + (n+3)\rho \sin \tau + \sin^2 \tau].$$

Le développement des différents éléments par la formule de Taylor donnera, pour l'arc ayant son origine en  $(v_0, \tau_0)$  et son extrémité en  $(\tau, x, y, t, v, s)$ , les formules suivantes, où l'on a posé  $\rho_0 = \frac{cF_0}{g}$ .

On pose, de plus, conformément à une notation souvent employée dans le calcul par arcs successifs des trajectoires  $v\tau = \tau_0 - \tau$ , et l'on

appelle ( $dx$ ,  $dy$ ,  $ds$ ,  $dt$ ,  $dv$ ) les accroissements de ( $x$ ,  $y$ ,  $s$ ,  $t$ ,  $v$ ) sur l'arc  $d\tau$  :

$$dx = \frac{v_0^2}{g} d\tau \left\{ 1 - (\rho_0 + \sin \tau_0) \frac{d\tau}{\cos \tau_0} + \frac{1}{3} [(n+2)\rho_0^2 + (n+5)\rho_0 \sin \tau_0 + 2 \sin^2 \tau_0 + 1] \left( \frac{d\tau}{\cos \tau_0} \right)^2 + \dots \right\},$$

$$dy = \frac{v_0^2 \tan \tau_0}{g} d\tau \left\{ 1 - \frac{1}{2 \sin \tau_0} (1 + 2 \rho_0 \sin \tau_0 + 2 \sin^2 \tau_0) \frac{d\tau}{\cos \tau_0} + \frac{1}{3 \sin \tau_0} [(n+2)\rho_0^2 \sin \tau_0 + (n+5)\rho_0 \sin^2 \tau_0 + 2 \rho_0 + 2 \sin^3 \tau_0 + 4 \sin \tau_0] \left( \frac{d\tau}{\cos \tau_0} \right)^2 + \dots \right\},$$

$$dt = \frac{v_0}{g} \frac{d\tau}{\cos \tau_0} \left\{ 1 - \frac{1}{2} (\rho_0 + 2 \sin \tau_0) \frac{d\tau}{\cos \tau_0} + \frac{1}{6} [(n+1)\rho_0^2 + (n+5)\rho_0 \sin \tau_0 + 4 \sin^2 \tau_0 + 2] \left( \frac{d\tau}{\cos \tau_0} \right)^2 + \dots \right\},$$

$$dv = v_0 - v_0 (\rho_0 + \sin \tau_0) \frac{d\tau}{\cos \tau_0} - \frac{v_0}{g} [(n+1)\rho_0^2 + (n+3)\rho_0 \sin \tau_0 + \sin^2 \tau_0 + 1] \left( \frac{d\tau}{\cos \tau_0} \right)^2 + \dots,$$

$$ds = \frac{v_0^2}{g} \frac{d\tau}{\cos \tau_0} \left\{ 1 - \frac{1}{2} (\rho_0 + 3 \sin \tau_0) \frac{d\tau}{\cos \tau_0} + \frac{1}{6} [2(n+2)\rho_0^2 + 2(n+7)\rho_0 \sin \tau_0 + 9 \sin^2 \tau_0 + 3] \left( \frac{d\tau}{\cos \tau_0} \right)^2 \right\}.$$

Donnons encore la formule de la vitesse horizontale, qui est particulièrement simple, en partant de l'équation différentielle

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{c v F(\tau)}{g}.$$

On a

$$u = u_0 \left[ 1 - \rho_0 \frac{d\tau}{\cos \tau_0} + \frac{n+1}{2} \rho_0 (\rho_0 + \sin \tau_0) \left( \frac{d\tau}{\cos \tau_0} \right)^2 + \dots \right].$$

Enfin, pour compléter le Tableau précédent, on exprimera  $\tan \tau$  en fonction de la variable  $\frac{d\tau}{\cos \tau}$  par la série purement trigonométrique qui suit :

$$\tan \tau = \tan \tau_0 - \frac{1}{\cos \tau_0} \frac{d\tau}{\cos \tau_0} + \frac{\sin \tau_0}{\cos \tau_0} \left( \frac{d\tau}{\cos \tau_0} \right)^2 + \frac{3}{3 \cos \tau_0} \frac{2 \cos^2 \tau_0}{\cos \tau_0} \left( \frac{d\tau}{\cos \tau_0} \right)^3 + \dots$$

On peut remarquer la formule

$$x = \frac{v_0^2}{g} d\tau \left\{ 1 + \frac{1}{6} [(n-1)\rho_0(\rho_0 + \sin \tau_0) + \cos^2 \tau_0] \left( \frac{d\tau}{\cos \tau_0} \right)^2 + \dots \right\}$$

qui ne contient pas de terme en  $\frac{d\tau}{\cos \tau_0}$  dans le crochet.

**278. Formules différentielles.** — On se propose de chercher quelles sont les variations ( $\partial x, \partial y, \partial t, \partial \tau, \partial u$ ) de l'extrémité d'un arc quand on fait varier les données à l'origine ( $\alpha, V_0, c, g$ ).

On établira les formules à *temps constant*,  $\partial t = 0$ . On partira donc du Tableau IV du n° 266, réduit aux deux premiers termes, et en faisant état des formules suivantes :

$$u_0 = V_0 \cos \alpha, \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial u_0}{u_0} = \frac{\partial V_0}{V_0} - \tan \alpha \partial \alpha;$$

$$A_1 = 4 \frac{c F_0}{V_0^3 \cos^2 \alpha}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial A_1}{A_1} = \frac{\partial c}{c} + (n-2) \frac{\partial V_0}{V_0} + \tan \alpha \partial \alpha.$$

On trouve alors :

$$\begin{aligned} \partial x &= -(u_0 t - x) \frac{\partial c}{c} + x \tan \alpha \partial \alpha + [n x - (n-1) u_0 t] \frac{\partial V_0}{V_0}, \\ \partial y &= -(u_0 t - x) \left( \tan \alpha - \frac{g t}{3 u_0} \right) \frac{\partial c}{c} + x \partial \alpha \\ &\quad + \left\{ \frac{g t x}{3 u_0} + \left( \tan \alpha - \frac{g t}{3 u_0} \right) [n x - (n-1) u_0 t] \right\} \frac{\partial V_0}{V_0} - \frac{x}{6 u_0^2} (4 u_0 t - x) \partial g, \\ \frac{\partial \tau}{\cos^2 \alpha} &= -\frac{g}{u_0^2} (u_0 t - x) \frac{\partial c}{c} + \left[ \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{g}{u_0^2} (u_0 t - x) \tan \alpha \right] \partial \alpha \\ &\quad + \frac{g}{u_0^2} [(n-2)x - (n-3)u_0 t] \frac{\partial V_0}{V_0} - \frac{2 u_0 t}{u_0^2} \frac{x}{6} \partial g, \\ \partial u &= -(u_0 - u) \frac{\partial c}{c} + [(n-2)u - (n-3)u_0] \frac{\partial V_0}{V_0} + (2 u_0 - u) \tan \alpha \partial \alpha. \end{aligned}$$

On remarquera que  $\frac{\partial x}{\partial g} = \frac{\partial u}{\partial g} = 0$ .

On passera de ces formules à *temps constant* aux autres systèmes à un autre argument constant par la formule générale du n° 229 :

$$\partial e_a = \partial e_b - \left( \frac{de}{d\alpha} \right) \partial \alpha.$$

## II. — APPLICATIONS.

**279. Cas d'une résistance monome.** — Dans le cas d'une résistance monome  $F(v) = B_n v^n$  et  $cF(v) = b_n v^n$ , on a

$$F'(v) = n B_n v^{n-1} \quad \text{et} \quad F''(v) = n(n-1) B_n v^{n-2}.$$

Les coefficients  $A_1, A_2$  et  $A_3$ , qui figurent dans les formules du n° 274,

ont pour expression, en employant la notation  $\rho_0 = \frac{b_n V_0^n}{g}$  :

$$\Lambda_1 = \frac{4g}{V_0^2 \cos \alpha} \rho_0,$$

$$\Lambda_2 = - \frac{4g^2}{V_0^3 \cos^2 \alpha} \rho_0 [(n-1) \sin \alpha + (n-1) \rho_0],$$

$$\Lambda_3 = \frac{4g^3}{V_0^4 \cos^3 \alpha} \rho_0 [(n-1)(n-3) \sin^2 \alpha + \rho_0(n-1)(3n-14) \sin \alpha + (n-1) + 2\rho_0^2(n-3)(n-1)]$$

et la trajectoire s'écrit

$$\begin{aligned} y = x \tan \alpha &- \frac{g}{2V_0^2} \left( \frac{x}{\cos \alpha} \right)^2 - \frac{g}{3!} \left( \frac{g}{V_0^2} \right)^2 \rho_0 \left( \frac{x}{\cos \alpha} \right)^3 \\ &+ \frac{g}{4!} \left( \frac{g}{V_0^2} \right)^3 \rho_0 [(n-1) \sin \alpha + (n-1) \rho_0] \left( \frac{x}{\cos \alpha} \right)^4 \\ &- \frac{g}{5!} \left( \frac{g}{V_0^2} \right)^4 \rho_0 [(n-1)(n-3) \sin^2 \alpha + \rho_0(n-1)(3n-14) \sin \alpha \\ &\quad + (n-1) + 2\rho_0^2(n-3)(n-1)] \left( \frac{x}{\cos \alpha} \right)^5 \\ &+ \dots \end{aligned}$$

On remarquera que, pour  $n=1$ , l'abaissement  $y = x \tan \alpha - y$  ne dépend que de l'éloignement  $z = \frac{x}{\cos \alpha}$  et non de l'angle de projection. C'est la même propriété que dans le vide (15).

On donnera ultérieurement (Livre V, Chap. V, § 3) la loi de dépendance des termes de cette série.

*Cas d'une résistance linéaire.* — Faisons  $n=1$  et  $b_n=b_1$ . On aura

$$\begin{aligned} y = x \tan \alpha &- \frac{1}{2} \frac{g}{V_0^2} \left( \frac{x}{\cos \alpha} \right)^2 \\ &- \frac{1}{3} \frac{gb_1}{V_0^3} \left( \frac{x}{\cos \alpha} \right)^3 - \frac{1}{4} \frac{gb_1^2}{V_0^4} \left( \frac{x}{\cos \alpha} \right)^4 - \frac{1}{5} \frac{gb_1^3}{V_0^5} \left( \frac{x}{\cos \alpha} \right)^5 - \dots \end{aligned}$$

ce n'est autre que le développement de la formule

$$y = x \tan \alpha - \frac{g}{b_1^2} \log \left( 1 - \frac{b_1 x}{V_0 \cos \alpha} \right),$$

qui représente ainsi l'équation, en termes finis, de la trajectoire dans l'hypothèse d'une résistance linéaire.

*Cas d'une résistance quadratique.* — Faisons  $n=2$  et  $b_n=b_2$ .



On aura, avec  $\rho_0 = \frac{b_2 V_0^2}{g}$  :

$$\begin{aligned} y = \operatorname{tang} \alpha - \frac{g}{2 V_0^2} \left( \frac{x}{\cos \alpha} \right)^2 - \frac{2}{3!} \left( \frac{g}{V_0^2} \right)^2 \rho_0 \left( \frac{x}{\cos \alpha} \right)^3 \\ + \frac{2}{4!} \left( \frac{g}{V_0^2} \right)^3 \rho_0 (\sin \alpha - 2 \rho_0) \left( \frac{x}{\cos \alpha} \right)^4 \\ - \frac{2}{5!} \left( \frac{g}{V_0^2} \right)^4 \rho_0 [1 - \sin^2 \alpha - 8 \rho_0 \sin \alpha + 4 \rho_0^2] \left( \frac{x}{\cos \alpha} \right)^5 + \dots \end{aligned}$$

*Développement près du point de vitesse minimum.* — Faisant  $\rho_0 = -\sin \alpha$ , l'équation de la trajectoire s'écrira :

$$\begin{aligned} y = x \operatorname{tang} \alpha - \frac{g x^2}{2 u_0^2} \left[ 1 - \frac{2}{3} \left( \frac{g x}{V_0^2} \operatorname{tang} \alpha \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{g x}{V_0^2} \operatorname{tang} \alpha \right)^2 - \frac{2}{5} \left( 1 + \frac{n-1}{3.4} \cot^2 \alpha \right) \left( \frac{g x}{V_0^2} \operatorname{tang} \alpha \right)^3 \right]. \end{aligned}$$

**280. Les facteurs de la trajectoire.** — Prenons deux termes seulement du développement et mettons les facteurs de la trajectoire en évidence (267) :

$$\begin{aligned} y = x \operatorname{tang} \alpha - \frac{g x^2}{2 u_0^2} G_2, \quad t = \frac{x}{u_0} G_1, \\ \operatorname{tang} \tau = \operatorname{tang} \alpha - \frac{g x}{u_0^2} G_3, \quad u = u_0 G_u. \end{aligned}$$

On aura, d'après les formules du n° 267, en posant, comme au n° 268,  $2^\circ$ ,  $\xi = \frac{\Lambda_1 x}{4} = \frac{c F_0}{V_0^2 \cos \alpha} x$ , les formules qui suivent :

$$(1) \quad \begin{cases} G_1 = 1 + \frac{2}{3} \xi - \frac{1}{6} \left[ n - 4 + \frac{n-1}{\rho_0} \sin \alpha \right] \xi^2 + \dots, \\ G_2 = 1 + \xi - \frac{1}{3} \left[ n - 4 + \frac{n-1}{\rho_0} \left( n - 4 + \frac{n-1}{\rho_0} \sin \alpha \right) \right] \xi^2 + \dots, \\ G_3 = 1 + \frac{1}{2} \xi - \frac{1}{6} \left[ n - 3 + \frac{n-1}{\rho_0} \sin \alpha \right] \xi^2 + \dots, \\ G_u = 1 - \xi + \frac{1}{2} \left[ n - 1 + \frac{n-1}{\rho_0} \sin \alpha \right] \xi^2 + \dots \end{cases}$$

Au point de chute, on aura pour les facteurs de ce point :

$$\begin{aligned} \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g X} = G_X(\omega), \quad T = \frac{X}{u_\omega} G_t(\omega), \\ \operatorname{tang} \omega = \frac{g X}{u_\omega^2} G_\tau(\omega) - \operatorname{tang} \alpha, \quad u_\omega = u_0 G_u(\omega). \end{aligned}$$

On déduit de ces équations :

$$\frac{\tan \alpha}{\tan \omega} = \frac{G_y}{2G_x - G_y}, \quad T = \frac{G_x}{G_u} \sqrt{\frac{2}{gG_y}} \sqrt{X \tan \alpha}.$$

Si l'on considère le système d'équations (1), on voit que, dans le tir à grande vitesse de petits projectiles, tout au moins, le rapport  $\frac{G}{cF_0}$  sera, en général, petit; si, d'autre part, on tire sous un petit angle (tir de plein fouet),  $\sin \alpha$  sera petit, de sorte que, dans les formules, le terme en  $\frac{G}{cF_0} \sin \alpha$  des crochets sera souvent négligeable.

(On peut dès lors énoncer les propriétés limites suivantes :

1° Le coefficient balistique  $c$  n'intervient plus dans les coefficients des termes en  $\xi$ , mais seulement dans  $\xi$  lui-même sous la forme du produit  $c\xi$ ;

2° L'angle de projection  $\alpha$  n'intervient plus également que dans la variable  $\xi$ , où il entre sous la forme  $\frac{x}{\cos \alpha}$ ;

3° Si le tir est assez tendu, le cosinus lui-même peut être confondu avec l'unité et les facteurs  $G$  peuvent être considérés comme indépendants de l'angle de projection;

4° Si la vitesse est supérieure à 400<sup>m</sup>, on sait que le rapport  $\frac{F_0}{V^3}$  varie très peu. Donc, dans le cas du tir très tendu, les facteurs de la trajectoire ne varient que très lentement avec la vitesse.

En résumé, dans ce tir, les facteurs de la trajectoire sont, à peu près, indépendants de l'angle de projection et de la vitesse initiale; ils dépendent surtout du produit  $c\xi$ .

Il en résulte que :

1° Si deux projectiles sont lancés avec la même vitesse initiale, pour des portées inversement proportionnelles aux coefficients balistiques (égalité des  $c\xi$ ), la quantité  $\frac{u}{\cos \alpha}$ , où, sensiblement,  $u$  sera la même; les quantités  $\sin 2\alpha$  (ou sensiblement  $2 \tan \alpha$ ),  $T \cos \alpha$  (ou sensiblement  $T$ ),  $\tan \omega \cos^2 \alpha$  (ou sensiblement  $\tan \omega$ ) seront proportionnelles aux portées, ou, ce qui revient au même, à l'inverse des coefficients balistiques.

2° Si l'on tire, en tir tendu, le même projectile à deux vitesses initiales différentes, pour la même portée, la vitesse restante horizontale sera à peu près proportionnelle à la vitesse horizontale initiale  $u_0$ , la durée du trajet à peu près inversement proportionnelle à  $u_0$ , les tan-



de chaque arc de trajectoire, tel que  $M_0 M'_0$ . La composante tangentielle des forces en  $M_0$  est  $(g \sin \tau_0 + cF_0)$ . Appliquant le théorème des forces vives dans la direction de la tangente, en supposant la force constante sur le petit arc, il vient

$$M_0 M'_0 (g \sin \tau_0 + cF_0) = \frac{1}{2} (v_0^2 - v_1^2),$$

d'où l'on déduira la valeur de la vitesse  $v_1$ .

On connaît le rayon de courbure  $M_0 C_0$  en  $M_0$ , puisque l'on a  $r_0 = -\frac{v_0^2}{g \cos \tau_0}$ , que l'on construira en prenant  $M_0 L = \frac{v_0^2}{g} = 2h$  et menant  $LC_0$  horizontale. On prendra arc  $M_0 M_1 = M_0 M'_0$  et  $M_1$  est le point cherché. On répétera en  $M_1$  (où tous les éléments sont maintenant connus) la même construction, et ainsi de suite.

3<sup>e</sup> *Méthode de la série de Mac Laurin.* — On peut présenter une solution de même espèce sous la forme suivante :

Soient  $\alpha$  et  $u_0$  les caractéristiques initiales de l'arc et  $A_1$  le coefficient (274) renfermant la valeur initiale de la résistance  $A_1 = 4 \frac{cF_0}{V_0^2 \cos \alpha}$ . (Quelle sera, au bout d'un temps  $t$  très petit, la position du projectile et quelles seront les données initiales de l'arc suivant ?)

Ne conservant que les termes en  $t^2$ , dans les formules (274, IV), on écrira :

$$\begin{aligned} x &= u_0 t \left( 1 - \frac{A_1}{8} u_0 t \right), \\ y &= x \tan \alpha - g \frac{t^2}{2}, \\ \tan \tau &= \tan \alpha - \frac{gt}{u_0} \left( 1 + \frac{A_1}{8} u_0 t \right), \\ u &= u_0 \left( 1 - \frac{A_1}{4} u_0 t \right). \end{aligned}$$

On remarquera d'abord que le terme en  $t^2$  de  $x$ , qui est  $\left( -\frac{A_1}{8} u_0^2 t^2 \right)$ , c'est-à-dire  $\left( -\frac{cF_0}{2} t^2 \cos \alpha \right)$  est d'ordre de grandeur tout à fait comparable à  $\frac{gt^2}{2}$ , la résistance  $cF_0$  remplaçant la gravité  $g$ .

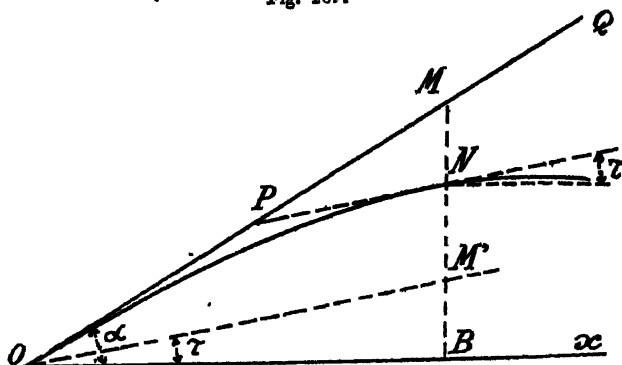
Ayant pris  $OQ = V_0 t$  et  $QM = \frac{cF_0}{2} t^2$  sur la tangente initiale, on porte  $MN = \frac{1}{2} g t^2$  sur la verticale. Le point  $N$  est l'extrémité de l'arc.

Pour avoir la tangente en  $M$ , je dis qu'il suffit de joindre  $N$  au milieu  $P$  de  $OM$ .

On a, on effet, en négligeant des termes en  $t^4$ , d'après les formules

ci-dessus  $x(\tan \alpha - \tan \tau) = gt^2$ . Donc, si l'on prend  $NM' = \frac{1}{2}gt^2 = MN$ , la droite  $M'O$  sera parallèle à la tangente en  $N$ , ce qui démontre le théorème.

Fig. 267.



D'autre part, en combinant les équations qui donnent  $x$  et  $u$ , on trouve, en négligeant les termes en  $t^4$ , la formule

$$u = \frac{x^2}{u_0 t^2},$$

qui servira au calcul de  $u$ , à l'origine du second arc.

En éliminant  $t$  entre  $x$  et  $y$ , on trouve, pour équation de la trajectoire,

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2u_0^2} \left( 1 + \frac{cF_0}{V_0^2} \frac{x}{\cos \alpha} \right).$$

3° *Autre méthode.* — Dans la construction précédente, porter  $QM_1 = CF_0 t^2$  et  $M_1 N_1 = gt^2$ . Joindre  $QF_1$ , et prendre le milieu; ce point coïncidera avec le point  $N$  de la figure précédente.

Mais le vecteur  $ON_1$  représentera, en grandeur et direction,  $vt$ , c'est-à-dire le parcours du projectile pendant le second espace de temps égal à  $t$ .

Menant  $NQ_1$  parallèle et égal à  $ON_1$ , on aura le second arc, en répétant la même construction.

4° *Généralisation au cas d'arcs finis.* — Jusqu'aux termes en  $t^2$ , il y a donc indépendance entre les deux mouvements, l'un, suivant la tangente initiale, étant dû seulement à la vitesse initiale  $V_0$ , et à la résistance de l'air, l'autre, suivant la verticale, étant dû à l'action seule de la pesanteur.

Cette décomposition en deux mouvements simples de la solution du problème balistique a été parfois préconisée même pour des arcs finis, et même pour de grandes trajectoires. Les formules qui résoudraient ce problème s'établiraient alors très simplement ainsi qu'il suit :

Sur la tangente initiale, le mouvement sera celui que nous avons traité sous le nom de *mouvement rectiligne horizontal*, et l'on aura, pour déterminer l'abscisse du projectile, au temps  $t$ , les formules

$$\frac{x}{\cos \alpha} = \frac{D(v) - D(V_0)}{c}, \quad t = \frac{S(v) - S(V_0)}{c}.$$

Au même temps  $t$ , le projectile qui, par hypothèse, n'aura, dans son mouvement de chute, été soumis qu'à l'action de la pesanteur, aura, suivant la verticale, parcouru un chemin  $\frac{1}{2}gt^2$ .

Pour discuter ces formules, prenons un terme de plus dans le développement de  $x$  et de  $y$ . On aura pour les équations exactes, aux termes en  $t^4$  près (système IV), pour l'éloignement  $z = \frac{x}{\cos \alpha}$  et pour l'abaissement  $y$ , les suites

$$z = V_0 t - b_n V_0^n \frac{t^2}{2} + n b_n^2 V_0^{2n-1} \left[ 1 + \frac{(n-1)}{n} \frac{g}{b_n V_0^n} \sin \alpha \right] \frac{t^3}{3!} + \dots,$$

$$y = \frac{gt^2}{2} - \frac{g}{6} b_n V_0^{n-1} t^3 + \dots$$

Au lieu de ces formules, dans l'hypothèse de l'indépendance des mouvements, on prend pour l'éloignement  $z'$  le développement de  $z'$  en fonction de  $t$  donné au n° 111 et qui est

$$z' = V_0 t - b_n V_0^n \frac{t^2}{2} + n b_n^2 V_0^{2n-1} \frac{t^3}{3!} + \dots$$

et, pour l'abaissement,

$$y = \frac{gt^2}{2} \quad (\text{Lombard, etc.})$$

ou

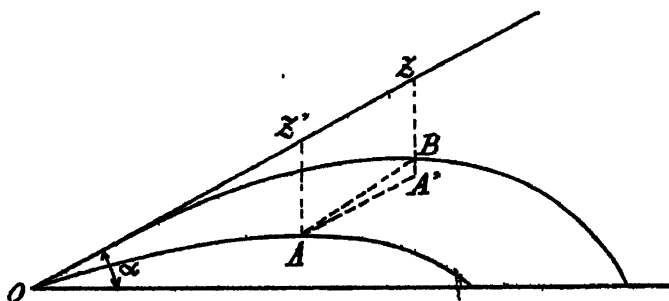
$$y = \frac{gt^2}{2} \left( 1 - \frac{1}{3} b_n V_0^{n-1} t \right) \quad (\text{Lionastre, etc.}).$$

On voit que  $z$  et  $z'$  ne coïncideront que dans deux cas : 1° si  $n=1$ , quel que soit  $\alpha$ ; 2° quel que soit  $n$ , si l'angle de projection  $\alpha$  est très petit.

Si l'on fait, d'après les deux systèmes d'équations ci-dessus, la construction des deux trajectoires indiquées sur la figure, on voit que, lorsque  $n > 1$  et  $\alpha > 0$ , la trajectoire vraie est au-dessus de la trajec-

toire à mouvement indépendant. Elle serait au-dessous si le signe de  $(n-1)$  ou de  $\alpha$  était négatif.

Fig. 263.



Mais, on ne peut pas dire que la trajectoire vraie sera toujours au-dessus de l'autre. Au contraire, on sait que si  $n \geq 2$ , la limite  $z_0$  de  $z'$  (mouvement rectiligne horizontal) pour  $v' = 0$  est l'infini. Donc, la seconde trajectoire a une forme parabolique; la trajectoire vraie admettant une asymptote verticale, les deux courbes se coupent et la trajectoire vraie passe au-dessous de l'autre.

Il peut donc se faire que certaines vérifications numériques, où l'on comparera, par exemple, les portées obtenues par les formules de la trajectoire à mouvement indépendant, et les formules exactes, puissent réussir dans certains cas particuliers.

En tout cas, les développements qui précèdent ont bien précisé les cas où l'application de ces formules et de ces constructions graphiques pouvait être légitime.

Dans le cas d'une résistance  $n^{\text{ème}}$ , on peut écrire l'équation explicite de la trajectoire, obtenue dans l'hypothèse précédente.

On a (99, 3°)

$$(n-1)V_0^{n-1}b_n t = \left[ 1 + (n-2)V_0^{n-2}b_n \frac{x}{\cos \alpha} \right]^{\frac{n-1}{n-2}} - 1.$$

Par suite, puisque l'on prend

$$y = x \tan \alpha - \frac{1}{2} g t^2,$$

on aura, pour équation de la trajectoire :

$$y = x \tan \alpha - \frac{g}{2[(n-1)V_0^{n-1}b_n]^2} \left\{ \left[ 1 + (n-2)V_0^{n-2}b_n \frac{x}{\cos \alpha} \right]^{\frac{n-1}{n-2}} - 1 \right\}^2.$$

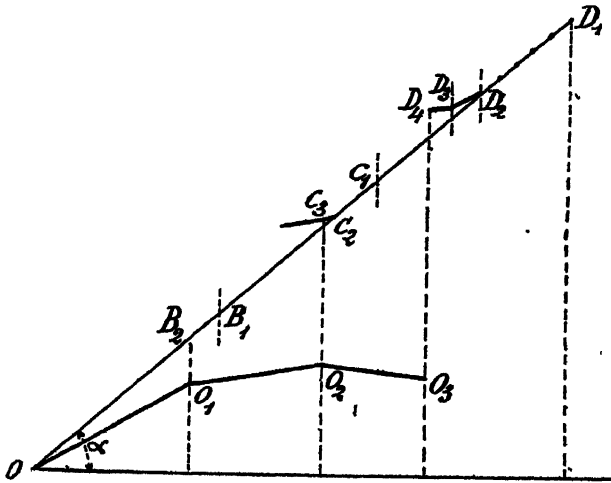
Pour  $n = 3$ , par exemple, on a

$$y = x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2 u_0^2} \left[ 1 + \frac{b_3 V_0}{2} \frac{x}{\cos \alpha} \right]^2.$$

C'est une trajectoire du quatrième degré du type de celles du général Duchène (260).

5<sup>e</sup> Méthode de Cranz. — Soit le temps divisé en petits intervalles

Fig. 264.



égaux  $dt$ , et soient  $nv_1, nv_2, nv_3, \dots$  les demi-pertes de vitesse, d'après la loi du mouvement rectiligne, pendant chacun des intervalles 1, 2, 3, ....

Si la résistance de l'air n'agissait pas, le projectile au bout des temps 1, 2, 3, ... serait sur la verticale des points  $B_1, C_1, D_1$  également espacés; à cause de la résistance de l'air, au temps 1, le projectile sera en  $B_2$ , l'intervalle  $B_1 B_2$  étant égal à  $nv_1$ ; il sera tombé de  $\frac{1}{2} g dt^2$ .

De  $C_1$  on déduira la position  $C_2$  du projectile dans l'air, en prenant, sur  $OC_1$ ,  $C_1 C_2 = 3 nv_1$ , et parallèlement à  $OO_1$ , en prenant  $C_2 C_3 = nv_2$ . Puis

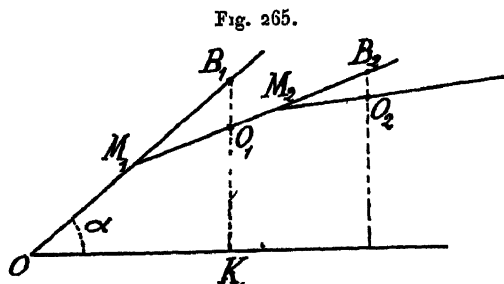
$$C_2 O_2 = \frac{g}{2} (3 \overline{nt_1^2} + \overline{nt_2^2}) = \frac{g}{2} 2^2 dt^2.$$

On peut utiliser, pour ces genres de graphiques, des procédés analogues à ceux donnés pour le cas du vide (33, 2<sup>e</sup>).

En particulier, le graphique qui porte le n<sup>o</sup> 4 est employé par Cranz



pour une construction de la trajectoire dans l'air, quand on suppose le tir très tendu. On part alors, pour des positions  $A_1, A_2, \dots, A_i$  équi-



distantes du projectile sur l'horizontale, du calcul des temps  $nt_1, nt_2, \dots$  par les fonctions **D** et **S**.

**282. Hyperbole balistique en un point de la trajectoire.** Si l'on prend la conique

$$y = x \tan \alpha + Px^2 + Qxy + Ry^2,$$

il sera aisé de déterminer les coefficients  $P, Q, R$  en fonction des quantités  $A_1$  et  $A_2$  données au n° 274. Il suffira, en effet, de former les quatre premières dérivées de  $y$  en  $x$ .

On obtient ainsi l'équation d'une hyperbole qui a, avec la trajectoire atmosphérique, cinq points communs dans le voisinage de l'origine.

On trouve, pour les coefficients  $P, Q, R$  les valeurs suivantes :

$$P = -\frac{g}{2u_0^2} - \frac{A_1}{6} \tan \alpha - \frac{g}{u_0^2} \frac{\tan^2 \alpha}{36} (3A_2 - 2A_1^2),$$

$$Q = \frac{A_1}{6} + \frac{u_0^2}{g} \frac{\tan \alpha}{18} (3A_2 - 2A_1^2),$$

$$R = -\frac{u_0^2}{g} \frac{1}{36} (3A_2 - 2A_1^2),$$

Les différentes coniques auxquelles on peut comparer la trajectoire dans le voisinage d'un point correspondent alors aux conditions suivantes :

$Q = 0, \quad R = 0,$	<i>parabole de la vitesse</i> (214);	trois points communs;
$Q = 0, \quad P = R,$	<i>cercle osculateur</i> (214);	trois points communs;
$Q^2 = 4PR,$	<i>parabole oblique bitangente;</i>	quatre points communs.

Toute relation *a priori* entre  $P, Q, R$  donne lieu à une conique ayant quatre points communs. Si  $P, Q, R$  sont indépendants, on a la trajectoire ci-dessus, ayant cinq points communs avec la courbe balistique.

283. L'équation de la trajectoire d'après le reste de la série (colonel Vallier). — On sait que, dans le développement de Taylor de  $y = f(x)$ , le reste peut s'exprimer par une intégrale et qu'on a

$$y = x \left( \frac{dy}{dx} \right)_0 + \frac{x^2}{2!} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)_0 + \dots + \int_0^x \frac{(x-\xi)^m}{m!} \frac{d^{m+1} y}{d\xi^{m+1}} d\xi,$$

$\xi$  étant la variable  $x$ , et cette dernière, sous le signe  $\int$ , étant considérée comme la limite supérieure de l'intégrale.

Faisons  $m = 2$ , on aura

$$y = x \left( \frac{dy}{dx} \right)_0 + \frac{x^2}{2!} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)_0 + \int_0^x (x-\xi)^2 \frac{d^3 y}{d\xi^3} d\xi.$$

Mais

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \tan \tau, & \frac{d^2 y}{dx^2} &= -\frac{g}{v^2 \cos^3 \tau}, \\ \frac{d^3 y}{dx^3} &= -\frac{2gc F(v)}{v^4 \cos^3 \tau}. \end{aligned}$$

Pour les autres éléments, on opérera de même, et l'on arrivera au système suivant :

$$\begin{aligned} y &= x \tan \tau - \frac{g x^2}{2 V_0^2} - g \int_0^x (x-\xi)^2 \frac{c F(v)}{v^4 \cos^3 \tau} d\xi, \\ \tan \tau &= \tan \alpha - \frac{g x}{u_0^2} - g \int_0^x (x-\xi) \frac{c F(v)}{v^4 \cos^3 \tau} d\xi, \\ u &= u_0 - \frac{c F(v)}{V_0} x + \frac{1}{2} \int_0^x (x-\xi) \frac{c F(v) + g \sin \tau}{v \cos \tau} d\xi, \\ t &= \frac{x}{u_0} + \int_0^x (x-\xi) \frac{c F(v)}{v^3 \cos^2 \tau} d\xi. \end{aligned}$$

La première est l'équation de la trajectoire sous la même forme déjà rencontrée plus haut (257), qu'on avait obtenue par une triple intégration.

Au moyen de l'expression de  $\frac{d^3 y}{dx^3}$  donnée précédemment (271), on écrira l'équation de la trajectoire sous une autre forme, où l'intégrale constituera le quatrième terme du second membre :

$$\begin{aligned} y &= x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2 V_0^2 \cos^2 \alpha} - \frac{g x^3 c F(V_0)}{3 V_0^3 \cos^3 \alpha} \\ &+ \frac{g c}{3} \int_0^x (x-\xi)^3 \frac{F(v)}{v^5 \cos^3 \tau} \left[ g \left( \frac{v F'}{F} - 1 \right) \sin \tau + c F \left( \frac{v F'}{F} - 4 \right) \right] d\xi. \end{aligned}$$

284. Développement de l'arc  $s$ . — 1° L'arc en fonction de l'abscisse

et de l'ordonnée. — L'arc  $s$  a pour expression  $s = \int_0^x \frac{dx}{\cos \tau}$ , et  $\cos \tau$  est exprimable en fonction de  $y' = \tan \tau$  par la formule

$$\frac{1}{\cos^2 \tau} = 1 + y'^2.$$

Ainsi donc, on aura

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Comme, d'autre part, le système I (274) donne l'expression de  $y'$  en fonction de  $x$ , l'intégration sera possible et l'on saura exprimer l'arc  $s$  en fonction de  $x$ , en n'introduisant que les coefficients  $A_1, A_2, A_3$  de la théorie générale.

Mais ce calcul est assez compliqué; nous effectuerons donc le calcul de l'arc en partant des dérivées successives obtenues directement. Nous savons que

$$ds = -\frac{v^2}{g} \frac{d\tau}{\cos \tau} \quad \text{et que} \quad \frac{dv}{d\tau} = \frac{v}{\cos \tau} \rho + \sin \tau.$$

Nous avons, en dérivant successivement,

$$\frac{dx}{ds} = \cos \tau, \quad \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{g}{v^2} \sin \tau \cos \tau;$$

$$\frac{d^3x}{ds^3} = \frac{g^2}{v^4} \cos \tau (4 \sin^2 \tau - 1 + 2\rho \sin \tau),$$

$$\frac{d^4x}{ds^4} = \frac{g^3}{v^6} \cos \tau \{ 2 \sin \tau (3 - 8 \cos^2 \tau) + [2(5 - n) \sin^2 \tau - 3\rho - 2(n-1)\rho^2 \sin \tau] \}$$

avec

$$n = \frac{v F'}{F} \quad \text{et} \quad \rho = \frac{c F'}{g}.$$

De même, par rapport à  $y$ ,

$$\frac{dy}{ds} = \sin \tau, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{g}{v^2} \cos^2 \tau;$$

$$\frac{d^3y}{ds^3} = -\frac{2g^2}{v^4} \cos^2 \tau (2 \sin \tau + \rho),$$

$$\dots\dots\dots;$$

$$\frac{d^4y}{ds^4} = -\frac{2g^3}{v^6} \cos^2 \tau [2(1 - 7 \sin^2 \tau) + (n + 10)\rho \sin \tau + (n - 4)\rho^2].$$

Nous aurons ainsi, en faisant  $\tau = \alpha$  et  $v = V_0$ , les deux séries sui-

vantes jusqu'au terme  $s^4$  inclus :

$$\begin{aligned} x &= s \cos \alpha + \frac{s^2}{2!} \frac{g}{V_0^2} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{s^3}{3!} \left( \frac{g}{V_0^2} \right)^2 \cos \alpha (1 \sin^2 \alpha - 1 + 2 \rho_0 \sin \alpha) \\ &\quad + \frac{s^4}{4!} \left( \frac{g}{V_0^2} \right)^3 \cos \alpha \{ 2 \sin \alpha (3 - 8 \cos^2 \alpha) \\ &\quad \quad \quad + [2(5 - n) \sin^2 \alpha - 3] \rho_0 - 2(n-1) \rho_0^2 \sin \alpha \} + \dots, \\ y &= s \sin \alpha - \frac{s^2}{2!} \frac{g}{V_0^2} \cos^2 \alpha - \frac{s^3}{3!} \left( \frac{g}{V_0^2} \right)^2 \cos^2 \alpha (4 \sin \alpha + 2 \rho_0) \\ &\quad + \frac{s^4}{4!} \left( \frac{g}{V_0^2} \right)^3 \cos^2 \alpha [2(1 - 7 \sin^2 \alpha) + (n+10) \rho_0 \sin \alpha + (n-4) \rho_0^2] + \dots, \end{aligned}$$

et, par le retour des séries, en se bornant au troisième terme du second membre :

$$\begin{aligned} s &= \frac{x}{\cos \alpha} - \frac{1}{2!} \frac{g}{V_0^2} \sin \alpha \left( \frac{x}{\cos \alpha} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left( \frac{g}{V_0^2} \right)^2 (\cos^2 \alpha - 2 \rho_0 \sin \alpha) \left( \frac{x}{\cos \alpha} \right)^3 + \dots, \\ s &= \frac{y}{\sin \alpha} + \frac{1}{2!} \frac{g}{V_0^2} \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} \left( \frac{y}{\sin \alpha} \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!} \left( \frac{g}{V_0^2} \right)^2 \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} (\sin^2 \alpha + 3 + \rho_0 \sin \alpha) \left( \frac{y}{\sin \alpha} \right)^3 + \dots \end{aligned}$$

2° *L'arc en fonction de l'inclinaison.* — Les formules précédentes ne font pas connaître, ainsi que le font les formules du n° 274, l'arc  $s$  dans l'air par le moyen d'un facteur de la trajectoire.

(On sait qu'on a, dans le vide (22),

$$s = \frac{u_0^2}{g} (\xi_2 \alpha - \xi_2 \tau),$$

avec

$$\xi_2 \tau = \int_0^\tau \frac{d\tau}{\cos^3 \tau}.$$

Pour avoir la solution au moyen d'un facteur de la trajectoire, il faut donc chercher les dérivées successives

$$\frac{ds}{d\xi_2}, \quad \frac{d^2 s}{d\xi_2^2}, \quad \frac{d^3 s}{d\xi_2^3}.$$

A cet effet, sachant que  $\frac{d\tau}{d\xi_2} = \cos^3 \tau$ , on calculera les dérivées suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\xi_2} &= - \frac{v^2 \cos^2 \tau}{g}, & \frac{d^2 s}{d\xi_2^2} &= - \frac{2c \tau^2}{g} v^2 \cos^4 \tau, \\ \frac{d^3 s}{d\xi_2^3} &= - 2\rho \frac{v^2}{g} \cos^6 \tau [(n+2)\rho + (n-2) \sin \tau], \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Le développement cherché sera le suivant, pour un petit arc  $ds$  défini par les extrémités  $\tau_0$  et  $\tau_1$ , et en posant  $d\xi_2 = \xi_2\tau_0 - \xi_2\tau_1$  :

$$ds = \frac{u_0^2}{g} d\xi_2 \left\{ 1 - \rho_0 \cos^2 \tau_0 d\xi_2 \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \rho_0 \cos^4 \tau_0 [(n+2)\rho_0 + (n-2)\sin \tau_0] \overline{d\xi_2^2} + \dots \right\}.$$

Entre crochets se trouvent les *facteurs de la trajectoire* de l'arc  $s$ . La série inverse donnera

$$(1) \quad \frac{u_0^2}{g} d\xi_2 = ds \left\{ 1 + \rho_0 \frac{g ds}{V_0^2} - \frac{1}{3} \rho_0 [(n-4)\rho_0 + (n-2)\sin \tau_0] \left( \frac{g ds}{V_0^2} \right)^2 + \dots \right\}.$$

3° *Rapport de l'abscisse et de l'ordonnée à l'arc.* — La série du n° 274 [syst. I, éq. (3)]

$$\frac{u_0^2}{g} (\tan \tau_0 - \tan \tau) = x \left[ 1 + \frac{A_1}{4} x + \frac{A_2}{2} \frac{x^2}{6} + \dots \right]$$

peut, quand, dans le crochet, on remplace  $x$  par les deux premiers termes du développement en  $s$  établi plus haut, c'est-à-dire

$$dx = ds \cos \tau_0 + \frac{g}{2V_0^2} ds^2 \sin \tau_0 \cos \tau_0 + \dots,$$

s'écrire

$$(2) \quad \frac{u_0^2}{g} d \tan \tau = dx \left\{ 1 + \rho_0 \frac{g ds}{V_0^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \rho_0 \left[ (n-4)\rho_0 + \left( n - \frac{5}{2} \right) \sin \tau_0 \right] \left( \frac{g ds}{V_0^2} \right)^2 + \dots \right\}.$$

Divisant membre à membre les deux relations (2) et (1), on trouvera

$$\frac{d \tan \tau}{d\xi_2} = \frac{dx}{ds} \left[ 1 + \frac{1}{6} \rho_0 \left( \frac{g ds}{V_0^2} \right)^2 \sin \tau_0 + \dots \right]$$

et, par suite,

$$\frac{dx}{ds} = \frac{d \tan \tau}{d\xi_2 \tau} - \frac{1}{6} \rho_0 \left( \frac{g ds}{V_0^2} \right)^2 \sin \tau_0 \cos \tau_0 + \dots$$

Pour  $dy$ , on a, d'après le développement (275, 2°) :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} (\tan \tau_0 + \tan \tau) + \frac{g ds^3 A_1}{4! V_0^3} + \dots$$

Multipliant membre à membre, on voit qu'il vient

$$\frac{dy}{ds} = \frac{1}{2} \frac{\tan^2 \tau_0 - \tan^2 \tau}{\xi_2 \tau_0 - \xi_2 \tau} + \frac{1}{6} \rho_0 \left( \frac{g ds}{V_0^2} \right)^2 \cos^4 \tau_0.$$

Ces deux formules sont utilisées dans le calcul des trajectoires par arcs successifs. Les premiers termes du second membre sont les rapports  $\frac{dx}{ds}$  et  $\frac{dy}{ds}$  dans le vide (21).

On obtiendra ces mêmes formules en partant du système du n° 274 qui donne la série en  $ns$ .

**285. Application au calcul du temps.** — Les formules du développement en série d'un petit arc peuvent servir à résoudre des problèmes de nature diverse, qui se présentent en Balistique. Nous donnerons un premier exemple d'application.

Soient connues aux extrémités d'un arc  $s$ , d'amplitude  $(\tau_0 - \tau)$ , les vitesses  $v_0$  et  $v_1$  : établir une série faisant connaître le *temps*  $t$ , en fonction de  $s$ ,  $v_0$  et  $v_1$ .

1° Posons, d'une manière générale,  $s = \mu t$ , relation où  $\mu$  est un nombre compris entre  $v_0$  et  $v_1$ . On posera, pour un point courant sur l'arc,  $v = \mu - (\mu - v)$ .

On a

$$(1) \quad s = \int_0^t v \, dt = \mu t - \int_0^t (\mu - v) \, dt$$

Mais, on a les dérivées successives

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dv} &= \frac{1}{g(p + \sin \tau)}, \\ \frac{d^2t}{dv^2} &= \frac{\frac{dp}{dv} + \cos \tau \frac{d\tau}{dv}}{g(p + \sin \tau)^2} = \frac{1}{g} \frac{n p (p + \sin \tau + \cos^2 \tau)}{v (p + \sin \tau)^3}. \end{aligned}$$

On a, par la série de Taylor,

$$\frac{dt}{dv} = \left( \frac{dt}{dv} \right)_0 + \left( \frac{d^2t}{dv^2} \right)_0 (v - v_0) + \dots$$

Donc

$$\frac{dt}{dv} = \frac{1}{g(p_0 + \sin \tau_0)} + \frac{1}{g} \frac{n p_0 (p_0 + \sin \tau_0) + \cos^2 \tau_0}{(p_0 + \sin \tau_0)^2} \frac{v - v_0}{v_0} + \dots$$

Par suite, en posant  $K = \frac{n p_0 (p_0 + \sin \tau_0) + \cos^2 \tau_0}{g v_0 (p_0 + \sin \tau_0)^2}$ , l'équation (1) deviendra

$$s = \mu t - \frac{1}{g(p_0 + \sin \tau_0)} \int_{v_0}^{v_1} (\mu - v) \, dv - K \int_{v_0}^{v_1} (\mu - v)(v - v_0) \, dv.$$

On écrira cette dernière intégrale

$$K \int_{v_0}^{v_1} [(\mu - v_0) - (v - v_0)](v - v_0) d(v - v_0).$$

On trouve alors

$$(2) \quad s = \mu t - \frac{2\mu}{2g(\rho_0 + \sin \tau_0)}(v_0 - v_1) - \frac{K}{6}[3\mu - v_0 - 2v_1](v_0 - v_1)^2.$$

Le terme général de la série est

$$\frac{H}{(p+1)(p+2)}[(p+2)\mu - v_0 - (p+1)v_1](v_0 - v_1)^{p+1}.$$

Suivant les valeurs qu'on donnera à l'arbitraire  $\mu$ , on aura des formules de types différents, dont certaines ont été utilisées pour des calculs balistiques.

2° C'est ainsi qu'on peut former le Tableau suivant :

$$(a) \quad \mu = \frac{v_0 + v_1}{2} \quad (\text{moyenne arithmétique}),$$

$$t = \frac{2s}{v_0 + v_1} + \frac{2K}{4!} \frac{(v_0 - v_1)^3}{v_0} + \dots;$$

$$(b) \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} \right) \quad (\text{moyenne harmonique}),$$

$$t = \frac{s(v_0 + v_1)}{2v_0v_1} + \left[ 2K - \frac{6}{g v_0(\rho_0 + \sin \tau_0)} \right] \frac{(v_0 - v_1)^3}{4! v_0} + \dots;$$

$$(c) \quad \mu = \sqrt{v_0 v_1} \quad (\text{moyenne géométrique}),$$

$$t = \frac{s}{\sqrt{v_0 v_1}} + \left[ 2K - \frac{3}{g v_0(\rho_0 + \sin \tau_0)} \right] \frac{(v_0 - v_1)^3}{4! v_0} + \dots$$

Toutes ces moyennes, comme d'ailleurs toute valeur de  $\mu$  symétrique par rapport aux lettres  $v_0$  et  $v_1$ , conduisent à des expressions où ne figure pas de terme en  $(v_0 - v_1)^2$ .

$$3^\circ \text{ Faisons, enfin, } \mu = \frac{v_0 + 2v_1}{3}.$$

Dans ce cas, le troisième terme du deuxième membre de la formule (2) disparaît, et il reste

$$t = \frac{3s}{v_0 + 2v_1} - \frac{1}{2g(\rho_0 + \sin \tau_0)} \frac{(v_0 - v_1)^3}{v_0 + 2v_1}.$$

Cette formule, comme les autres, néglige un terme de l'ordre de  $(v_0 - v)^4$ .

286. Second exemple d'application. — 1° Soit l'intégrale

$$I = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \varphi \, d\xi,$$

où  $\varphi$  est une fonction de  $\xi$ .

Posons l'identité

$$\varphi = \mu + (\mu - \varphi), \quad \text{d'où} \quad I = \mu(\xi_1 - \xi_0) - \int_{\xi_0}^{\xi_1} (\mu - \varphi) \, d\xi.$$

On a, par la formule de Taylor,

$$\frac{d\xi}{d\varphi} = \xi'_0 + (\varphi - \varphi_0)\xi''_0 + \frac{(\varphi - \varphi_0)^2}{2}\xi'''_0 + \dots,$$

en posant

$$\xi'_0 = \left(\frac{d\xi}{d\varphi}\right)_0, \quad \xi''_0 = \left(\frac{d^2\xi}{d\varphi^2}\right)_0.$$

Donc

$$I = \mu(\xi_1 - \xi_0) - \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (\mu - \varphi) \left[ \xi'_0 + (\varphi - \varphi_0)\xi''_0 + \dots \right] d\varphi,$$

et en effectuant les intégrations, entre les limites  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$ ,

$$I = \mu(\xi_1 - \xi_0) + \xi'_0(\varphi_0 - \varphi_1) \left( \mu - \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} \right) + \frac{\xi''_0}{2}(\varphi_0 - \varphi_1)^2 \left( \mu - \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{3} \right) + \dots \\ + (-1)^{n+1} \frac{\xi^{(n)}_0}{n!} (\varphi_0 - \varphi_1)^n \left( \mu - \frac{n\varphi_1 + \varphi_0}{n+1} \right).$$

Telle est la formule générale cherchée

2° Prenons les équations de mouvement sous la forme

$$g_x x = \int_{\tau_0}^{\tau_1} u^2 \, d \operatorname{tang} \tau, \quad g_y y = \int_{\tau_0}^{\tau_1} u^2 \, d \operatorname{tang}^2 \tau, \quad g_t t = - \int_{\tau_0}^{\tau_1} u \, d \operatorname{tang} \tau;$$

on voit qu'on rentre dans le cas de la formule générale, en posant  $\varphi = u^2$ , pour  $x$  et  $y$ ,  $\varphi = u$  pour  $t$ ; et  $\xi = \operatorname{tang} \tau$  pour  $x$  et  $t$ ,  $\xi = \operatorname{tang}^2 \tau$  pour  $y$ .

On formera par suite :

$$\begin{aligned} \frac{d \operatorname{tang} \tau}{d u^2} &= \frac{\xi'_0}{2 u_0^2 \rho_0 \cos^2 \tau_0} + (u^2 - u_0^2) \frac{\xi''_0}{4 u_0^4 \rho_0^2 \cos^4 \tau_0} [3 \sin \tau_0 - (n+2)(\rho_0 + \sin \tau_0)] + \dots, \\ \frac{d \operatorname{tang}^2 \tau}{d u^2} &= \frac{\operatorname{tang} \tau_0}{u_0^2 \rho_0 \cos^2 \tau_0} + (u^2 - u_0^2) \frac{1}{2 u_0^4 \rho_0^2 \cos^4 \tau_0} [3 \sin^2 \tau_0 + 1 - (n+2)(\rho_0 + \sin \tau_0) \sin \tau_0] \\ \frac{d \operatorname{tang} \tau}{d u} &= \frac{1}{u_0 \rho_0 \cos^2 \tau_0} + (u^2 - u_0^2) \frac{1}{u_0^3 \rho_0^2 \cos^4 \tau_0} [2 \sin \tau_0 - (n+1)(\rho_0 + \sin \tau_0)] + \dots \end{aligned}$$



(On aura alors les formules qui suivent :

$$\begin{aligned} g x &= \mu (\operatorname{tang} \tau_0 - \operatorname{tang} \tau_1) - \xi'_0 (u_0^2 - u_1^2) \left( \mu - \frac{u_1^2 + u_0^2}{2} \right) \\ &\quad + \frac{\xi''_0}{2} (u_0^2 - u_1^2)^2 \left( \mu - \frac{2u_1^2 + u_0^2}{3} \right) \\ &\quad + \dots \dots \dots \\ 2 g y &= \mu (\operatorname{tang}^2 \tau_0 - \operatorname{tang}^2 \tau_1) - \xi'_0 (u_0^2 - u_1^2) \left( \mu - \frac{u_1^2 + u_0^2}{2} \right) \\ &\quad + \frac{\xi''_0}{2} (u_0^2 - u_1^2)^2 \left( \mu - \frac{2u_1^2 + u_0^2}{3} \right) \\ &\quad + \dots \dots \dots \\ g t &= \mu (\operatorname{tang} \tau_0 - \operatorname{tang} \tau_1) - \xi'_0 (u_0 - u_1) \left( \mu - \frac{u_1 + u_0}{2} \right) \\ &\quad + \frac{\xi''_0}{2} (u_0 - u_1)^2 \left( \mu - \frac{2u_1 + u_0}{3} \right) \\ &\quad + \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Les  $\xi'_0$  et  $\xi''_0$  étant pris suivant l'élément considéré dans le Tableau ci-dessus.

3° En particulier, si l'on choisit  $\mu$  de manière à faire disparaître le troisième terme du second membre, on a, d'une manière générale,

$$I = \frac{2\varphi_1 + \varphi_0}{3} (\xi_1 - \xi_0) - \frac{\xi'_0}{6} (\varphi_0 - \varphi_1)^2$$

et, dans le cas actuel, il viendra

$$\begin{aligned} g x &= \frac{2u_1^2 + u_0^2}{3} (\operatorname{tang} \tau_0 - \operatorname{tang} \tau_1) + \frac{1}{2.6 v_0^2 \rho_0 \cos^3 \tau_0} (u_0^2 - u_1^2)^2 + \dots, \\ 2 g y &= \frac{2u_1^2 + u_0^2}{3} (\operatorname{tang}^2 \tau_0 - \operatorname{tang}^2 \tau_1) + \frac{\operatorname{tang} \tau_0}{6 v_0^2 \rho_0 \cos^3 \tau_0} (u_0^2 - u_1^2)^2 + \dots, \\ g t &= \frac{2u_1 + u_0}{3} (\operatorname{tang} \tau_0 - \operatorname{tang} \tau_1) + \frac{1}{6 v_0 \rho_0 \cos^3 \tau_0} (u_0 - u_1)^2 + \dots \end{aligned}$$

On peut remarquer la formule

$$y = x \operatorname{tang} \tau_0 - \frac{2u_1^2 + u_0^2}{6} (\operatorname{tang} \tau_0 - \operatorname{tang} \tau_1)^2.$$

4° On peut établir d'autres formules en partant de l'intégrale I écrite :

$$\begin{aligned} I &= \varphi_1 (\xi_1 - v) - \varphi_0 (\xi_0 - v) - \varphi'_0 (\xi_0 - \xi_1) \left( v - \frac{\xi_1 + \xi_0}{2} \right) \\ &\quad + \frac{\varphi''_0}{2} (\xi_0 - \xi_1)^2 \left( v - \frac{2\xi_1 + \xi_0}{3} \right) + \dots + (-1)^n \frac{\varphi^{(n)}_0}{n!} (\xi_0 - \xi_1)^n \left( v - \frac{n\xi_1 + \xi_0}{n+1} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, en faisant  $\mu = \frac{2\xi_1 + \xi_0}{3}$ , on trouvera pour  $x$  la formule

$$3gx = (2u_0^2 + u_1^2)(\tan \tau_0 - \tan \tau_1) - u_0^2 \rho_0 (\tan \tau_0 - \tan \tau_1)^2 + \dots$$

Si l'on fait  $\mu = \frac{\xi_0 \varphi_0 - \xi_1 \varphi_1}{\varphi_0 - \varphi_1}$ , on trouve pour premier terme

$$I = - \varphi'_0 \frac{\xi_0 - \xi_1}{\varphi_0 - \varphi_1} (\xi_0 \varphi_1 - \xi_1 \varphi_0) + \dots,$$

ce qui donne pour  $x$ , par exemple,

$$x = \frac{u_0^2}{g} \rho_0 \cos \tau_0 \frac{\tan \tau_0 - \tan \tau_1}{u_0^2 - u_1^2} (u_1^2 \tan \tau_0 - u_0^2 \tan \tau_1) + \dots$$

**287. Troisième exemple d'application.** — Donnons encore quelques formules générales relatives à l'évaluation approchée d'intégrales, qui sont utiles dans certains problèmes de Balistique.

1° Soit

$$I = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \varphi \, d\xi.$$

Posons

$$\zeta = \frac{\xi_1 + \lambda \xi_0}{1 + \lambda} \quad \text{et} \quad h = \xi_1 - \xi_0,$$

On aura

$$\begin{aligned} I = h \varphi(\zeta) &+ \frac{h^2}{2!} \varphi'(\zeta) \frac{\lambda^2 - 1}{(\lambda + 1)^2} + \frac{h^3}{3!} \varphi''(\zeta) \frac{\lambda^3 - 1}{(\lambda + 1)^3} \\ &+ \frac{h^4}{4!} \varphi'''(\zeta) \frac{\lambda^4 - 1}{(\lambda + 1)^4} + \frac{h^5}{5!} \varphi^{(4)}(\zeta) \frac{\lambda^5 - 1}{(\lambda + 1)^5} \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Si, d'une façon générale, on pose

$$\lambda = \left( \frac{\xi_0}{\xi_1} \right)^m, \quad \text{d'où} \quad \zeta = \frac{\xi_1^{m+1} + \xi_0^{m+1}}{\xi_1^m + \xi_0^m},$$

on a

$$I = h \varphi(\zeta) + \left[ m \frac{\varphi'(\zeta)}{\zeta} + \frac{\varphi''(\zeta)}{6} \right] \frac{h^3}{4} + \Lambda h^5.$$

On a ainsi, par cette formule générale, l'expression pour différentes moyennes; ainsi :

$$m = 0, \quad \zeta = \frac{\xi_1 + \xi_0}{2} \quad (\text{moyenne arithmétique});$$

$$m = 1, \quad \zeta = \frac{\xi_1^2 + \xi_0^2}{\xi_1 + \xi_0},$$

$$m = -\frac{1}{2}, \quad \zeta = \sqrt{\xi_0 \xi_1}, \quad (\text{moyenne géométrique});$$

$$m = -1, \quad \frac{1}{\zeta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\xi_0} + \frac{1}{\xi_1} \right) \quad (\text{moyenne harmonique}).$$

2° Pour  $\lambda = 0$ , ( $\zeta = \xi_1$ ) et pour  $\lambda = \infty$  ( $\zeta = \xi_0$ ), on a

$$I = h\varphi_0 + \frac{h^2}{2!}\varphi'_0 + \frac{h^3}{3!}\varphi''_0 + \frac{h^4}{4!}\varphi'''_0 + \dots$$

$$I = h\varphi_1 + \frac{h^2}{2!}\varphi'_1 + \frac{h^3}{3!}\varphi''_1 + \frac{h^4}{4!}\varphi'''_1 + \dots$$

Ajoutant ces deux équations, on trouve

$$I = \frac{h}{2}(\varphi_1 + \varphi_0) - \frac{h^2}{2 \cdot 2!}(\varphi'_1 - \varphi'_0) + \frac{h^3}{2 \cdot 3!}(\varphi''_1 - \varphi''_0) \\ - \frac{h^4}{2 \cdot 4!}(\varphi'''_1 - \varphi'''_0) + \frac{h^5}{2 \cdot 5!}(\varphi^{IV}_1 + \varphi^{IV}_0).$$

Si on les retranche, on obtient

$$0 = \varphi_0 - \varphi_1 + \frac{h}{2!}(\varphi'_0 + \varphi'_1) + \frac{h^2}{3!}(\varphi''_0 - \varphi''_1) + \frac{h^3}{4!}(\varphi'''_0 + \varphi'''_1) + \dots,$$

$$0 = \varphi'_0 - \varphi'_1 + \frac{h}{2!}(\varphi''_0 + \varphi''_1) + \frac{h^2}{3!}(\varphi'''_0 - \varphi'''_1) + \frac{h^3}{4!}(\varphi^{IV}_0 + \varphi^{IV}_1) + \dots,$$

$$0 = \varphi''_0 - \varphi''_1 + \frac{h}{2!}(\varphi'''_0 + \varphi'''_1) + \frac{h^2}{3!}(\varphi^{IV}_0 - \varphi^{IV}_1) + \dots,$$

$$0 = \varphi'''_0 - \varphi'''_1 + \frac{h}{2!}(\varphi^{IV}_0 + \varphi^{IV}_1) + \dots,$$

.....

Remplaçons, dans l'expression de  $I$ , le terme  $\frac{h^5}{2 \cdot 5!}(\varphi^{IV}_1 + \varphi^{IV}_0)$  par sa valeur tirée de la dernière équation

$$\frac{h^4}{5!}(\varphi'''_1 - \varphi'''_0),$$

et de même  $\frac{h^3}{2 \cdot 3!}(\varphi''_1 + \varphi''_0)$  par sa valeur tirée de la deuxième équation

$$\frac{h^2}{3!} \left[ \varphi'_1 - \varphi'_0 + \frac{h^2}{3!}(\varphi'''_1 - \varphi'''_0) - \frac{h^3}{4!}(\varphi^{IV}_1 + \varphi^{IV}_0) \right],$$

il viendra, après réduction,

$$I = \frac{h}{2}(\varphi_1 + \varphi_0) - \frac{h^2}{2 \cdot 6}(\varphi'_1 - \varphi'_0) + \frac{h^3}{720}(\varphi''_1 - \varphi''_0) \\ + (-1) C_n h^{2n} (\varphi^{2n-1}_1 - \varphi^{2n-1}_0).$$

C'est une série dite, en Analyse, série d'*Euler-Mac Laurin* qui est susceptible de nombreuses applications : elle permet, en particulier, connaissant  $\varphi_1$ ,  $\varphi_0$ ,  $\varphi'_1$  et  $\varphi'_0$  aux extrémités d'un arc de courbe, d'obtenir une très bonne approximation de l'intégrale  $I = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \varphi d\xi$ .

3° Ainsi, en prenant  $x = \xi$ , on trouve pour les équations du mouvement :

$$\begin{aligned} y &= \frac{x}{2} (\tan \tau_0 + \tan \tau_1) - \frac{g x^2}{2.6} \left( \frac{1}{u_0^2} - \frac{1}{u_1^2} \right) + \dots, \\ t &= \frac{x}{2} \left( \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} \right) + \frac{g x^2}{2.6} \left( \frac{\rho_0}{v_0 u_0^2} - \frac{\rho_1}{v_1 u_1^2} \right) + \dots, \\ \tan \tau &= \tan \tau_0 + \frac{g x}{2} \left( \frac{1}{u_0^2} + \frac{1}{u_1^2} \right) + \frac{g^2 x^2}{6} \left( \frac{\rho_0}{v_0 u_0^3} - \frac{\rho_1}{v_1 u_1^3} \right) + \dots, \\ u &= u_0 + \frac{g x}{2} \left( \frac{\rho_0}{v_0} + \frac{\rho_1}{v_1} \right) \\ &\quad + \frac{g^2 x^2}{2.6} \left[ \frac{v_0 \rho'_0}{u_0^2} - \frac{\rho_0}{v_0 \cos \tau_0} - \frac{v_1 \rho'_1}{u_1^2} - \frac{\rho_1}{v_1 \cos \tau_1} \right]. \end{aligned}$$

4° En prenant, d'autre part,  $\tan \tau = \xi$ , on a :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2g} (\tan \tau_0 - \tan \tau_1) (u_0^2 + u_1^2) + \frac{1}{6g} (\tan \tau_0 - \tan \tau_1)^2 [v_1^2 \rho_1 \cos^3 \tau_1 - v_0^2 \rho_0 \cos^3 \tau_0], \\ y &= \frac{1}{4g} (\tan^2 \tau_0 - \tan^2 \tau_1) (u_0^2 + u_1^2) + \frac{1}{4.6g} (\tan^2 \tau_0 - \tan^2 \tau_1)^2 \left[ \frac{v_1^2 \rho_1 \cos^3 \tau_1}{\tan \tau_1} - \frac{v_0^2 \rho_0 \cos^3 \tau_0}{\tan \tau_0} \right], \\ t &= \frac{1}{2g} (\tan \tau_0 - \tan \tau_1) (u_0 + u_1) + \frac{1}{2.6g} (\tan \tau_0 - \tan \tau_1)^2 [v_1 \rho_1 \cos^2 \tau_1 - v_0 \rho_0 \cos^2 \tau_0]. \end{aligned}$$

5° En prenant enfin  $t = \xi$ , on trouve les deux formules symétriques :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} (u_0 + u_1) t - \frac{g t^2}{2.6} (\rho_0 \cos \tau_0 - \rho_1 \cos \tau_1) + \dots, \\ y &= \frac{1}{2} (v_0 + v_1) t - \frac{g t^2}{2.6} (\rho_0 \sin \tau_0 - \rho_1 \sin \tau_1) + \dots \end{aligned}$$

On peut en déduire

$$y = \frac{v_0 + v_1}{u_0 + u_1} x - \frac{g}{3} \frac{x^2}{(u_0 + u_1)^2} (\rho_0 v_1 + \rho_1 v_0) \sin(\tau_0 - \tau_1).$$

288. **Quatrième exemple d'application.** — Dans le développement en fonction de  $v\tau = (\tau_0 - \tau)$ , cherchons l'erreur que l'on commet sur les différents éléments quand on les calcule avec l'hypothèse d'une résistance  $B_m v^m$  au lieu de la véritable  $B_n v^n$  sur l'arc considéré, en supposant, comme au n° 112, 1°, la correspondance

$$b_m \left( \frac{v_0 + av}{1 + a} \right)^m = b_n \left( \frac{v_0 + av}{1 + a} \right)^n,$$

où un point intermédiaire entre  $v_0$  et  $v$ .

Si  $\rho_{0n} = \frac{b_n v_0^n}{g}$  et  $\rho_{0m} = \frac{b_m v_0^m}{g}$ , on aura, par le développement en

série de l'équation de définition,

$$\begin{aligned}\rho_{0m} &= \rho_{0n} \left[ 1 - (m-n) \frac{\alpha}{\alpha+1} \frac{n-v_0}{v} \right] \\ &= \rho_{0n} \left[ 1 + (m-n) \frac{\alpha}{\alpha+1} (\rho_0 + \sin \tau_0) \frac{D\tau}{\cos \tau_0} \right].\end{aligned}$$

Portant cette valeur dans le second membre des développements en série, il viendra les formules suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{x_m - x_n}{x_n} &= \frac{y_m - y_n}{y_n} = \frac{s_m - s_n}{s_n} = 2 \frac{t_m - t_n}{t_n} \\ &= (m-n) \left( \frac{1}{3} - \frac{\alpha}{\alpha+1} \right) (\rho_0 + \sin \tau_0) \left( \frac{D\tau}{\cos \tau_0} \right)^2, \\ \frac{v_m - v_n}{v_n} &= (m-n) \left( \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\alpha+1} \right) (\rho_0 + \sin \tau_0) \left( \frac{D\tau}{\cos \tau_0} \right)^2.\end{aligned}$$

Donc, l'erreur à la fin de l'arc sera diminuée d'un degré, sur la vitesse restante  $v$ , si l'on prend

$$\frac{1}{2} = \frac{\alpha}{\alpha+1}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \alpha = 1;$$

d'où

$$b_m \left( \frac{v_0 + v}{2} \right)^m = b_n \left( \frac{v_0 + v}{2} \right)^n.$$

On fait correspondre ainsi les résistances à la vitesse moyenne  $\frac{v_0 + v}{2}$  sur l'arc.

On reculera d'un degré l'erreur sur  $(x, y, s, t)$ , en prenant

$$\frac{1}{3} = \frac{\alpha}{\alpha+1}, \quad \text{d'où} \quad \alpha = \frac{1}{2};$$

donc

$$b_m \left( \frac{v_0 + v}{3} \right)^m = b_n \left( \frac{v_0 + v}{3} \right)^n.$$

Si l'on adopte la première détermination,  $\alpha = 1$ , on trouve pour l'erreur sur  $x, y, \dots$ ,

$$\frac{x_m - x_n}{x_n} = - \frac{m-n}{6} (\rho_0 + \sin \tau_0) \left( \frac{D\tau}{\cos \tau_0} \right)^2.$$

### III. — FORMULES DU TIR HORIZONTAL.

289. Tir horizontal. — On peut dénommer *tir horizontal* celui où toute la trajectoire, de l'origine au point de chute, peut être représentée

par la série de Mac Laurin, limitée à un petit nombre de termes. Il s'agit, entre autres problèmes, de déterminer les éléments du *point de chute* et du *sommet* de cette trajectoire.

On peut tout d'abord prendre la série avec les trois premiers termes du crochet, c'est-à-dire telle qu'elle a été calculée pour un point quelconque au n° 273; on introduit ainsi la dérivée seconde  $F''_0$  de la résistance initiale, à l'exclusion des termes renfermant la dérivée troisième  $F'''_0$ . Nous donnerons, tout d'abord, la valeur des coefficients  $A_1, A_2, A_3$  pour ce cas, ce qui permettra d'écrire, avec trois termes, toutes les formules du point de chute, déduites du système II du n° 274, où l'on fera  $y = 0$  et aussi les formules du sommet déduites du système III où l'on fera  $\text{tang} \tau = 0$ .

Mais, la complication du terme en  $X^2$  du crochet dans ces formules en rend le calcul très pénible et, pour les applications toutes spéciales pour lesquelles les formules du tir horizontal rendent de réels services, il suffira, le plus souvent, de se borner au terme en  $X^2$  qui n'introduit que la dérivée première  $F'_0$ . C'est dans cette hypothèse que nous établirons les formules complètes.

200. Calcul de la série en  $X$ . — Faisant  $y = 0$  dans la première équation du n° 273, on obtiendra la relation qui suit :

$$\frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g} = X \left[ 1 + \frac{A_1}{3!} X + \frac{A_2}{4!} X^2 + \frac{A_3}{5!} X^3 + \dots \right],$$

qui ferait connaître immédiatement l'angle de projection  $\alpha$  en fonction de  $X$ , si les coefficients  $A_1, A_2$  et  $A_3$  ne renfermaient pas cette variable  $\alpha$ , sous la forme  $\cos \alpha$  et  $\sin \alpha$ . Mais, on peut exprimer  $\cos \alpha$  et  $\sin \alpha$  en fonction de  $X$ .

On a en effet

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= 1 - \frac{\sin^2 \alpha}{8} + \dots = 1 - \frac{1}{8} \left( \frac{gX}{V_0^2} \right)^2 + \dots, \\ \sin \alpha &= \frac{\sin^2 \alpha}{2} + \dots = \frac{1}{2} \frac{gX}{V_0^2} + \dots \end{aligned}$$

On néglige ainsi un terme en  $X^4$  dans  $\cos \alpha$ , en  $X^3$  dans  $\sin \alpha$ . Or, si l'on se borne au terme en  $X^2$  dans le crochet, on devra, dans  $A_3$  (qui multiplie  $X^2$ ), remplacer  $\cos^2 \alpha$  par 1,  $\sin \alpha$  et  $\sin^2 \alpha$  par zéro.

Dans  $A_2$  (qui multiplie  $X^2$ ), on devra remplacer  $\cos^2 \alpha$  par 1 et  $\sin \alpha$  par  $\frac{1}{2} \frac{gX}{V_0^2}$ , ce qui donnera naissance à un terme en  $X^3$ .

Dans  $A_1$  (qui multiplie  $\lambda$ ), le facteur  $\frac{1}{\cos \alpha}$  devra être remplacé par  $\frac{1}{8} \left( \frac{gX}{V_0^2} \right)^2$ , d'où naissance d'un nouveau terme en  $X^3$ .

Ainsi donc, on aura, d'après les formules du n° 271 :

$$A_1 = \frac{4cF_0}{V_0^2} + \frac{1}{2} \frac{cF_0}{V_0^2} \frac{g^2 X^2}{V_0^2},$$

$$A_2 = -4 \left( \frac{cF_0}{V_0^2} \right)^2 \left( \frac{V_0 F'_0}{F_0} - 4 \right) - \frac{2cF_0}{V_0^2} \frac{g^2 X}{V_0^2} \left( \frac{V_0 F'_0}{F_0} - 1 \right),$$

$$A_3 = \frac{4cF_0}{V_0^2} \left[ g^2 \left( \frac{V_0 F'_0}{F_0} - 1 \right) + c^2 F_0^2 \left( \frac{V_0^3 F''_0}{F_0^3} + \frac{V_0^2 F'^2_0}{F_0^2} - 13 \frac{V_0 F'_0}{F_0} + 24 \right) \right].$$

Il suffira de porter ces valeurs dans chacune des équations du n° 273 pour avoir les éléments du point de chute en fonction de la portée  $X$ .

Nous nous contenterons, ainsi qu'il a été dit plus haut, d'écrire la première formule, qui donne l'angle de projection  $\alpha$  en fonction de la portée  $X$ . C'est :

$$\begin{aligned} \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g} = X + \frac{4cF_0}{V_0^2} \frac{X^2}{3!} - 4 \left( \frac{cF_0}{V_0^2} \right)^2 \left( \frac{V_0 F'_0}{F_0} - 4 \right) \frac{X^3}{4!} \\ + \left[ 6 \frac{cF_0 g^2}{V_0^2} \left( \frac{8}{3} - \frac{V_0 F'_0}{F_0} \right) \right. \\ \left. + 4 \frac{c^3 F_0^3}{V_0^2} \left( \frac{V_0 F''_0}{F_0} + \frac{V_0 F'^2_0}{F_0^2} - 13 \frac{V_0 F'_0}{F_0} + 24 \right) \right] \frac{X^4}{5!} + \dots \end{aligned}$$

Pour rendre pratique le calcul de cette formule, il faudrait l'écrire

$$\frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g} = X + ca_1 X^2 - c^2 a_2 X^3 + (ca_3 + c^3 a_4) X^4 + \dots,$$

et avoir calculé d'avance des tables numériques, donnant, en fonction de  $V_0$ , les coefficients  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  et  $a_4$ .

Dans le cas d'une résistance monome, l'équation de la portée devient la suivante :

$$\begin{aligned} \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g} = X + \frac{2}{3} b_n V_0^{n-2} X^2 - \frac{n-4}{6} b_n^2 V_0^{2n-4} X^3 \\ + \frac{4}{5!} \left[ \frac{g^2 (8-3n)}{2} + 2(n-3)(n-4) b_n^2 V_0^{2n-6} \right] X^4 + \dots \end{aligned}$$

Ainsi qu'on le voit, dans le cas de  $n = 4$ , le terme en  $X^3$  dans le crochet manque; la série est donc, si l'on se borne au terme en  $X^3$ , plus approchée que pour toute autre valeur de  $n$  (équation de Piton-Bressant).

291. Calcul des formules à deux termes. — Les cinq systèmes de formules du n° 274, établis pour un point quelconque, donneront naissance, en y faisant  $\gamma = 0$ , à tout autant de systèmes correspondant au point de chute et déterminant quatre des cinq quantités ( $\alpha$ ,  $X$ ,  $T$ ,  $\omega$ ,  $u_\omega$ ) en fonction d'une des autres.

Les fonctions  $A_1$  et  $A_2$  se réduisent, dans le cas des formules à deux termes, à

$$A_1 = \frac{4cF_0}{V_0^2}, \quad A_2 = -4 \left( \frac{cF_0}{V_0^2} \right)^2 \left( \frac{V_0 F'_0}{F_0} - 4 \right).$$

Nous introduirons, dans toutes ces formules, le degré  $n$  de la résistance à l'origine. On a

$$n = \frac{V_0 F'_0}{F_0}.$$

Donc

$$A_2 = -4 \left( \frac{cF_0}{V_0^2} \right)^2 (n - 4) \quad \text{ou} \quad A_1 = -\frac{n-4}{4} A_1^2.$$

La première équation du système I (274), en y faisant  $\gamma = 0$ , donne  $\sin 2\alpha$ , en fonction de  $X$ . Pour la symétrie des équations, il est bon de prendre également  $\omega$  sous le symbole  $\sin 2\omega$ . A cet effet, la deuxième équation du système I donne, par soustraction de la première,

$$\tan \omega = -\frac{gX}{u_0^2} \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - A_1 \frac{X}{1!} + A_2 \frac{X^2}{4!} \right) - \left( 1 + \frac{A_1}{2} \frac{X}{2!} + \frac{A_2}{2} \frac{X^2}{3!} \right) \right],$$

ce qu'on peut écrire

$$\sin 2\omega = -\frac{\cos^2 \omega}{\cos^2 \alpha} \frac{gX}{V_0^2} \left[ 1 + \frac{A_1}{3} X + \frac{A_2}{8} X^2 \right].$$

Mais  $\frac{\cos^2 \omega}{\cos^2 \alpha} = \frac{1 + \tan^2 \omega}{1 + \tan^2 \alpha}$ , c'est-à-dire 1, à un terme en  $X^3$  près, qui donnerait naissance, dans  $\sin 2\omega$ , à un terme en  $X^4$ , qu'on néglige par hypothèse. On a donc, en définitive,

$$\sin 2\omega = -\frac{gX}{V_0^2} \left[ 1 + \frac{A_1}{3} X + \frac{A_2}{8} X^2 \right].$$

L'établissement des autres formules ne donne lieu à aucune difficulté. On peut, d'ailleurs, les déduire toutes du premier système (en  $X$ ) par le retour des séries. C'est ainsi que, dans le troisième système, on a substitué la variable  $\sin 2\omega$  à la variable  $(\tan \alpha - \tan \omega)$  qui résultait directement des formules du n° 274.

On peut, enfin, remarquer qu'on a pu substituer dans l'expression de  $(u_\omega - u_\alpha)$  la différence  $(V_\omega - V_\alpha)$ , car, à un terme du troisième ordre près, on a  $\cos \omega = \cos \alpha$ .



## 292. Formules du point de chute.

I. — Variable : la portée  $X$ .

(1) «.....»

$$(2) \quad \sin 2\alpha = \frac{gX}{V_0^2} \left[ 1 + \frac{2}{3} \left( \frac{cF_0}{V_0^2} X \right) - \frac{n-1}{6} \left( \frac{cF_0}{V_0^2} X \right)^2 + \dots \right],$$

$$(3) \quad \sin 2\omega = - \frac{gX}{V_0^2} \left[ 1 + \frac{4}{3} \left( \frac{cF_0}{V_0^2} X \right) - \frac{n-4}{6} \left( \frac{cF_0}{V_0^2} X \right)^2 + \dots \right],$$

$$(4) \quad T = \frac{X}{u_0} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{cF_0}{V_0^2} X \right) - \frac{n-3}{6} \left( \frac{cF_0}{V_0^2} X \right)^2 + \dots \right],$$

$$(5) \quad V_\omega = V_0 \left[ 1 - \left( \frac{cF_0}{V_0^2} X \right) + \frac{n-1}{6} \left( \frac{cF_0}{V_0^2} X \right)^2 + \dots \right].$$

II. — Variable : l'angle de projection  $\alpha$ .

$$(1) \quad X = \frac{V_0^2}{g} \sin 2\alpha \left[ 1 - \frac{2}{3} (\rho_0 \sin 2\alpha) + \frac{3n+4}{3.6} (\rho_0 \sin 2\alpha)^2 + \dots \right],$$

(2) «.....»

$$(3) \quad \sin 2\omega = - \sin 2\alpha \left[ 1 + \frac{2}{3} (\rho_0 \sin 2\alpha) - \frac{3n-4}{3.3} (\rho_0 \sin 2\alpha)^2 + \dots \right],$$

$$(4) \quad T = \frac{2V_0}{g} \sin \alpha \left[ 1 - \frac{1}{6} (\rho_0 \sin 2\alpha) + \frac{1}{3.6} (\rho_0 \sin 2\alpha)^2 + \dots \right],$$

$$(5) \quad V_\omega = V_0 \left[ 1 - (\rho_0 \sin 2\alpha) + \frac{3n+1}{2.3} (\rho_0 \sin 2\alpha)^2 + \dots \right].$$

III. — Variable : l'angle de chute  $\omega$ .

$$(1) \quad X = - \frac{V_0^2}{g} \sin 2\omega \left[ 1 + \frac{4}{3} (\rho_0 \sin 2\omega) - \frac{3n+14}{2.3} (\rho_0 \sin 2\omega)^2 + \dots \right],$$

$$(2) \quad \sin 2\alpha = - \sin 2\omega \left[ 1 + \frac{2}{3} (\rho_0 \sin 2\omega) - \frac{3n-16}{3.1} (\rho_0 \sin 2\omega)^2 + \dots \right],$$

(3) «.....»

$$(4) \quad T = - \frac{2V_0}{g} \sin \omega \left[ 1 + \frac{4}{3} (\rho_0 \sin 2\omega) - \frac{6n+13}{3.6} (\rho_0 \sin 2\omega)^2 + \dots \right],$$

$$(5) \quad V_\omega = V_0 \left[ 1 - (\rho_0 \sin 2\omega) + \frac{3n+1}{2.3} (\rho_0 \sin 2\omega)^2 + \dots \right].$$

IV. — Variable : la durée de trajet  $T$ .

$$(1) \quad X = u_0 T \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{cF_0}{V_0} T \right) + \frac{n}{6} \left( \frac{cF_0}{V_0} T \right)^2 + \dots \right],$$

$$(2) \quad \sin \alpha = \frac{gT}{2V_0} \left[ 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{cF_0}{V_0} T \right)^2 + \dots \right],$$

$$(3) \quad \sin \omega = - \frac{gT}{2V_0} \left[ 1 + \frac{5}{6} \left( \frac{cF_0}{V_0} T \right) - \frac{n-2}{3} \left( \frac{cF_0}{V_0} T \right)^2 + \dots \right],$$

(4) «.....»

$$(5) \quad V_\omega = V_0 \left[ 1 - \left( \frac{cF_0}{V_0} T \right) + \frac{n}{2} \left( \frac{cF_0}{V_0} T \right)^2 + \dots \right].$$

V. — Variable : la vitesse restante  $V_\omega$ .

$$(1) \quad \rho_0 \frac{gX}{V_0} = \frac{V_0 - V_\omega}{V_0} \left[ 1 + \frac{n-1}{2} \frac{V_0 - V_\omega}{V_0} + \dots \right],$$

$$(2) \quad \rho_0 \sin 2\alpha = \frac{V_0 - V_\omega}{V_0} \left[ 1 + \frac{3n+1}{2.3} \frac{V_0 - V_\omega}{V_0} + \dots \right],$$

$$(3) \quad \rho_0 \sin 2\omega = \frac{V_0 - V_\omega}{V_0} \left[ 1 + \frac{3n+5}{2.3} \frac{V_0 - V_\omega}{V_0} + \dots \right],$$

$$(4) \quad \rho_0 \frac{gT}{V_0} = \frac{V_0 - V_\omega}{V_0} \left[ 1 + \frac{n}{2} \frac{V_0 - V_\omega}{V_0} + \dots \right].$$

$$(5) \quad \text{«.....»}.$$

293. Remarques sur les formules du point de chute. — 1° Dans le système (I), où la variable est la portée  $X$ , tous les éléments, à l'exception de  $T$ , ne renferment que la portée  $X$  et non l'angle de proportion  $\alpha$ . Ces formules peuvent donc servir, en particulier, pour l'étude, aux environs de l'origine, des Tables de tir dont l'argument est la portée  $X$ .

Pour  $T$ , on ne peut plus remplacer  $\cos \alpha$  par l'unité : on négligerait ainsi un terme du second ordre. Il faut, si l'on veut avoir  $T$  en fonction de  $X$  seulement, remplacer  $\cos \alpha$  par  $1 - \frac{1}{8} \left( \frac{gX}{V_0^2} \right)^2$ .

On obtient ainsi la formule

$$T = \frac{X}{V_0} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{cF_0}{V_0^2} X - \left[ \frac{n-3}{6} \left( \frac{cF_0}{V_0^2} \right)^2 - \frac{1}{8} \left( \frac{g}{V_0^2} \right)^2 \right] X^2 + \dots \right\}.$$

Cette formule permet d'étudier, près de l'origine, la courbe  $(X, T)$ .

2° Dans le système (II) (variable  $\alpha$ ),  $T$  s'exprime directement en fonction de  $\alpha$ , l'effet du cosinus de  $u_0$  étant de réduire, en dehors du crochet,  $\sin 2\alpha$  en  $2 \sin \alpha$ .

Il y a lieu de remarquer qu'il est permis, dans le crochet de toutes les formules de ce système, de remplacer  $\sin 2\alpha$  par  $2 \sin \alpha$  ou par  $2 \tan \alpha$ ; on ne néglige ainsi qu'un terme de l'ordre de  $\tan^3 \alpha$ .

3° Dans le système (III) (variable  $\omega$ ), la durée du trajet se présentait sous la forme

$$T = - \frac{V_0}{g} \frac{\sin 2\omega}{u_0} [1 + \dots].$$

Mais  $\frac{\sin 2\omega}{\cos \alpha} = 2 \sin \omega \frac{\cos \omega}{\cos \alpha}$  et  $\frac{\cos \omega}{\cos \alpha}$  ne diffère de l'unité que par un terme en  $X^2$ . On a donc pu écrire :

$$T = - \frac{2V_0}{g} \sin \omega [1 + \dots].$$

On peut, dans tous les crochets de ce groupe, remplacer  $\sin 2\omega$  par  $2 \sin \omega$  ou  $2 \operatorname{tang} \omega$ .

4° Dans le système (IV) (variable T),  $\sin \alpha$  ne renferme pas de terme en  $T^2$ .

Même remarque que ci-dessus pour le terme en  $\sin \omega$ .

On ne peut chasser le terme  $u_0$  de X qu'en introduisant un terme du troisième ordre dans  $\cos \alpha = 1 - \frac{1}{8} \left( \frac{gT}{V_0} \right)^2$ .

On a ainsi, pour la formule pure en T,

$$X = V_0 T \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{cF_0}{V_0} T + \frac{1}{6} \left[ n \left( \frac{cF_0}{V_0} \right)^2 + \frac{3}{4} \left( \frac{g}{V_0} \right)^2 \right] T^2 + \dots \right\}.$$

5° Le système (V) (variable  $V_\omega$ ) conduit à quelques théorèmes intéressants :

a. Divisons membre à membre les deux premières équations; on trouve

$$\frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{gX} = 1 + \frac{2}{3} \frac{V_0 - V_\omega}{V_0} + \dots$$

Or  $\frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$  est la portée dans le vide. Comme  $V_\omega$  (mis ici pour  $u_\omega$ ) a pour limite extrême 0, on peut dire : *Le rapport de la portée dans le vide à la portée dans l'air ne peut dépasser  $1 + \frac{2}{3}$* . (C'est évidemment un théorème limite, vrai pour le seul *tir horizontal*.)

b. On aura entre les angles  $\alpha$  et  $\omega$  un théorème du même genre. On trouve

$$\frac{\operatorname{tang} \omega}{\operatorname{tang} \alpha} = 1 + \frac{2}{3} \frac{V_0 - V_\omega}{V_0} + \dots$$

On a donc toujours, en valeur absolue de  $\omega$ ,

$$\operatorname{tang} \alpha < \operatorname{tang} \omega < \frac{5}{3} \operatorname{tang} \alpha.$$

c. Entre X et T, on trouve de même

$$\frac{X}{V_0 T} = 1 - \frac{1}{2} \frac{V_0 - V_\omega}{V_0},$$

et le rapport  $\frac{X}{V_0 T}$  ne varie qu'entre 1 et  $\frac{1}{2}$ .

En combinant les formules qui donnent T et  $\sin 2\alpha$ , on trouve

$$\frac{2V_0 \sin \alpha}{gT} = 1 + \frac{1}{6} \frac{V_0 - V_\omega}{V_0}.$$

Donc le rapport de la durée du trajet dans le vide  $\frac{2V_0 \sin \alpha}{g}$  à la durée de trajet dans l'air ne peut dépasser  $\left(1 + \frac{1}{6}\right)$ .

d. On doit remarquer que tous ces théorèmes sont indépendants de la loi de résistance de l'air, le degré  $n$  de la résistance s'éliminant dans les combinaisons que nous avons faites des formules entre elles.

Les égalités établies au n° 273, 4°, deviennent, appliquées au point de chute,

$$\begin{aligned} 3 \left[ \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{gX} - 1 \right] &= 2 \left[ \frac{u_0^2}{gX} (\tan \alpha - \tan \omega) - 1 \right] \\ &= 4 \left( \frac{u_0 T}{X} - 1 \right) = 2 \left( 1 - \frac{u_0}{u_0} \right) = \frac{2cF_0}{V_0^2} X. \end{aligned}$$

294. Calcul des premiers éléments d'une table de tir. — On est conduit, en pratique, pour éviter les petites irrégularités dues à un calcul direct et pour obtenir une régularisation précise des chiffres, à employer des formules donnant, pour les petites portées, les différences telles que  $(\alpha - \alpha')$ ,  $(\omega - \alpha)$ ,  $\left(T - \frac{X}{u_0}\right)$ , où le premier terme est l'inconnue dans l'air, et le second la valeur de l'élément dans le vide, qu'on calcule d'abord avec toute la précision désirable.

On aura ainsi, par exemple, d'après les formules du système (I),

$$\sin 2\alpha - \sin 2\alpha' = \frac{2}{3} \frac{g}{V_0^2} \frac{cF_0}{V_0^2} X^2 \left[ 1 - \frac{n-4}{4} \frac{cF_0}{V_0^2} X \right].$$

Mais  $\sin 2\alpha - 2\alpha \left(1 - \frac{2}{3} \frac{2}{3}\right)$ .

Donc

$$\sin 2\alpha - \sin 2\alpha' = 2(\alpha - \alpha') - \frac{4}{3}(\alpha^2 - \alpha'^2).$$

Mais  $\alpha$  et  $\alpha'$  ne différant que par un terme en  $X^2$ , on a le droit d'écrire, en négligeant les termes en  $X^4$ ,

$$\alpha = \alpha' + \frac{1}{3} \frac{g}{V_0^2} \frac{cF_0}{V_0^2} X^2 \left[ 1 - \frac{n-4}{4} \frac{cF_0}{V_0^2} X \right]$$

ou

$$\alpha = \alpha' + cM_0 X^2 - c^2 N_0 X^3.$$

C'est la formule cherchée, avec les deux coefficients  $M_0$  et  $N_0$ , connus une fois pour toutes en fonction de  $V_0$ , qui permettra le calcul immédiat de  $\alpha$  pour des valeurs successives de  $X$ .

On aura de même

$$\omega = \alpha - \frac{1}{3} \frac{g}{V_0^2} \frac{cF_0}{V_0^2} X^2 \left[ 1 - \left(\frac{n-4}{2}\right) \frac{cF_0}{V_0^2} X \right]$$

ou

$$\omega = -[x + c M_0 X^2 - \gamma c^2 N_0 X^3].$$

**295. Limite des formules différentielles.** — Un des principaux intérêts que présentent les formules issues de la série de Mac Laurin est qu'elles permettent de déterminer les limites, quand l'angle de projection diminue, de toutes les autres formules de la Balistique.

A ce titre, il est utile de calculer ici les valeurs limites des *formules différentielles* qui donnent, au point de chute, les petites variations  $(\partial X, \partial T, \partial \omega, \partial V_\omega)$  correspondant aux petites variations  $(\partial c, \partial V_0, \partial \alpha)$  des caractéristiques initiales du tir.

Pour établir ces formules, on prendra comme point de départ le système (II) (variable  $\alpha$ ), car, dans le premier membre figure un des éléments du point de chute, dans le second figurent les trois caractéristiques initiales  $(c, V_0, \alpha)$ . Nous nous bornerons, d'ailleurs, à deux termes et les formules à considérer sont :

$$X = \frac{V_0^2}{g} \sin 2\alpha \left(1 - \frac{2}{3} \rho_0 \sin 2\alpha\right), \quad \sin 2\omega = -\sin 2\alpha \left(1 + \frac{2}{3} \rho_0 \sin 2\alpha\right),$$

$$T = \frac{2V_0}{g} \sin \alpha \left(1 - \frac{1}{6} \rho_0 \sin 2\alpha\right), \quad V_\omega = V_0(1 - \rho_0 \sin 2\alpha).$$

Différentions les deux membres de la première équation, on aura

$$\frac{gX}{V_0^2 \sin 2\alpha} \left[ \frac{\partial X}{X} - 2 \frac{\partial V_0}{V_0} - \frac{2 \cos 2\alpha \partial \alpha}{\sin 2\alpha} \right]$$

$$= -\frac{2}{3} \frac{\rho_0}{\sin 2\alpha} \left[ \frac{\partial c}{c} + \frac{V_0'}{V_0} \partial V_0 + \frac{2 \cos 2\alpha \partial \alpha}{\sin 2\alpha} \right].$$

On réunira les termes semblables; on posera  $\frac{V_0 F_0'}{F_0} = n$  (degré de la résistance à l'origine) et l'on remplacera, à l'approximation actuelle,  $\cos \alpha$  par l'unité. Opérant de la même façon avec les autres éléments du point de chute, il viendra le système suivant :

$$\frac{\partial X}{X} = -\frac{2}{3} \rho_0 \sin 2\alpha \frac{\partial c}{c} + 2 \left(1 - \frac{2}{3} \rho_0 \sin 2\alpha\right) \frac{\partial V_0}{V_0} + \left(1 - \frac{2}{3} \rho_0 \sin 2\alpha\right) \frac{\partial \alpha}{\sin \alpha},$$

$$\frac{\partial T}{T} = -\frac{1}{6} \rho_0 \sin 2\alpha \frac{\partial c}{c} + \left(1 - \frac{1}{6} \rho_0 \sin 2\alpha\right) \frac{\partial V_0}{V_0} + \left(1 - \frac{1}{6} \rho_0 \sin 2\alpha\right) \frac{\partial \alpha}{\sin \alpha},$$

$$\frac{\partial \omega}{\sin \omega} = -\frac{2}{3} \rho_0 \sin 2\alpha \frac{\partial c}{c} - \frac{2n}{3} \rho_0 \sin 2\alpha \frac{\partial V_0}{V_0} + \left(1 - \frac{1}{3} \rho_0 \sin 2\alpha\right) \frac{\partial \alpha}{\sin \alpha},$$

$$\frac{\partial V_\omega}{V_\omega} = -\rho_0 \sin 2\alpha \frac{\partial c}{c} + \left(1 - n \rho_0 \sin 2\alpha\right) \frac{\partial V_0}{V_0} - \rho_0 \sin 2\alpha \frac{\partial \alpha}{\sin \alpha}.$$

**296. Sommet de la trajectoire.** — Pour avoir les éléments du sommet

( $X_s, Y_s, T_s, V_s$ ) en fonction de l'angle de projection  $\alpha$ , il faut, dans le système (III) du n° 274, faire  $\tan \tau = 0$ .

On trouve ainsi :

$$\begin{aligned} X_s &= \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{g} \sin 2\alpha \left[ 1 - \frac{1}{2} (\rho_0 \sin 2\alpha) + \frac{n+2}{3 \cdot 4} (\rho_0 \sin 2\alpha)^2 + \dots \right], \\ Y_s &= \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{g} \sin^2 \alpha \left[ 1 - \frac{1}{3} (\rho_0 \sin 2\alpha) + \frac{n+2}{4!} (\rho_0 \sin 2\alpha)^2 + \dots \right], \\ T_s &= \frac{V_0 \sin \alpha}{g} \left[ 1 - \frac{1}{4} (\rho_0 \sin 2\alpha) + \frac{n+1}{4!} (\rho_0 \sin 2\alpha)^2 + \dots \right], \\ V_s &= V_0 \cos \alpha \left[ 1 - \frac{1}{2} (\rho_0 \sin 2\alpha) + \frac{n+1}{8} (\rho_0 \sin 2\alpha)^2 + \dots \right]. \end{aligned}$$

On peut, par des combinaisons analogues à celles employées pour le point de chute, prendre pour variable, au lieu de  $\alpha$ , un des éléments ( $X_s, Y_s, T_s, V_s$ ).

1° On a

$$\tan \sigma_s = \frac{Y_s}{X_s} = \frac{1}{2} \tan \alpha \left[ 1 + \frac{1}{6} \rho_0 \sin 2\alpha + \dots \right].$$

La ligne de site du sommet est donc, dans l'air, au-dessus de la ligne de site du sommet dans le vide.

2° On peut aussi exprimer les éléments du sommet, en fonction de la portée  $X$ , ce qui peut être avantageux pour le calcul des tables de tir. On a ainsi :

$$\begin{aligned} X_s &= \frac{X}{2} \left[ 1 + \frac{1}{6} \left( \rho_0 \frac{gX}{V_0^2} \right) - \frac{n+2}{3 \cdot 4} \left( \rho_0 \frac{gX}{V_0^2} \right)^2 + \dots \right], \\ Y_s &= \frac{gX^2}{8V_0^2} \left[ 1 + \rho_0 \frac{gX}{V_0^2} - \left( \frac{21n-86}{3 \cdot 4!} \rho_0^2 - \frac{1}{4} \right) \left( \frac{gX}{V_0^2} \right)^2 + \dots \right], \\ V_s &= V_0 \left[ 1 - \frac{1}{2} \rho_0 \frac{gX}{V_0^2} + \left( \frac{3n-5}{4!} \rho_0^2 - \frac{1}{8} \right) \left( \frac{gX}{V_0^2} \right)^2 + \dots \right], \\ T_s &= \frac{X}{2V_0} \left[ 1 + \frac{5}{3 \cdot 4} \rho_0 \frac{gX}{V_0^2} - \left( \frac{n-3}{8} \rho_0^2 - \frac{1}{8} \right) \left( \frac{gX}{V_0^2} \right)^2 + \dots \right]. \end{aligned}$$

3° *Application.* — Quelle est la plus approchée des deux formules souvent proposées pour calculer la flèche :

$$Y_s = \frac{X}{g} (\tan \alpha - \tan \omega) \quad \text{et} \quad Y_s = \frac{1}{8} g T^2 ?$$

(On a (n° 292)

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{gX}{2V_0^2} \left[ 1 + \frac{4}{3} \rho_0 \frac{gX}{V_0^2} - \frac{n-1}{6} \left( \rho_0 \frac{gX}{V_0^2} \right)^2 + \dots \right], \\ \tan \omega &= \frac{gX}{2V_0^2} \left[ 1 + \frac{1}{3} \rho_0 \frac{gX}{V_0^2} - \frac{n-4}{2} \left( \rho_0 \frac{gX}{V_0^2} \right)^2 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Donc

$$\tan \alpha - \tan \omega = \frac{gX}{V_0^2} \left[ 1 + \rho_0 \frac{gX}{V_0^2} - \frac{n-4}{3} \left( \rho_0 \frac{gX}{V_0^2} \right)^2 + \dots \right]$$

et, par suite,

$$Y_s = \frac{X}{8} (\tan \alpha - \tan \omega) = \frac{g X^2}{8 V_0^2} \left[ 1 + \rho_0 \frac{g X}{V_0^2} - \frac{n-1}{3} \left( \rho_0 \frac{g X}{V_0^2} \right)^2 + \dots \right].$$

D'autre part (n° 292),

$$T^2 = \frac{X^2}{V_0^2} \left[ 1 + \rho_0 \frac{g X}{V_0^2} - \left( \frac{2n-9}{6} \rho_0^2 - \frac{1}{8} \right) \left( \frac{g X}{V_0^2} \right)^2 + \dots \right].$$

Donc

$$Y_s = \frac{1}{8} g T^2 = \frac{g X^2}{8 V_0^2} \left[ 1 + \rho_0 \frac{g X}{V_0^2} - \left( \frac{2n-9}{6} \rho_0^2 - \frac{1}{8} \right) \left( \frac{g X}{V_0^2} \right)^2 + \dots \right].$$

Les deux formules sont, l'une et l'autre, exactes jusqu'aux termes en  $X^2$  dans le crochet.

4° Si l'on exprime  $X$ , en fonction de  $\frac{V_0 - V_\omega}{V_0}$ , on trouve

$$X = \frac{X}{2} \left( 1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{V_0 - V_\omega}{V_0} \right).$$

Donc, on a toujours, pour le tir horizontal,

$$\frac{X}{2} < X_s < \frac{X}{2} \left( 1 + \frac{1}{6} \right).$$

On trouverait de même

$$\frac{T}{2} < T_s < \frac{T}{2} \left( 1 + \frac{1}{3.4} \right).$$

5° Les égalités établies au n° 274, 4°, deviennent, appliquées au sommet :

$$\begin{aligned} & 3 \left[ \frac{2 u_0^2}{g X_s} \left( \tan \alpha - \frac{Y_s}{X_s} \right) - 1 \right] \\ & = 2 \left( \frac{u_0^2}{g X_s} \tan \alpha - 1 \right) = 4 \left( \frac{u_0 T_s}{X_s} - 1 \right) = 2 \left( 1 - \frac{u_s}{u_0} \right) = \frac{2 g T_0}{V_0^2} X_s. \end{aligned}$$

---

# TABLE DÉVELOPPÉE DES MATIÈRES.

## TOME I.

---

	Pages.
PRÉFACE.	v
INTRODUCTION. — La Balistique Extérieure rationnelle.....	1
1. Objet de la Balistique Extérieure; 2. La Terre; 3. L'Atmosphère; 4. Le Projectile; 5. Problèmes balistiques principal et secondaires.	

### PROBLÈME BALISTIQUE PRINCIPAL.

CHAPITRE PRÉLIMINAIRE. — Les bases de la Balistique Extérieure rationnelle.

I. <i>Lois de la résistance de l'air</i> .....	7
6. Lois expérimentales; 7. Expression des lois de la résistance; 8. Fonctions $F(v)$ et $f(v)$ .	
II. <i>Rôle de la loi de résistance dans la solution du problème balistique</i> .....	10
9. Les lois partielles de résistance; 10. Bases réelles du problème balistique; 11. Sur la généralité de la Balistique Extérieure rationnelle; 12. Intérêt de l'étude des lois simples; 13. Degré de la résistance.	
III. <i>Divisions du problème balistique principal</i> .....	18
14. Les trois parties du problème principal; 15. Divisions générales du Traité.	

---

### PREMIÈRE PARTIE.

Les cas limites du problème balistique.

---

#### LIVRE I.

##### LA BALISTIQUE PARABOLIQUE.

CHAPITRE I. — Le mouvement des projectiles dans le vide.

I. <i>Équations du mouvement parabolique</i> .....	21
16. Sur la théorie du mouvement parabolique; 17. Équations différentielles du second ordre; 18. Les quatre équations différentielles du premier	



ordre; 19. Formules des éléments d'un point de la trajectoire; 20. Équations intrinsèques; 21. Longueur de l'arc  $s$ ; 22. Mouvement vertical.

II. *Trajectoire du vide*..... 32

23. Équation de la trajectoire; 24. Directrice et foyer; 25. Vitesse du projectile en un point. Hodographe; 26. Formules du sommet; 27. Formules du point de chute; 28. Formules différentielles.

III. *Théorèmes sur les propriétés de la trajectoire*..... 40

29. Équation de la trajectoire en coordonnées polaires; 30. Variations de l'angle tangentiel; 31. Déplacement du rayon vecteur; 32. Vitesse du projectile; 33. Construction de la trajectoire par points; 34. Formes diverses de l'équation de la trajectoire; 35. Le foyer de la trajectoire; 36. Rayon de courbure et développée de la trajectoire.

## CHAPITRE II. — Les familles de trajectoires.

I. *Famille des trajectoires à vitesse initiale constante*..... 57

37. Définition de la famille  $V_0 = \text{const.}$ ; 38. Théorèmes sur les directrices, les foyers et les sommets; 39. Parabole de sécurité; 40. Portée maximum; 41. Trajectoires conjuguées du point de chute; 42. Ensemble des propriétés des trajectoires  $V_0 = \text{const.}$ ; 43. Trajectoires orthogonales des paraboles de la famille  $V_0 = \text{const.}$ ; 44. Maximum de l'arc et de l'aire; 45. Théorème de l'abaissement constant; 46. Lieu des points d'éclatement; 47. Lieu des points où  $\tau = \text{const.}$ ; 48. Les courbes des Tables de tir; 49. La zone dangereuse.

II. *Problème du but à battre*..... 81

50. Solution géométrique du problème du but à battre; 51. Quelques autres solutions géométriques; 52. Solution de Cassini; 53. Solution algébrique du problème du but à battre; 54. Portée dans le site; 55. La trajectoire rapportée à la ligne de site; 56. Ricochet sur plan incliné.

III. *Autres familles de trajectoires*..... 106

57. Trajectoires à angle de projection constant; 58. Trajectoires à vitesse horizontale constante; 59. Autres familles de trajectoires; 60. Théorie de l'arbalète.

## CHAPITRE III. — Les problèmes de tir dans le vide.

I. *Les différents genres de tir*..... 119

61. Le tir en brèche; 62. Le tir défilé; 63. Le tir de côté; 64. Le tir fusant; 65. Le tir à ricochet; 66. Le problème de l'aéro-cible; 67. Tir sur but mobile; 68. Tir des flèches porte-amarre; 69. Tir pendulaire; 70. Problèmes divers.

II. *La gerbe balistique*..... 152

71. Formules différentielles pour un point quelconque; 72. Définition de la gerbe balistique; 73. Intersection de deux trajectoires voisines;

74. Applications; 75. L'écart moyen en portée; 76. Les ellipses d'éclatement des schrapnels.

### III. *Le tir d'altitude*..... 172

77. Problème du tir d'altitude; 78. Tir à hausse fixe; 79. La rigidité de la trajectoire; 80. Les courbes des hausses; 81. Méthode de Saint-Robert; 82. Hausse verticale; 83. Abaque du capitaine Pravaz; 84. Abaques à droites cotées; 85. Niveau de pointage du capitaine Sarfati; 86. Abaque à points alignés du capitaine Lafay; 87. L'hypothèse de l'Aide-Mémoire; 88. Tir à angle fixe.

## LIVRE II.

### LA BALISTIQUE RECTILIGNE:

#### CHAPITRE I. — Mouvement rectiligne horizontal.

### I. *Formules du mouvement horizontal*..... 203

89. Hypothèses; 90. Équations du mouvement; 91. Fonctions  $S(v)$  et  $D(v)$ .

### II. *Discussion du mouvement*..... 205

92. Fin du mouvement; 93. Origine du mouvement; 94. Application; 95. Étude de la courbes des espaces. Fonction  $D(v)$ ; 96. Étude de la courbe des temps. Fonction  $S(v)$ ; 97. Nomogrammes des fonctions  $D(v)$  et  $S(v)$ ; 98. Courbe des espaces en fonction des temps; 99. Cas d'une résistance monome; 100. Loi de résistance :  $cF(v) = b_0 + b_1v + b_2v^2$ ; 101. Cas particuliers; 102. Problème sur la pénétration dans les milieux solides; 103. Formule de perforation des plaques de blindage du général Moisson; 104. Loi de résistance :  $cF(v) = b_1v + b_2v^2 + b_3v^3$ ; 105. Cas particuliers; 106. Loi de Saint-Robert et Mayewski; 107. Sur d'autres formes de fonctions.

### III. *Développement en série*..... 239

108. Le développement de Mac Laurin; 109. Les six séries du mouvement horizontal; 110. Retour des séries; 111. Ensemble des formules.

### IV. *Applications*..... 245

112. Calcul de la vitesse initiale; 113. Le problème de la supériorité balistique dans le tir en mer; 114. Problème du stoppage courbe des navires; 115. Trajectoire d'un flotteur rectangulaire.

#### CHAPITRE II. — Mouvement vertical.

### I. *Mouvement vertical ascendant*..... 262

116. Mouvement ascendant dans le vide; 117. Équations du mouvement vertical ascendant dans l'air; 118. Discussion du mouvement; 119. Fonctions balistiques du mouvement vertical ascendant; 120. Fonction  $\Sigma(v, c)$ ; 121. Fonction  $\Delta(v, c)$ ; 122. Arrêt du projectile.

II. <i>Mouvement vertical descendant</i> .....	267
123. Mouvement vertical descendant dans le vide; 124. Équations du mouvement vertical descendant dans l'air; 125. Théorème de la vitesse terminale; 126. Discussion du mouvement vertical descendant; 127. Fonctions balistiques du mouvement vertical descendant; 128. Fonction $V(v, c)$ ; 129. Courbe $(y, t)$ .	
III. <i>Cas particuliers</i> .....	275
130. Résistance monome; 131. Formules différentielles; 132. Résistance linéaire; 133. Résistance quadratique; 134. Théorèmes de Lambert; 135. Problèmes divers sur la résistance quadratique; 136. Cas d'une résistance: $cF(v) = b_0 + b_1 v + b_2 v^2$ ; 137. Cas d'une résistance cubique $n = 3$ ; 138. Autres cas d'intégration; 139. Influence de la masse sur la hauteur d'ascension; 140. Mouvement rectiligne sur un plan incliné; 141. Développement en série de Mac Laurin.	
IV. <i>Développement en séries de fonctions</i> .....	303
142. Principe du développement; 143. Développement suivant les puissances de l'inverse du coefficient balistique; 144. Développement suivant les puissances du coefficient balistique; 145. Problèmes sur le mouvement dans le voisinage du point culminant; 146. Mouvement au voisinage de la vitesse terminale.	
V. <i>La trajectoire des projectiles cylindriques et discoïdes</i> .....	314
147. Hypothèses de la théorie; 148. Équations du mouvement des projectiles cylindriques et discoïdes; 149. Formes de la trajectoire; 150. Résistance monome; 151. Cas général d'une trajectoire plane; 152. Au sujet d'une solution du problème balistique; 153. Cas de la trajectoire gauche; 154. Boomerang.	

## DEUXIÈME PARTIE.

### Les théorèmes généraux de la Balistique.

## LIVRE III.

### LES PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DE LA TRAJECTOIRE ATMOSPHÉRIQUE.

#### CHAPITRE I. — Équations différentielles du mouvement.

I. <i>Forme usuelle des équations différentielles</i> .....	329
155. Les deux équations du second ordre; 156. Les quatre équations différentielles du premier ordre; 157. Système des quatre équations usuelles; 158. Définition de l'hodographe; 159. Démonstration géométrique de Greenhill; 160. Équations intrinsèques.	

II. <i>Équations différentielles en coordonnées obliques</i> .....	337
161. Axes et coordonnées; 162. Établissement des équations; 163. Applications; 164. Théorème sur les vitesses.	

## CHAPITRE II. — Étude de l'hodographe.

I. <i>Génération de l'hodographe</i> .....	344
165. Définition de l'hodographe; 166. Cas particuliers de l'hodographe; 167. Théorèmes du colonel Henry; 168. Balistique graphique; 169. Sur la discussion de l'hodographe.	
II. <i>Les deux extrémités de l'hodographe</i> .....	352
170. Théorème I; 171. Théorème II; 172. Théorème III; 173. Théorème IV; 174. Théorème V; 175. Application au cas d'une résistance monome.	
III. <i>Variations de la vitesse</i> .....	359
176. Théorème I; 177. Théorème II; 178. Au sujet de cette démonstration; 179. Théorème III; 180. Théorème IV; 181. Théorème V; 182. Théorème général VI; 183. Théorème VII; 184. Théorème VIII.	
IV. <i>Forme générale de l'hodographe</i> .....	374
185. Équation de la tangente à l'hodographe; 186. Discussion; 187. Rayon de courbure et points d'inflexion de l'hodographe; 188. Formes de l'hodographe. Trajectoires avec sommet; 189. Trajectoires sans sommet; 190. Ensemble des hodographes d'un projectile; 191. Trajectoire orthogonale des hodographes; 192. Tracé graphique de l'hodographe; 193. Les hodographes des trois vitesses ( $v$ , $u$ , $w$ ); 194. Étude de la courbe ( $v$ , $w$ ); 195. Étude de la courbe ( $u$ , $v$ ); 196. Hodographe des résistances.	

## CHAPITRE III. — Étude générale de la courbe balistique.

I. <i>Forme de la trajectoire</i> .....	407
197. Théorème I; 198. Théorème II; 199. Théorème III; 200. Théorème IV; 201. Théorème V; 202. Origine et point de chute; 203. Théorème VI.	
II. <i>Les points remarquables de la courbe balistique</i> .....	412
204. Le point $\Omega$ ; 205. Tangente au point $\Omega$ ; 206. Éléments de la trajectoire au point $\Omega$ ; 207. Cas d'une résistance monome; 208. Sur l'asymptote du point $\Omega$ ; 209. Point $\Omega'$ ; 210. Théorème I; 211. Théorème II; 212. Théorème III; 213. Théorème IV; 214. Extrémité de la branche descendante; 215. Ordre de contact de la trajectoire au point $\Omega$ ; 216. Autres points remarquables de la trajectoire; 217. Anciennes notations balistiques.	
III. <i>Quelques propriétés des trajectoires atmosphériques</i> .....	435
218. Théorème I; 219. Théorème II; 220. Formules et constructions diverses de Balistique approximative; 221. Théorème III; 222. Théorème	

rème IV; 223. De l'angle de portée maximum; 224. Premier théorème du colonel Astier sur la somme  $(\alpha + \omega)$ ; 225. Deuxième théorème du colonel Astier : sur l'angle de portée maximum.

#### IV. *Perturbations et coefficients différentiels*..... 459

226. Formule fondamentale des perturbations; 227. Autres éléments de l'arc; 228. Relations entre les perturbations à arguments divers; 229. Coefficients différentiels; 230. Théorème de M. René Garnier.

### LIVRE IV.

#### LE PROBLÈME BALISTIQUE ET L'ANALYSE.

##### CHAPITRE I. — De l'intégration des équations de la Balistique.

#### I. *Forme normale des équations différentielles de la Balistique*..... 471

231. Problème à résoudre; 232. Principe de la réduction; 233. Réduction de l'hodographe; 234. Autres formes analytiques de l'hodographe; 235. Temps; 236. Ordonnée; 237. Forme normale de l'abscisse.

#### II. *Cas d'intégration des équations de la Balistique*..... 481

238. Le problème balistique au point de vue analytique; 239. Formes intégrables de d'Alembert; 240. Première forme de Siacci; 241. Les autres formes intégrables de Siacci; 242. Cas d'intégration de M. Onivet; 243. Théorie générale de M. Drach; 244. Problème de M. Denjoy.

#### III. *Les intégromètres balistiques*..... 519

245. L'intégrale Abdank-Abakanowicz; 246. Intégromètre balistique de M. Pascal; 247. Principe des intégromètres balistiques à lame coupante; 248. Intégromètre du lieutenant-colonel Filloux; 249. Intégromètre balistique du colonel Jacob; 250. Autres instruments d'intégration; 251. Machine à calculer les trajectoires du capitaine Perrin.

##### CHAPITRE II. — Problèmes balistiques inverses.

#### I. *Les formules des problèmes balistiques inverses*..... 515

252. Théorème; 253. Définition des problèmes balistiques inverses; 254. Formules de Lagrange; 255. Formule de J. Bernoulli; 256. Sur l'équation différentielle de la trajectoire; 257. Sur une forme d'équation de la trajectoire; 258. Sur un théorème relatif à l'angle de portée maximum; 259. Autres problèmes balistiques inverses.

#### II. *Applications*..... 550

260. Trajectoire de Piton-Bressant; 261. Trajectoire du général Duchêne; 262. Hyperbole de Newton; 263. Les coniques comme courbes balistiques; 264. Deuxième problème balistique inverse; 265. Autres problèmes balistiques inverses; 266. Trajectoire à vitesse constante; 267. Facteurs de la trajectoire; 268. Le problème de la réduction des facteurs de la trajectoire; 269. Facteurs de la trajectoire de M. Sugot.

## CHAPITRE III. -- Développement en série en un point de la trajectoire.

	Page.
I. <i>Formules pour le calcul d'un petit arc de trajectoire</i> .....	583
270. Principe du développement; 271. Équation d'un arc de la trajectoire; 272. Calcul des autres éléments d'un arc de trajectoire; 273. Le développement suivant les puissances de l'abscisse; 274. Les cinq systèmes de formules; 275. Expression de l'abaissement et de l'ordonnée; 276. Sur la convergence des séries; 277. La série en $(\tau_0 - \tau)$ ; 278. Formules différentielles.	
II. <i>Applications</i> .....	594
279. Cas d'une résistance monome; 280. Les facteurs de la trajectoire; 281. Construction de la trajectoire par points; 282. Hyperbole balistique en un point de la trajectoire; 283. L'équation de la trajectoire d'après le reste de la série; 284. Développement de l'arc; 285. Application au calcul du temps; 286. Second exemple d'application; 287. Troisième exemple d'application; 288. Quatrième exemple d'application.	
III. <i>Formules du tir horizontal</i> .....	616
289. Tir horizontal; 290. Calcul de la série en X; 291. Calcul des formules à deux termes; 292. Formules du point de chute; 293. Remarques sur les formules du point de chute; 294. Calcul des premiers éléments d'une table de tir; 295. Limite des formules différentielles; 296. Sommet de la trajectoire.	



---

# TABLE DES MATIÈRES.

## TOME I.

---

	Pages.
P R É F A C E . . . . .	v
I N T R O D U C T I O N . — <i>La Balistique Extérieure rationnelle</i> . . . . .	I

### PROBLÈME BALISTIQUE PRINCIPAL.

C H A P I T R E P R É L I M I N A I R E . — <i>Les bases de la Balistique Extérieure rationnelle</i> . . . . .	7
1. Lois de la résistance de l'air . . . . .	7
2. Rôle de la loi de résistance dans la solution du problème balistique . . . . .	10
3. Divisions du problème balistique principal . . . . .	18

---

### PREMIÈRE PARTIE.

#### Les cas limites du problème balistique.

---

#### LIVRE I.

##### LA BALISTIQUE PARABOLIQUE.

C H A P I T R E I . — <i>Le mouvement des projectiles dans le vide</i> . . . . .	21
1. Équations du mouvement parabolique . . . . .	21
2. Trajectoire du vide . . . . .	32
3. Théorèmes sur les propriétés de la trajectoire . . . . .	40
C H A P I T R E I I . — <i>Les familles de trajectoires</i> . . . . .	57
1. Famille des trajectoires à vitesse initiale constante . . . . .	57
2. Problème du but à battre . . . . .	81
3. Autres familles de trajectoires . . . . .	106
C H A P I T R E I I I . — <i>Les problèmes de tir dans le vide</i> . . . . .	119
1. Les différents genres de tir . . . . .	119
2. La gerbe balistique . . . . .	152
3. Le tir d'altitude . . . . .	172



## LIVRE II.

## LA BALISTIQUE RECTILIGNE.

Pages.

CHAPITRE I. — <i>Mouvement rectiligne horizontal</i> .....	203
1. Formules du mouvement horizontal.....	203
2. Discussion du mouvement.....	205
3. Développement en série.....	239
4. Applications.....	245
CHAPITRE II. — <i>Mouvement vertical</i> .....	262
1. Mouvement vertical ascendant.....	262
2. Mouvement vertical descendant.....	267
3. Cas particuliers.....	275
4. Développement en séries de fonctions.....	303
5. La trajectoire des projectiles cylindriques et discoïdes.....	314

## DEUXIÈME PARTIE.

## Les théorèmes généraux de la Balistique.

## LIVRE III.

## LES PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DE LA TRAJECTOIRE ATMOSPHÉRIQUE.

CHAPITRE I. — <i>Équations différentielles du mouvement</i> .....	329
1. Forme usuelle des équations différentielles.....	329
2. Équations différentielles en coordonnées obliques.....	337
CHAPITRE II. — <i>Étude de l'hodographe</i> .....	344
1. Génération de l'hodographe.....	344
2. Les deux extrémités de l'hodographe.....	352
3. Variations de la vitesse.....	359
4. Forme générale de l'hodographe.....	374
CHAPITRE III. — <i>Étude générale de la courbe balistique</i> .....	407
1. Forme de la trajectoire.....	407
2. Les points remarquables de la courbe balistique.....	412
3. Quelques propriétés des trajectoires atmosphériques.....	435
4. Perturbations et coefficients différentiels.....	459

## LIVRE IV.

## LE PROBLÈME BALISTIQUE ET L'ANALYSE.

CHAPITRE I. — <i>De l'intégration des équations de la Balistique</i> .....	471
1. Forme normale des équations différentielles de la Balistique.....	471

	Pages.
2. Cas d'intégration des équations de la Balistique.....	481
3. Les intégromètres balistiques.....	519
CHAPITRE II. -- <i>Problèmes balistiques inverses</i> .....	545
1. Les formules des problèmes balistiques inverses.....	545
2. Applications.....	556
CHAPITRE III. -- <i>Développement en série en un point de la trajectoire</i> .....	583
1. Formules pour le calcul d'un petit arc de trajectoire.....	583
2. Applications.....	594
3. Formules du tir horizontal.....	616
TABLE DÉVELOPPÉE DES MATIÈRES... ..	627
TABLE DES MATIÈRES.....	635

---

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET C<sup>te</sup>,  
Quai des Grands-Augustins, 55.

61246-21

---







[illegible]

\_\_\_\_\_

q623.54 C46 V.1

Charbonnier

Traite de balistique

exterieure

q623.54 C46

Volume 1

**Carnegie Institute of Technology**

**Library**

**Pittsburgh, Pa.**



UNIVERSAL  
LIBRARY



138 403

UNIVERSAL  
LIBRARY